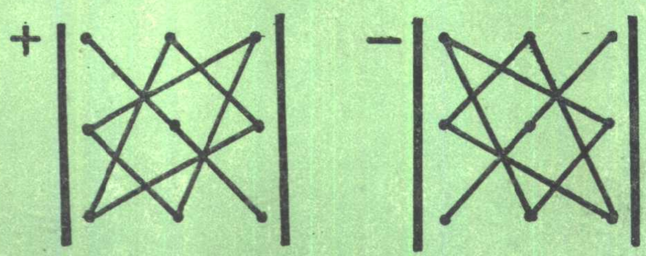
全国高等林业院校教材

高等数学

北京林业大学数学教研组编

（修订版）



林业专业用

中国林业出版社

全国高等林业院校教材

高 等 数 学

修 订 版

北京林业大学数学教研组 编

中 国 林 业 出 版 社

封面设计：星　池

编者　王绍颜
雷良楹
马宜中

全国高等林业院校教材

高　等　数　学

修订版

北京林业大学数学教研组　编

中国林业出版社出版（北京德内大街刘海胡同7号）

新华书店北京发行所发行　　农业出版社印刷厂印刷

787×1092毫米16开本　22印张　465千字

1986年6月第1版　1986年6月北京第1次印刷

印数　1—10,500册

统一书号 13046·1011　定价 3.70 元

前　言

由于从1981年起，高中的数学中增加了微积分中导数、微分、积分等部分内容，因此，高等院校数学课的内容也将相应作些调整，以适应新情况。据此，我们1978年所编的全国高等林业院校试用教材《高等数学》一书，已不能完全适应教学上的需要。

最近，我们参照中学数学教材，根据1980年8月教学大纲（试行草案），以1978年农业出版社出版的《高等数学》为基础，进行了较大的修改。修改的主要点有：

1. 加强基础理论，如极限、中值定理、级数等部分都充实了内容，有些定理作了证明，有些理论作了补充，如广义积分的收敛性判别。

2. 避免脱节和重复，在中学函数部分讲得比较详细，导数公式也都推导了，计算方法作了一定的训练，但是还有要求不够的地方。为了教材的系统性，都作了适当的处理，使不与中学教材脱节，又避免简单的重复。

3. 考虑林业专业的实际需要，特别是数理统计中常用的内容，尽可能编入，如最小二乘法，函数的线性化，Γ-（伽马）函数，β-（贝塔）函数等。

4. 增加了空间解析几何初步、二重积分方法两章，这是过去教材中没有的；补充了级数、微分方程二章的一些内容，使之符合大纲的要求。

5. 重写了线性代数部分。

其它内容也都作了不同程度的修改。

书中部分附有“*”号，可按实际情况讲授或删除，并不影响前后的衔接。每章末配有习题，供教学时选用。

北京师范大学数学系赵慈庚教授详细地审阅了全稿，提出了许多宝贵的意见，本校林业系关玉秀副教授、基础部符伍儒副教授也审阅了书稿，提出了一些有益的建议，对他们的热情帮助在此表示衷心的感谢。

本书主要由王绍颜教授编写，雷良榣副教授、马宜中讲师参加编写了部分内容，陈耀霞讲师绘图。由于编者思想水平、业务水平以及教学经验所限，尽管做了许多努力，其中一定仍存在不少欠妥之处，希望广大读者批评指正。

编者

1984年6月于北京

绪 言

人们为着要在自然界里得到自由，就要用自然科学来了解自然，认识自然和改造自然，从自然里得到自由。数学和其他自然科学一样，是人们争取自由的一种武器。

在中学学的代数，主要是研究数量关系，几何是研讨空间的形状和性质，三角学与解析几何则把数与形结合起来研究。现在要学习的高等数学，仍然是以数量关系和空间形式为研究对象。数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的一门科学。

