数值天气预报方法习题集

〔苏〕帕·尼·别洛夫编

SHU ZHI TIAN QI YU BAO FANG FA XI TI JI

气象出版社

数值天气预报方法
习题集

〔苏〕П. Н. 别洛夫编
王得民 译 朱永禔 校

气象出版社

内 容 简 介

本书是一本简明易懂、篇幅不多的实用手册。书中扼要地说明了各章节中的主要概念和方法，对应列出了习题和习题的解答方法和答案。本书既可供气象专业的师生使用，又可供我国广大的气象预报员在科研与业务工作中参考。

П. Н. Белов

СБОРНИК УПРАЖЕНИЙ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ ПРОГНОЗА ПОГОДЫ

ЛЕНИНГРАД ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ

1980

数值天气预报方法习题集

П. Н. 别洛夫

王得民译　朱永禔校

责任编辑：庞 小 琪

* * *

气象出版社出版

（北京西郊白石桥路46号）

中国科学技术情报研究所印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　全国各地新华书店经售

* * *

开本：787×1092 1/32　印张：7　字数：152千字

1986年6月第一版　1986年6月第一次印刷

印数：1—2,500

统一书号：13194·0331　定价：1.60元

译 者 的 话

近年来，我国各高等学校的气象系或气象专业普遍开设数值天气预报课程，国内数值天气预报方面的科研工作得到更广泛地开展，数值天气预报产品的应用问题已经摆在各级气象台站工作的业务人员面前。因此，不仅仅是大学生，而且还包括许多的科研和教学人员以及业务技术人员，都要求系统地学习数值天气预报的基本理论知识。前几年，国内虽已出版过数值天气预报方面的书藉，但迄今还未出版过一本用于辅助学习数值天气预报理论的习题集。苏联学者H. П. Белов所编的“数值天气预报方法习题集”，是一本简明易懂、篇幅不多的实用手册。在该书内扼要地说明各章节的主要概念和方法，然后列出习题和它的解法或答案。它既可供气象专业的师生使用，又可供我国广大的预报员在科研与业务工作中参考。

由于译者水平所限，译文中可能还存在许多缺点与错误，希读者批评指正。

本书译稿经上海台风研究所朱永禔副研究员审校。译者曾得到他的热情支持与帮助，在此向他致以衷心地感谢。

译者于1984年7月

作 者 的 话

根据作者对莫斯科大学地理系学生、苏联水文气象科学研究中心（苏联水文气象中心）和国立自然资源科学研究中心的青年专家们教学的经验，作者深信必须准备专门的教科书，以巩固他们的天气分析和预报的理论基础，并获得应用数值方法解决具体问题的实际技能。

作者认为在本题集中主要包括四个方面的内容：

1．基本方程及这些方程其它形式的推导或证明。

2．拟定解决所提问题的数学算法

3．在具备小型计算工具的条件下，根据初始资料计算问题中的各种参数和变量，并用各种单位制给出计算结果。

4．提出问题并应用电子计算机求解，编制程序和在电子计算机上进行计算，最后分析计算结果。

虽然习题集的各节中均引出解题所必需的基本知识，但我们仍考虑有些读者可能利用书末列出的主要教科书作为参考

题集中对大多数习题给出提示和答案，并对一些具有典型性的习题还给出解答过程。题集中部分习题需要用计算器，还有一些习题则要用电子计算机才能完成。

在解计算题时，建议先求出解析形式的通解，然后提出所得解析解的计算公式，即用最经济的方式进行大量计算的公式，并仅在最后才进行必要的计算。同时，建议应用基本单位制，即公制(SI)、物理制（CGS）和工业制（MTS）中的任意一种（参见附录1）。在气象学中至今还广泛地采

用非系统性单位表征的量（如毫巴[1]、卡等），在计算前应合理地将其化为系统制表征的量。

我们建议计算结果以 4 位（有时是 3 位）有效数字的标准形式来表示。当最后结果必须在气象上给予解释时，须用气象中采用的单位（例如速度用公里/小时，气压用毫巴等）回答。

第 5 节是和Л. В. Беркович合写的。作者对在许多习题解答的准备工作中给予帮助的Г. В. Мостовый、А.В. Блохин和А. Ю. Щербаков等表示感谢。

