中等专业学校试用教材
招收高中毕业生的工科专业通用

高 等 数 学

（选学部分——无穷级数与拉普拉斯变换）

丁文江　朱镃道 编

*

高等教育出版社出版
新华书店上海发行所发行
上海商务印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 4.25　字数 87,000
1983 年 5 月第 1 版　1983 年 9 月第 1 次印刷
印数 00,001—50,000

书号 13010·0867　定价 0.36 元

编 者 的 话

本书根据1982年教育部审定的中专《数学教学大纲(试行草案)》(招收高中毕业生的工科专业通用)要求,在中专《数学(工科专业通用)》第四册第二十三、二十四章的基础上作了适当的修改与补充编写而成,与《高等数学(公共部分)》配套,供有关专业试用。

使用本书时,应根据专业需要取舍. 例如,对于电类各专业,可适当删减数项级数与幂级数的部分内容;而非电类专业,则可删去傅氏级数.

本书由北京工业学院孙树本同志主审,参加审稿的还有刘颖逸、尹荧、富国栋. 审稿的同志对本书提出了很多宝贵的意见,编者在此表示衷心感谢.

本书由丁文江、朱铉道编写. 限于编者水平,编写时间仓促,错误和不当之处在所难免,殷切希望读者批评指正。

编　　者

1983年1月

目　　录

第一章　无穷级数

无穷级数无论对数学理论本身和在科学技术的应用中都是一个重要的工具. 在本章中，先扼要地介绍无穷级数的基本概念与审敛法，然后着重讨论如何将函数展开为幂级数、傅里叶级数与积分的问题.

§1-1　数项级数

一、无穷级数的概念

早在公元三世纪，我国古代数学家刘徽已经利用无穷级数的概念来计算圆面积.

例1　圆面积问题.

在半径为 R 的圆内作内接正六边形，其面积记为 u_1，它是圆面积的一个近似值. 再以这正六边形的每一边为底边，在弓形内作顶点在圆上的等腰三角形，得圆内接正十二边形(图 1-1). 设这六个等腰三角形的面积之和为 u_2，则圆内接正十二边形的面积为 u_1+u_2，它也是圆面积的一个近似值，其精确度比前面的好.

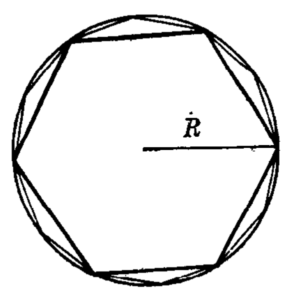

图　1-1

同样地，作十二个等腰三角形，得圆内接正二十四边形. 设这十二个等腰三角形的面积之和为

u_3, 则圆内接正二十四边形的面积为 $u_1+u_2+u_3$, 它也是圆面积的一个近似值,其精确度比前面两个都要好.

如此继续进行 n 次, 这个圆的面积近似地等于圆内接正 3×2^n 边形的面积

$$u_1+u_2+\cdots+u_n$$

n 越大,则精确度越好. 当 $n\to\infty$ 时, 和 $u_1+u_2+\cdots+u_n$ 的极限就是这个圆的面积. 也就是说, 圆面积 A 是无穷多个数累加的和, 即

$$A=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

把上面的具体问题抽象出来, 就得到无穷级数的定义如下:

定义 设已给序列 $\{u_n\}$:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots$$

则数学式子 $$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

叫做**无穷级数**,简称**级数**,记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \qquad (1\text{-}1)$$

其中第 n 项 u_n 叫做级数的**一般项**或**通项**. u_n 为常数的级数叫做**常数项级数**或**数项级数**; u_n 是函数的级数叫做**函数项级数**.

例如 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

都是数项级数. 又如

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx=\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx+\cdots$$

都是函数项级数.

本节与下一节,我们先讨论数项级数.

二、级数的收敛与发散

上面所给的级数定义,纯粹是形式上的定义. 它只指明级数是无穷多项累加. 但是,无穷多项怎么加? 是否有"和"? 联系到例1,我们可以从有限项的和出发,运用极限的方法来讨论无穷多项累加问题.