数学的产生与发展依赖于人类的生产实践。正如恩格斯所说:“和其他一切科学一样，数学是从人的需要中产生的：是从丈量土地和测量容积，从计算时间和制造器皿产生的”。人们在生产实践中，由于计数的实际需要才产生了数的概念，继而又对自然数产生了简单的数的运算，由于测量的需要出现了分数及其运算方法。经过人们长期不断的知识积累，抽象概括，逐渐系统化而形成了算术、代数、几何、三角等初等数学。在 17 世纪以前，由于受当时社会生产力的局限性，人们对数学知识，基本上停留在所谓初等数学阶段，那时人们只研究事物相对静止的数量关系和简单的几何图形。到 16 世纪末，17 世纪初，欧洲资本主义兴起，机械工业的诞生、航海、造船、仪表、采矿等事业的迅速发展，对物理学、力学、天文学等自然科学提出了大量的急待解决的新问题，这些问题需要研究事物的运动与变化过程的数量关系，用初等数学的方法远远不够了，因而推动人们去寻找新的数学方法，于是逐渐产生了微分与积分。生产的发展为微积分的产生创造了客观条件，劳动人民的生产实践，为建立微积分的基本思想方法提供了丰富的源泉。那种认为数学的发展纯粹是个别天才数学家的自由创造，和生产实践无关的观点是错误的，唯心的。标志着数学飞跃发展的是笛卡尔把变数引进数学，使数学起了根本性的变革。恩格斯指出:“数学中的转折点是笛卡尔的变数，有了变数，微分和积分也就成为必要的了，而它们也就立刻产生。”经过人们长期的积累、充实提高和生产实践的检验，微积分已成为数学中的基础学科，是学习自然科学和应用技术不可少的基础。

自 19 世纪以来，工业、农业、科学技术都有新的发展，在科技、生产发展的同时，又出现许多的新问题，对数学提出更多的新要求，需要数学有更高度的抽象与概括，更多的方法来描述物质运动，使它在生产实践中有广泛的应用。现代数学中的许多分支，如微分方程、概率论与数理统计，计算数学等等也逐步发展起来。特别是随着现代电子学、自动控制、星际航行等的发展，数学也得到了进一步的发展。电子计算机的产生，已促使科学技术发生新的变革与突破，生物学中的数量化问题，都将使数学的发展引向新的境界。总之，数学的发生与发展依赖于生产实践，反之，由于数学的发展，在一定程度上又促进了

生产。这就是数学与生产实践的辩证关系。

数学是从生产实践中，经过人们抽象与概括而建立起来的系统的科学，它具有两个基本特点，一是它的高度的抽象性，一是它的应用的广泛性。任何科学都具有它本身的抽象特点，数学的抽象就在于它暂时撇开事物的具体内容，而单纯从事物的量的侧面去考察，量的特点是可以被测量，测量的结果就得出抽象的数，数学中所研讨的量是抽象的数量，是各种具体事物的量的概括。譬如 3 棵树加 5 棵树等于 8 棵树，3 个教室加 5 个教室是 8 个教室等等这类具体事实，得到一个抽象的式子 $3+5=8$，这只是一些最原始的数学概念，之后才是其它许多更为抽象的概念，如复数、函数、微分、积分，n 维空间等等，似乎它们已经失去了同生活的一切联系，以致感到“莫名其妙”，不能理解，然而这些抽象的东西，全都是从现实当中，从实际的应用中概括出来的，完全是可以理解的，可以掌握的。数学的应用是相当广泛的，这是由于量的关系普遍存在于各种物质形态和各种运动形式之中。我们几乎每时每刻在日常生活中，在生产活动中运用着最普通的数学概念和结论；在现代科学技术中也都离不开数学，没有现代数学，科学的进步，技术的发展都是困难的。数学的抽象性与应用的广泛性是辩证统一的，正是由于它的抽象性，才能广泛地应用到各种问题中去，也正是由于它能广泛地应用，数学的抽象才具有现实意义，才能发展提高。

数学是一门基础科学，它已经越来越多地渗透到各个领域，成为各种科学技术、生产建设、日常生活所不可缺少的有力武器。对于林业科学来说，许多林学特征要通过数量关系来反映，譬如树高、胸径、材积、蓄积量等等，对它们之间的关系需要通过数量的分析，才能有较深入的了解，掌握其规律性。在现代林业科学技术的研究、生产中，应用数学的范围就更广泛了。如森林资源清查、经营管理、规划设计、采伐利用等都需用到数学；植物的数量分类方法、数量遗传、森林生态等等许多生物数学的分支学科，如雨后春笋般地涌现出来，这些新学科都需要较多的数学。所以学习数学在林业科学中是很必要的。随着社会的进步，科学的发展，数学在林业上的应用也将越来越多，越来越广。