1）自1982年起，我国根据世界气象组织决定的精神，逐步过渡使用百帕以代替毫巴——校者注。

主要符号和常数

A——功热当量（0.2388 卡/焦耳 = 2.388×10^{-8}卡/尔格）；波的振幅

a——地球的平均半径（6371 公里）；绝对湿度；等温大气中的声速（330米/秒）

c——波的移速

c_p——空气的定压比热（1.007×10^3焦耳/千克·度 = 1.007×10^7尔格/克·度 = 0.2405 卡/克·度）

c_v——空气的定容比热（0.720焦耳/千克·度 = 0.720×10^7尔格/克·度 = 0.1719卡/克·度）

$c^2 = R^2T(\nu_a-\nu)/g$——静力稳定度参数

д——速度散度

D——水平速度散度

d——露点差

ε——单位体积的热流入量

$\vec{F}$——作用于单位质量上的力向量

F——半球内长波辐射通量

G——格林函数（影响函数）；长波辐射向下的通量

g——自由落体加速度（9.81米/秒^2）

$\nabla = grad$——梯度

H——乱流热通量；等压面高度

h——高度

$\vec{i}$——x轴方向上的单位向量

i ——虚数单位；x轴或空间上点的标号

J ——热功当量（4.187 焦耳/卡 = 4.187×10^7 尔格/卡）

$J(A,B)=(A,B)$——雅可比算符

$J_s(A,B)=(A,B)_s$——球面上的雅可比算符

$\vec{j}$ ——y轴方向上的单位向量

j ——y轴上点的标号

$\vec{k}$ ——垂直方向上的单位向量

k ——垂直方向上的乱流滞性系数；z轴上的 波 数；z轴或P轴上点的标号

k' ——水平面上的乱流滞性系数

L ——波长；水平特征尺度

$\mathscr{L}$ ——水的凝结热或蒸发热（25×10^5焦耳/千克 = 25×10^9尔格/克 = 597卡/克）

$l=2\omega\sin\varphi$ ——柯里奥利参数

M ——图的比例尺

m ——比例尺因子；x轴上的波数；相关函数值

N ——云量

n ——y轴上的波数

O ——数量级或特征值的符号

P ——海平面上的标准气压（1000毫巴）

P_n^m ——勒让德多项式

p ——气压；垂直方向的自变量

Q ——属性的通量；降水量

q ——空气的比湿

R ——干空气的比气体常数（287焦耳/千克·度 =

2.87×10^{6}尔格/克·度 = 287 米^2/秒·度 = 6.856×10^{-2}卡/克·度）；辐射平衡

R_n——水汽的比气体常数（462焦耳/千克·度 = 4.615×10^{6}尔格/克·度 = 1.102×10^{-1}卡/克·度）

$\vec{r}$——矢径

r——距离；相关系数

S——太阳的辐射通量；标准化的谱密度

s°——太阳常数（1382焦耳/米^2·秒 = 1382×10^{3}尔格/厘米^2·秒 = 1.98卡/厘米^2·分）

s——距离；谱密度；标号

T——绝对温度；波动的周期

T_d——用绝对温标表示的露点温度

$\vec{U}$——三维的速度向量

U——基本气流的速度；波动的振幅；长波辐射的向上通量

u——x轴上的速度分量

$\vec{V}$——水平风速的向量

V——速度的绝对值；波动的振幅

v——y轴上的速度分量

w——z轴上的速度分量

x——沿ox轴的笛卡儿水平坐标

y——沿oy轴的笛卡儿水平坐标

z——垂直的笛卡儿坐标

α——环流指数

$\beta=\frac{1}{a}\frac{dl}{dy}$——罗斯贝参数

γ ——垂直温度梯度

γ_a——干绝热温度梯度（$0.98\cdot10^{-2}$℃/米）

γ_{Ba}——湿绝热温度梯度

Δ ——平面上的拉普拉斯算子

Δ_s——球面上的拉普拉斯算子

δ ——差；平均绝对误差

ε ——伊·阿·基培尔的小参数；残差；相对误差

$\xi=p/P$——无量次的垂直坐标（P=常数）

Θ ——位温

$\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$——极角

κ ——定压比热与定容比热间的比值（1.4）；卡尔曼常数

λ ——波长；地理经度；热传导系数

μ ——标准化后协方差函数的值

ρ ——空气密度

σ ——斯忒藩-玻尔兹曼常数（$5.699\cdot10^{-8}$瓦特/米^2·度^4=5.699×10^{-5}尔格/厘米^2·秒·度^4=0.816×10^{-10}卡/厘米^2·度^4）；$\sigma=p/p_s$是无量次的垂直坐标（p_s——地面气压），均方差