例2 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{10^n}=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots$$

这是以 $\frac{1}{10}$ 为公比的无穷等比级数. 仿例1, 分别取级数的1项, 2项, …, n 项, …作和:

$$S_1=\frac{3}{10}=0.3$$

$$S_2=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}=0.3+0.03=0.33$$

…………………………

$$S_n=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\cdots+\frac{3}{10^n}$$

$$=0.3+0.33+\cdots+0.\overbrace{00\cdots03}^{n\text{位}}$$

$$=0.\overbrace{33\cdots3}^{n\text{位}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

当 $n\to\infty$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0.33\cdots3\cdots = 0.\dot{3} = \frac{1}{3}$$

它反映了无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{10^n}$ 的无穷多项累加的结果，我们把极限值 $\frac{1}{3}$ 叫做级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{10^n}$ 的"和"。

一般地，对级数(1–1)，分别取它的 1 项，2 项，…，n 项，…的和，作出数列 $\{S_n\}$：

$$\begin{aligned}
&S_1 = u_1\\
&S_2 = u_1 + u_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{1-2}$$

这个数列的通项

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

称为级数 (1–1) 的前 n 项的**部分和**．而数列 (1–2) 称为级数(1–1)的**部分和数列**．这样，就可以把无穷多项求和的问题归结为求相应的部分和数列的极限问题．

定义 如果数列 (1–2) 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，则称级数(1–1)**收敛**．极限值 S 就称为级数(1–1)的**和**，记作

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

此时，称 $r_n = S - S_n$ 为级数(1–1)第 n 项以后的**余项**．如果数列(1–2)发散，即当 $n\to\infty$ 时，S_n 没有极限，则称级数(1–1)**发散**．发散的级数没有和．

例 3 判断级数

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

是否收敛？如果收敛，则求它的和.

解 由于级数的一般项 u_n 可写成

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

因此前 n 项的部分和为

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛，其和为 1.

例 4 证明调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

发散.

证 由不等式

$$x>\ln(1+x)^{①}\quad(x>0)$$

得前 n 项的部分和：

---

① 参见《高等数学(公共部分)》§ 3-3 例 3.

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$>\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)$$

$$+\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ln\frac{5}{4}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}$$

$$=\ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)$$

即 $$S_n>\ln(n+1)$$

当 $n\to\infty$ 时，$\ln(n+1)\to\infty$，从而 $S_n\to\infty$. 所以调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

例 5 讨论级数

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots$$

的敛散性，如果收敛，则求它的和.

解 此级数是一公比为 q 的等比级数(或几何级数)，首项 a 是一非零实数. 前 n 项的部分和

$$S_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

$$=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}\quad(q\neq1)$$

(1) 当 $|q|<1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，从而

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{1-q}$$

故级数收敛，其和 $S=\frac{a}{1-q}$.

(2) 当$|q|>1$时，由于$\lim\limits_{n\to\infty} q^n$不存在，从而$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$也不存在，故级数发散。

(3) 如果$|q|=1$. 当$q=1$时，$S_n=na\to\infty$，因此级数发散；当$q=-1$时，级数成为

$$a-a+a-a+\cdots$$

显然
$$S_n=\begin{cases} a, & n\text{为奇数} \\ 0, & n\text{为偶数} \end{cases}$$

从而S_n的极限不存在，级数也发散。

归纳起来，得到：当$|q|<1$时，等比级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$收敛，其和为$\dfrac{a}{1-q}$；当$|q|\geqslant 1$时，等比级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$发散。

三、收敛级数的简单性质

由于级数$\sum u_n$①的敛散性取决于相应的部分和数列$\{S_n\}$的敛散性，所以根据数列极限的运算性质，即得收敛级数的下列简单性质。

性质1 如果$\sum u_n=S$，C是任一常数，则$\sum Cu_n=CS$.

证 设级数$\sum u_n$的部分和数列为$\{S_n\}$，则$\sum Cu_n$的部分和数列为$\{CS_n\}$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$，故

$$\lim_{n\to\infty} CS_n=C\lim_{n\to\infty} S_n=CS$$

即$\sum Cu_n=CS$.