目　　录

第一章　函　　数

微积分是可以解决现实中的运动现象的。运动中包含着两个或多个因素，这些因素不是孤立地变化，而是相互联系、相互依赖遵循一定的规律变化着，因此就需要有方法把所要讨论的运动现象用变量表示出来，以便研究运动规律和其他种种性质。表示变化现象的数学方法就是函数。因此函数是微积分中研究的主要对象。函数在中学里已讲过许多内容。在这一章里只简略复习和作些补充。

§1.1　函数的概念

中学里的初等数学是研究常量的数学，它只能反映相对不变的现象，但是现实世界的事物，变是绝对的，不变是相对的。一个事物在大的过程中是变的，在很小的过程中可视作不变，如在大区间里的一条曲线，在很小区间可视作直线。微积分是研究变量的数学，对实际中的问题进行研究，就可引出函数的概念。

定义　设 x、y 为同一变化过程中的两个变量，如果 x 在其变域 D 内每取任一个值，而 y 按一定规则 f 有唯一确定的值与之对应，就说 y 是 x 的函数。x 叫做函数的自变量，y 叫做因变量，自变量 x 取值范围 D 叫做函数的定义域，因变量 y 所有值的全体叫做函数的值域，这个对应律 f 叫做函数。这种对应关系常用记号

$$y=f(x),\quad x\in D$$

表示。

在这里要注意：

①因变量对于自变量的依从关系，叫做函数关系，函数关系未必都能用公式表示出来，可能是表格，也可能是图象。

②数学里讨论函数着重在抽象的依从关系，而不一定考虑这函数反映什么具体实质。也就是往往不管自变量与因变量所代表的现实意义是什么，因此，在一个函数里代表自变量与因变量的字母是无关紧要的。

③函数含有两要素：定义域和对应律，两者缺一就无意义。所谓函数 $y=f(x)$ 给定，是指定义域和对应律都已指定。

④定义中要求对于每一个 $x\in D$，都有一个唯一的 y 值与之对应，这函数称为单值函数；如果取消了唯一性的限制就叫做多值函数。今后如不特别说明，所遇到的函数都是指单值函数。

一般说来函数的表达法有三种：

（1）公式法；

（2）表格法；

（3）图示法。

要注意：用公式表示函数时，不一定用一个公式给出，有时自变量在不同的小范围内变化，要用不同的式子表示一个函数。例如，一汽车以20km/h的速度自A地开出，行驶3 h到达B地，休息0.5 h后，以25km/h的速度继续行驶2 h到达目的地。汽车在时刻t与A地的距离有函数关系：

$$s(t)=\begin{cases}20t, & \text{当}0<t<3;\\ 60, & \text{当}3\leqslant t\leqslant 3.5;\\ 60+25(t-3.5), & \text{当}3.5<t\leqslant 5.5.\end{cases}$$

又如一个特殊的函数：

$$\operatorname{sgn}x=f(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x>0;\\ 0, & \text{当}x=0;\\ -1, & \text{当}x<0.\end{cases}\qquad (\text{图}1.1),$$

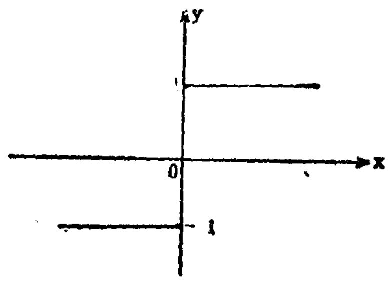


图 1.1

象这样的函数，在不同的范围内用不同的式子分段表示的，叫做分段函数。不要认为这是几个函数。

同时也要注意并不是任何函数都能用图形表示。如

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{是有理数};\\ 0, & \text{当}x\text{是无理数}.\end{cases}$$