$\tau=\frac{dp}{dt}$——类似于垂直速度

φ ——地理纬度；速度势

ψ ——流函数

$\vec{\Omega}$——速度涡度

Ω——速度涡度的垂直分量

ω——地转角速度（0.729×10^{-4}秒$^{-1}$）；圆频率

目　　录

一、用于大尺度大气运动数值预报的流体动力-热力学方程的变换

本节利用在局地笛卡儿坐标系中未考虑乱流粘性力的流体动力-热力学的原始方程组如下

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + lv \\ \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} - lu \\ \dfrac{dw}{dt} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} - g \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho u}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho v}{\partial y} + \dfrac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \\ p = R\rho T, \dfrac{dT}{dt} - \dfrac{\gamma_a}{g\rho}\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{1}{c_p\rho}\varepsilon \end{cases} \qquad (1.1)$$

在式中：u，v，w——x，y，z坐标轴上风向量$\vec{U}$的分量；p，ρ和T——相应为空气的压力、密度和温度；g——重力加速度；c_p——定压比热；R——比气体常数；γ_a——干绝热温度梯度；ε——单位体积的热流入量；$l = 2\omega\sin\varphi$——柯里奥利参数；ω——地转角速度。

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

对于研究大尺度的大气运动，可以利用大气准静力条件

下得出的等压面坐标系。在这种坐标系中流体动力-热力学方程组写成如下形式

$$
\begin{cases}
\dfrac{du}{dt} = -g\dfrac{\partial H}{\partial x} + lv \\
\dfrac{dv}{dt} = -g\dfrac{\partial H}{\partial y} - lu \\
T = -\dfrac{g}{R}p\dfrac{\partial H}{\partial p} \\
\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau}{\partial p} = 0 \\
\dfrac{\partial T}{\partial t} + u\dfrac{\partial T}{\partial x} + v\dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{c^2}{Rp}\tau + \dfrac{1}{c_p\rho}\varepsilon
\end{cases}
\tag{1.2}
$$

上式中：H——等压面高度；$c^2 = \dfrac{R^2T(\gamma_a - \gamma)}{g}$——静力稳定度参数；$\tau = \dfrac{dp}{dt}$——类似于垂直速度。

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \tau\frac{\partial}{\partial p}$$

方程组（1.2）称为完全的流体动力-热力学方程。

在许多情况下和p坐标同时运用的有ζ坐标和σ坐标。$\zeta = \dfrac{p}{P}$，这里的$P = 1000$毫巴——海平面上的标准气压。$\sigma = \dfrac{p}{p_s}$，这里$p_s(x, y, t)$——地面气压。

在解决不少问题时可利用球坐标、柱坐标和极坐标系。用多变量复合函数的微分规则，可以作出从这一坐标系到另一种坐标系的转变。

讨论四个自变量：x，y，z，t 的某种函数 Φ，即 $\Phi=\varphi(x,\ y,\ z,\ t)$。现引进新的坐标系：$x_1$、$y_1$、$z_1$、$t$，并设 $\Phi=f(x_1,\ y_1,\ z_1,\ t)$。这时用微分关系规则，原来的导数和新坐标系中的导数之间关系表示为如下形式

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial x} &= \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial t_1}\frac{\partial t_1}{\partial x}\\
\frac{\partial\Phi}{\partial y} &= \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial t_1}\frac{\partial t_1}{\partial y}\\
\frac{\partial\Phi}{\partial z} &= \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial z}+\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial z}+\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial z}+\frac{\partial\Phi}{\partial t_1}\frac{\partial t_1}{\partial z}\\
\frac{\partial\Phi}{\partial t} &= \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial t_1}\frac{\partial t_1}{\partial t}
\end{aligned}
\right.
\tag{1.3}
$$

从新坐标中的导数逆转换到原坐标中的导数可用表达式

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} &= \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} \\
&\quad + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_1} \\
\frac{\partial\Phi}{\partial y_1} &= \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y_1} \\
&\quad + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y_1} \\
\frac{\partial\Phi}{\partial z_1} &= \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z_1} \\
&\quad + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z_1} \\
\frac{\partial\Phi}{\partial t} &= \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t_1} \\
&\quad + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t}
\end{aligned}
\right.
\tag{1.4}
$$

有些方程常写成向量形式。例如，运动方程和连续方程写成形式

$$\frac{\partial \vec{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p - 2\vec{\omega}\times\vec{U} + \vec{g} \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{U}) = 0 \tag{1.6}$$

上式中：$\vec{U}$——速度向量，$\vec{\omega}$——地转角速度向量，g——重力加速度向量