性质1指出，级数收敛时，常数C可从和号里面移到外面。

性质2 如果$\sum u_n=S_1$，$\sum v_n=S_2$，则

---

① 为书写方便起见，有时把级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$简写成$\sum u_n$.

$$\sum(u_n \pm v_n) = \sum u_n \pm \sum v_n = S_1 \pm S_2$$

性质 2 表明，两个收敛级数可以逐项相加或相减.

性质 3 在收敛级数中添入或去掉有限项后，级数仍收敛.

性质 2, 3, 请读者自己证明.

例 6 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2+(-1)^{n-1}}{3^n}\right)$ 是否收敛，如果收敛，则求其和.

解 由例 5 可得:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

根据收敛级数的性质 1, 2 可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2+(-1)^{n-1}}{3^n}\right)$ 也收敛，其和为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2+(-1)^{n-1}}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$$

$$= 2\times\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$$

性质 4（级数收敛的必要条件） 如果级数 $\sum u_n$ 收敛，则

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \tag{1-3}$$

证 由

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}+u_n=S_{n-1}+u_n$$

得
$$u_n=S_n-S_{n-1}$$

如果 $\sum u_n$ 收敛于 S，则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}=S$，从而有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} u_n&=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})\\&=\lim_{n\to\infty} S_n-\lim_{n\to\infty} S_{n-1}\\&=S-S=0\end{aligned}$$

由性质 4 可知，**如果通项不趋于零，则级数一定发散**．这个结论提供了判断级数发散的一种方法．例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2n-1}=1-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{2n-1}+\cdots$$

当 $n\to\infty$ 时，$u_n=(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2n-1}$ 不趋于零，因此这级数发散．

应当注意，(1-3)不是级数收敛的充分条件．也就是说，有些级数虽然满足(1-3)式，但它们是发散的．例如，例 4 中的调和级数，虽然

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

但它是发散的．

习　题　1-1

1．写出下列级数的前五项：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+n}{1+n^2}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$.

2. 写出下列级数的一般项:

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$;

(2) $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+\frac{1}{5\ln 5}+\cdots$;

(3) $-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{3}{6}+\cdots$;

(4) $1+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}+\cdots$;

(5) $\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{5}+\frac{a^4}{10}-\frac{a^5}{17}+\frac{a^6}{26}-\cdots$.

3. 根据级数收敛与发散的定义，判别下列级数的敛散性，如果收敛,求出其和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

4. 判别下列级数的敛散性,如果收敛,求出其和:

(1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$;

(2) $e-e^2+e^3-e^4+\cdots$ (e 是自然对数的底);

(3) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots$;

(4) $1+\ln 3+\ln^2 3+\ln^3 3+\cdots$;

(5) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\cdots$;

*(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{\pi}{n}$.

5. 求证：如果 $\sum u_n = S_1$，$\sum v_n = S_2$，则

$$\sum(u_n \pm v_n) = \sum u_n \pm \sum v_n = S_1 + S_2$$

*6. 求证：收敛级数添入或去掉有限项后，级数仍收敛。

7. 如果两个级数：

(1) 一个收敛，而另一个发散；

(2) 都发散，

则它们逐项相加后所得的级数是收敛还是发散？为什么？

§1-2 数项级数审敛法

对于数项级数，主要研究两个问题：级数是否收敛？如果收敛，其和是什么？显然，第一个问题更为重要，因为如果级数是发散的，那末第二个问题就不存在了．反之，如果级数是收敛的，那末即使其和尚未求得，我们也可以用部分和去逼近它，并且由于

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = 0$$

这种逼近可以达到任意的预定精确度．由此可见，判断级数的敛散性是一个重要问题．

判断级数的敛散性，可根据级数收敛与发散的定义考察 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$．但有时此极限很难求．因此需要建立判断级数敛散性的审敛法．下面，介绍两种数项级数及其最常用的审敛法．

一、正项级数的审敛法

如果级数的每一项都不是负数，即 $u_n \geqslant 0 (n=1, 2, \cdots)$，则称级数 $\sum u_n$ 为正项级数．

1．比较审敛法 设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 是两个正项级数，且

$$u_n \leqslant v_n \quad (n=1, 2, \cdots)$$

则：(1) 当 $\sum v_n$ 收敛时，$\sum u_n$ 也收敛；

(2) 当 $\sum u_n$ 发散时，$\sum v_n$ 也发散.