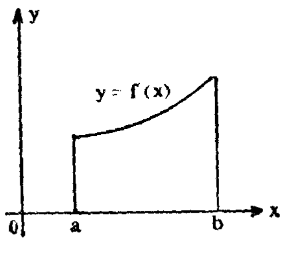
就不能用图形表示。

§1.2　函数性态的简单研究

1. 函数的单调性

函数$y=f(x)$的值一般总是随着x而变的，它可能随x增大而增大，也可能随x增大而减少。因此有

定义　函数$f(x)$在区间(a,b)内的值随x增大而增大，即对于(a,b)内任意两点x_1及x_2，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数$f(x)$在区间(a,b)内为单调增加的；如果$f(x)$在区间(a,b)内的值随x增大而减小，即对于(a,b)内任意两点x_1及x_2，当$x_1<x_2$时，而有$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数$f(x)$在区间(a,b)内为单调减少的。这两者的图形一是沿横轴向上升如图1.2(a)，一是沿横轴向下降如图1.2(b)。在整个区间为单调增加或单调减少的函数叫做单调函数。



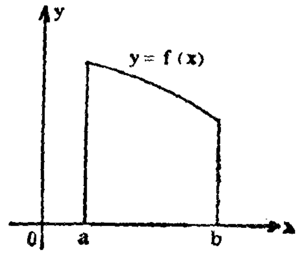


图 1.2

2. 函数的奇偶性

定义 设有函数$f(x)$，如果对于定义域内的一切x合于关系

$$f(-x)=f(x),$$

便说$f(x)$是偶函数；如果合于关系

$$f(-x)=-f(x),$$

便说$f(x)$是奇函数。

偶函数的图形关于y轴对称，奇函数的图形关于原点对称。要注意，偶奇函数的定义域一定是对于原点对称的，即$(-a,a)$或$(-\infty,+\infty)$。

例如，$y=ax^2$（a常数），$y=\cos x$都是偶函数；$y=x^3$，$y=\sin x$都是奇函数。

3. 函数的周期性

定义 设$f(x)$对于x的任意值都有定义的函数，若x加上一常数$l(\neq 0)$，能适合关系

$$f(x+l)=f(x),$$

便说$f(x)$是周期函数，而l叫做周期。

根据定义，如果$f(x)$以l为周期，则

$$f(x)=f(x+l)=f(x+2l)=\cdots=f(x+nl)=\cdots,$$
$$f(x)=f(x-l)=f(x-2l)=\cdots=f(x-nl)=\cdots.$$

其中n为整数，于是$f(x)$有无限多个周期，我们说的周期是指最小正周期。

例如，$\sin x,\cos x$是以2π为周期的函数，$\mathrm{tg}x$、$\mathrm{ctg}x$是以π为周期的函数。

要注意，周期函数在区间$[a,a+l]$上的图形和在区间$[a+nl,a+(n+1)l]$上的图形相同。

例 求函数$f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$的周期。

解 设所求周期为l，由于

$$f(t+l)=A\sin[\omega(t+l)+\varphi]=A\sin[(\omega t+\varphi)+\omega l],$$

要使$f(t+l)=f(t)$成立，即要使$A\sin[(\omega t+\varphi)+\omega l]=A\sin(\omega t+\varphi)$成立，

只需$\omega l = 2n\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$成立，

$$l = \frac{2n\pi}{\omega} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

故最小正周期

$$l = \frac{2\pi}{\omega}.$$

所以$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$是以$\frac{2\pi}{\omega}$为周期的周期函数。

4.函数的有界性、无界性

定义　如果存在一个正数M，对于函数$f(x)$的定义域内一切x值，使

$$|f(x)| < M$$

成立，便说$f(x)$是有界函数。M称为$f(x)$的上界，$-M$为下界。如果这样的M不存在，便说$f(x)$是无界函数，或如果函数的图形介于两平行线$y = \pm M$之间，函数是有界的，否则便是无界的。

例如，函数$y = \sin x$，$y = \cos x$是有界的，其图形介于直线$y = \pm 1$之间。

函数$y = \frac{1}{x}$在$(-\delta, 0)$与$(0, \delta)$都是无界的，但在任何不包含原点的闭区间$[a, b]$上是有界的，其图象如图1.3所示。

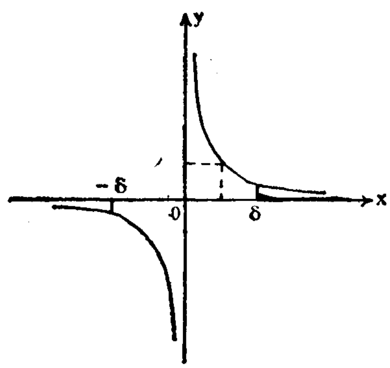


图 1.3

§1.3　复合函数与反函数

1.复合函数

函数的结构是由法则来决定，如计算函数值必须经过运算过程，即函数$f(x)$是怎样组成的，计算过程的繁简决定了函数的繁简。知道了$y = f(x)$，我们可以借用另一变量u使它在y与x间起联系作用，把y随x而定的关系，化成y随u，u又随x而定的两种关系，即用两种比较简单的函数关系替代原有的函数关系。于是一个函数可看作由几个比较简单的函数复合而成。

定义　设y为变量u的函数，即

$$y = f(u),$$

并设变量u为自变量x的某一函数，即

$$u = \varphi(x),$$

并且与 x 对应的 u 的值域在 $y=f(u)$ 的定义域内，则 y 为 x 的函数，即

$$y=f[\varphi(x)],$$

我们称 y 为自变量 x 的复合函数，u 叫做中间变量，x 叫做独立变量。函数 φ 叫做内函数，函数 f 叫做外函数。

例 1．函数 $y=\log_a(x^2+1)$ 是由两个简单函数

$$y=\log_a u,\ u=x^2+1$$

复合而成。

例 2．简谐振动 $y=f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$ 是由简单函数

$$y=A\sin u,\quad u=\omega t+\varphi$$

复合而成。

例 3．函数 $y=\sin\log_a(x+1)$ 是由三个简单函数

$$y=\sin u,\quad u=\log_a v,\quad v=x+1$$

复合而成。

2. 反函数

在研究变量 x 和 y 之间的函数关系时，根据问题的情况可选定自变量为 x 或 y。

定义 在认定 y 为 x 的单调连续函数 $y=f(x)$ 后，如果用 $y=f(x)$ 的对应律把 y 看作自变量，x 看作因变量而确定的函数

$$x=\varphi(y)$$

叫做 $f(x)$ 的反函数，相对的把 $f(x)$ 叫做直接函数。

这里要注意：

①反函数 $x=\varphi(y)$ 的对应律是由直接函数 $y=f(x)$ 的对应律而确定的；

②$f(x)$ 为单调函数，则它的定义域是反函数 $\varphi(y)$ 值域，$f(x)$ 值域是 $\varphi(y)$ 的定义域；

③如 $y=f(x)$ 在区间不是单调函数，它有许多反函数，也可能没有反函数，如 $f(x)=[x]$. $[x]$ 表示 x 的最大整数部分，如当 $x=3.24$ 时，$y=[3.24]=3$；当 $x=-2.87$ 时，$y=[-2.87]=-3$

显然，由定义可直接推出：

$$y=f[\varphi(y)],\quad x=\varphi[f(x)]$$

其中 $f(\quad)$，$\varphi(\quad)$ 各表示正反运算。

这就是说，把两个互为反函数的运算先后施行到任一个量的时候，该量不变，即两个互为反运算彼此抵消。

$y=f(x)$ 的图象同它的反函数 $x=\varphi(y)$ 的图象在同一坐标系 xoy 中是一致的。但是直接函数的 x 就是 x 轴上的点表示自变量值，y 轴上的点表示因变量的值；相反，反函数自变量为 y，就是 y 轴表示自变量值，x 轴表示因变量的值。

讨论函数的习惯，都是用 x 作为自变量，用 y 作为因变量，前面所说的 $y=f(x)$ 的反

函数 $x=\varphi(y)$ 与习惯不合，但反函数的实质在于它所表示的对应律中，用什么字母来表示反函数中自变量与因变量是无关紧要的，因此，把反函数 $x=\varphi(y)$ 里的 x 与 y 对调过来改作

$$y=\varphi(x),$$

然后就说这是 $y=f(x)$ 的反函数。为区别起见，我们分别称 $x=\varphi(y)$ 和 $y=\varphi(x)$ 为 $y=f(x)$ 的本义反函数和矫形反函数。

本义反函数 $x=\varphi(y)$ 的图象上有一点 (a,b)，矫形反函数 $y=\varphi(x)$ 必有一点 (b,a)，这两点关于直线 $y=x$ 对称(图1.4)。由此可断定，矫形反函数 $y=\varphi(x)$ 的图象与本义反函数 $x=\varphi(y)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称。也就是反函数 $y=\varphi(x)$ 的图象与直接函数 $y=f(x)$ 的图象关于第一、第三两象限的角平分线对称（图1.5）。