证 (1) 设 $\{S_n\}$、$\{G_n\}$ 分别为级数 $\sum u_n$、$\sum v_n$ 的部分和数列. 由于 $v_n \geqslant u_n \geqslant 0$，故 $\{S_n\}$，$\{G_n\}$ 是两个单调增数列，且 $S_n \leqslant G_n (n=1, 2, \cdots)$. 当 $\sum v_n$ 收敛，即

$$\lim_{n\to\infty} G_n = G$$

存在时，又有 $$G_n \leqslant G$$

从而 $$S_n \leqslant G_n \leqslant G$$

因此数列 $\{S_n\}$ 是单调有界数列. 根据数列极限存在的准则①，$\{S_n\}$ 必有极限. 这就证明了 $\sum u_n$ 是收敛的.

(2) 用反证法. 设 $\sum v_n$ 收敛，则由(1)可知，$\sum u_n$ 也收敛. 这与假设矛盾. 故 $\sum v_n$ 发散.

例 1 证明 p 级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

当 $p \leqslant 1$ 时发散；当 $p>1$ 时收敛.

证 当 $p \leqslant 1$ 时，

$$\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n} \quad (n=1, 2, \cdots)$$

因调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，故根据比较审敛法，p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散.

当 $p>1$ 时，将 p 级数写成：

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)$$

---

① 参见《高等数学(公共部分)》§1-5.

$$+\left(\frac{1}{8^p}+\frac{1}{9^p}+\cdots+\frac{1}{15^p}\right)+\cdots$$

容易看出，它的每一项都不超过级数

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}\right)+\cdots \tag{1-4}$$

的对应项．而级数(1-4)当 $p>1$ 时是收敛的等比级数

$$1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{2^{2(p-1)}}+\frac{1}{2^{3(p-1)}}+\cdots$$

所以，根据比较审敛法，当 $p>1$ 时，p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛．

例 2 用比较审敛法判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+2}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{5^n-3^n}$.

解 (1) 由于

$$\frac{1}{n^2+n+2}<\frac{1}{n^2}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

并且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ($p=2$ 的 p 级数)是收敛的，故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+2}$$

也收敛．

(2) 当 $x>0$ 时，有

$$x>\ln(1+x)$$

现取 x 为自然数 n，则有

$$n>\ln(1+n)\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

或
$$\frac{1}{n}<\frac{1}{\ln(n+1)}$$

因级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ 也发散.

(3) 因为
$$\frac{4^n}{5^n-3^n}=\frac{4^n}{5^n\left(1-\frac{3^n}{5^n}\right)}\leqslant\frac{4^n}{5^n\left(1-\frac{3}{5}\right)}=\frac{5}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$$
$$(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

并且几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ 收敛. 故根据收敛级数的性质 1，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ 收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{5^n-3^n}$ 也收敛.

由例 1, 2 看出，用比较审敛法来判断一个级数的敛散性，需要另选一个已知其敛散性的级数作为比较的“标准”. 通常，被作为比较“标准”的有 p 级数和几何级数等. 但也有一些级数很难与这两类级数比较，所以我们还需建立只依赖于级数本身的审敛法. 实用上很方便的有比值审敛法.

2. 比值审敛法 设正项级数 $\sum u_n\ (u_n>0)$ 满足
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho \tag{1-5}$$

则：(1) 当 $\rho<1$ 时，级数 $\sum u_n$ 收敛；

(2) 当 $\rho>1$ 时，级数 $\sum u_n$ 发散；

(3) 当 $\rho=1$ 时，级数 $\sum u_n$ 可能收敛也可能发散.

证 (1) 当 $\rho<1$ 时，选取 $\varepsilon>0$，使 $\rho+\varepsilon=r<1$. 因(1-5)式成立，根据极限定义，必存在一个正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，有
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon=r$$

即
$$u_{N+1}<ru_N$$