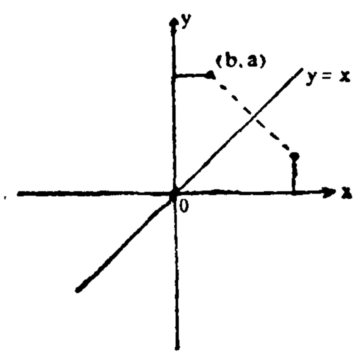


图 1.4

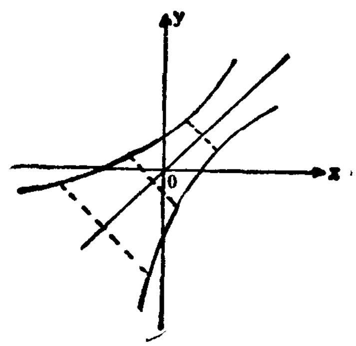


图 1.5

例 1．函数 $y=x+1$ 与 $x=y-1$ 互为反函数。

例 2．函数 $y=x^2$ 与 $x=\sqrt{y}$ 及 $x=-\sqrt{y}$ 不互为反函数，这是因为 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不是单调函数。因为 $y=x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$；而 $x=\sqrt{y}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$，$x=-\sqrt{y}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,0)$。不符合定义，所以不互为反函数。

若将 $y=x^2$ 的定义域规定如下，即区别单调区间如下：

$y=x^2$ 的定义域若为 $[0,+\infty)$ 是单调函数，值域为 $[0,+\infty)$ 与 $x=\sqrt{y}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$，则 $y=x^2$ 与 $x=\sqrt{y}$ 互为反函数。

$y=x^2$ 的定义域若为 $(-\infty,0]$ 是单调函数，值域为 $[0,+\infty)$ 与 $x=-\sqrt{y}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,0]$，则 $y=x^2$ 与 $x=-\sqrt{y}$ 互为反函数。

§ 1.4 基本初等函数

我们遇到的函数是各式各样的，虽然如此，而一些复杂的函数是由某些较简单的几类

函数组成。如果掌握了这些函数的特性，则对那些复杂的函数就便于理解。因此必须对那些常见函数的性质要特别熟练的掌握，我们选出几类简单的函数做基础称这为基本初等函数。这些函数的基本性质和图形在中学里已讲过，现在只列出基本初等函数的定义和图象以便备用。

（1）幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 为任何实数），如图 1.6, 1.7, 1.8；

（2）指数函数 $y=a^{x}$（$a>0$ 且 $\neq 1$），$y=e^{x}$，如图 1.9；

（3）对数函数 $y=\log_{a}x$（$a>0$ 且 $\neq 1$），$y=\ln x$，如图 1.10；

（4）三角函数 $y=\sin x$，如图 1.11，

$y=\cos x$，如图 1.12，

$y=\mathrm{tg}x$，如图 1.13，

$y=\mathrm{ctg}x$，如图 1.14；

（5）反三角函数 $y=\arcsin x$，如图 1.15，

$y=\arccos x$，如图 1.16，

$y=\mathrm{arctg}x$，如图 1.17，

$y=\mathrm{arcctg}x$，如图 1.18。

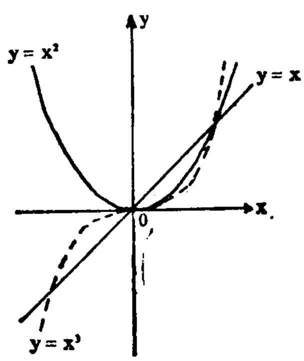


图 1.6

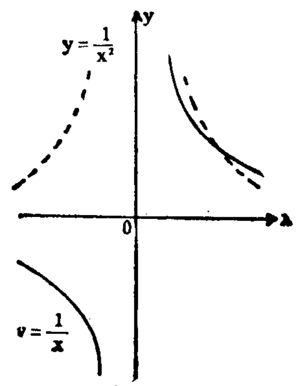


图 1.7

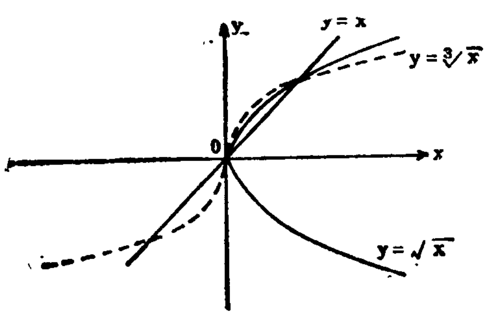


图1.8

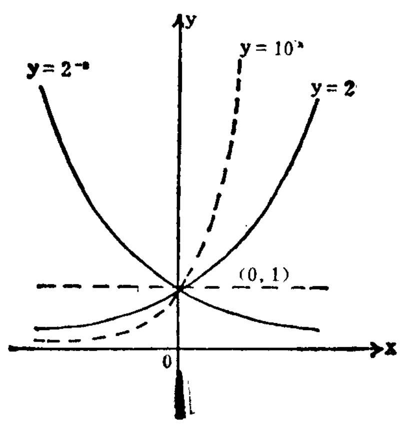


图 1.9

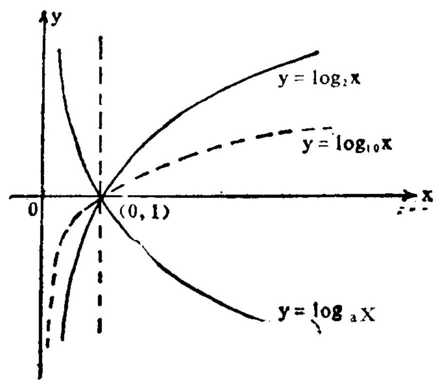


图 1.10

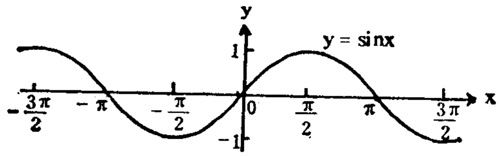


图 1.11

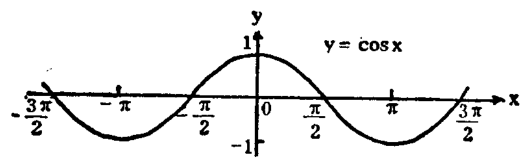


图 1.12

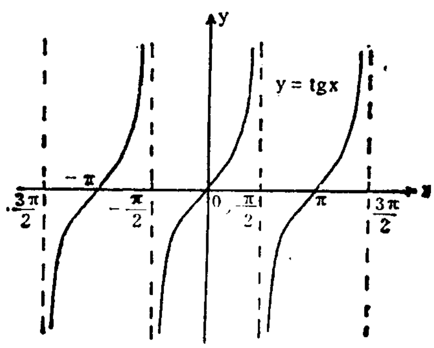


图 1.13

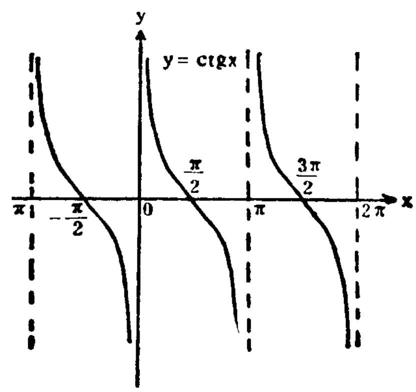


图 1.14

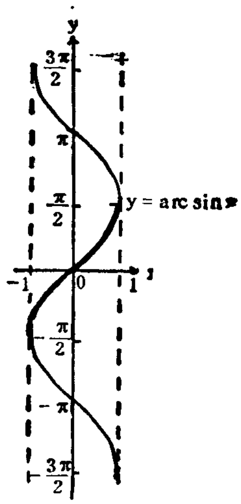


图 1.15

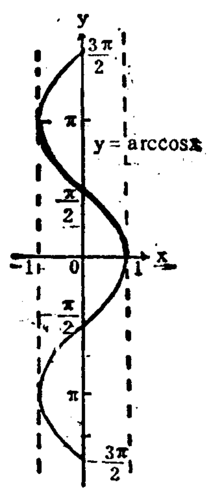


图 1.16