高等数学学习与考试指导

(含线性代数和概率统计)

主　编：赵　凯
副主编：于乃福　孙同森　等

地质出版社

高等数学学习与考试指导

（含线性代数和概率统计）

主　编　赵　凯
副主编　（以姓氏笔划为序）
于乃福　王春杰　许　成　孙同森
刘朝杰　宫佩珊　郭晓沛

地 质 出 版 社
· 北 京 ·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习与考试指导/赵凯主编.-北京:地质出版社,1999.7
ISBN 7-116-02846-3

Ⅰ.高… Ⅱ.①赵… Ⅲ.高等数学-高等学校-数学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第30340号

地质出版社出版发行
(100083 北京海淀区学院路29号)
责任编辑:陈军中 江 橙 王永奉
责任校对:李 玫 田建茹
*
北京朝阳区小红门印刷厂印刷 新华书店总店科技发行所经销
开本:787×1092 1/16 印张:21 字数:499000
1999年7月北京第一版·1999年7月北京第一次印刷
印数:1—5000册 定价:23.80元
ISBN 7-116-02846-3
O·15

(凡购买地质出版社的图书,如有缺页、倒页、脱页者,本社发行处负责调换)

前　　言

高等数学是理工科以及经济类学生的重要基础课。本课程的目的是使学生系统地掌握高等数学的基本概念、基本理论、基本方法和基本技巧，重点培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想像能力、运算能力和综合运用所学知识进行分析和解决问题的能力，并为后继课程的学习和以后的工作、科研打下坚实的基础。

在高等数学的学习中，学生往往会遇到这样或那样的问题及困难，因此影响本门课程的学习效果，继而影响其它后续课程的学习。

针对学生所遇到的问题和高等数学的特点，我们组织几位多年从事本课程教学且有丰富经验的老师编写了这本教学参考书，目的是使读者在学习高等数学时有较好的学习方法和技巧，以及清晰的解题思路，达到理想的学习效果。同时，本书也针对硕士研究生数学考试大纲，加进了相关的内容和题目，以使准备报考硕士研究生的读者能系统地复习。

本书共分四篇，第一篇和第二篇是高等数学内容，第三篇是线性代数内容，第四篇是概率论与数理统计内容。每一章都给出了学习要求、主要内容、典型例题和练习题，每一篇后都给出了综合测试题及分析解答。考虑到经济类的读者，书中以附录的形式给出了导数在经济中的应用以及差分方程初步的内容。书的最后是练习题的参考答案。

本书由赵凯任主编，副主编有：于乃福、王春杰、许成、孙同森、刘朝杰、宫佩珊、郭晓沛。第一篇的第一章、第二章、第三章和综合测试题及分析解答由赵凯编写；第一篇的第四章以及第二篇的第五章、第八章由刘朝杰编写；第二篇的第六章由于乃福编写；第二篇的第七章、综合测试题及分析解答以及两个附录由许成编写；第三篇的第一章、第二章、第三章和综合测试题及分析解答由王春杰编写；第三篇的第四章、第五章和第六章由孙同森编写；第四篇的第一章、第二章、第三章、第六章、第七章和第八章由郭晓沛编写；第四篇的第四章、第五章和综合测试题及分析解答由宫佩珊编写。全书由赵凯统稿、定稿。

田志远和山其骞两位教授审阅了全书，提出了一些宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

本书的读者对象是大学一、二年级的学生，自学者，报考研究生者以及讲授高等数学的教师和科技工作者。

由于水平所限，难免有错误和不妥之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

1998 年 10 月

第一篇　高 等 数 学(上)

第一章　函数、极限、连续

要　　求

理解函数的概念，掌握函数的表示法. 了解函数的奇偶性，单调性，周期性和有界性. 理解复合函数的概念. 了解反函数及隐函数的概念. 掌握基本初等函数的性质及其图形. 会建立简单应用问题中的函数关系式. 理解极限的概念. 理解函数左右极限的概念以及极限存在与左右极限之间的关系. 掌握极限的性质及四则运算法则. 掌握极限存在的两个准则(夹逼准则和单调有界准则)，并会利用它们求极限. 掌握利用两个重要极限求极限的方法. 理解无穷小，无穷大和无穷小的阶的概念；会用等价无穷小求极限. 理解函数连续性的概念，会判断函数间断点及其类型. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质，并会应用这些性质.

主 要 内 容

一、函数的概念及性质

1. 定义

设 x,y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的函数. 记作 $y=f(x)$. D 称为定义域，$W=\{y:y=f(x),x\in D\}$ 称为值域.

确定一个函数的主要因素是：定义域和对应法则.

函数的表示法主要有：分析法(公式法)，图示法和表格法.

2. 函数的特性

有界性：$\exists M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M,x\in D$.

单调性：区间 I 属于定义域 D，对于 $\forall x_1,x_2\in I$，若当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增；若当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调减.

奇偶性：设函数的定义域 D 关于原点对称，若恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；若恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

周期性：$\exists T\neq 0$，使得 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数.

3. 反函数、复合函数与初等函数

函数 $y=f(x),x\in D$,若把 y 看成自变量,x 看成因变量,还是一个函数,则就得到 $y=f(x)$的反函数$x=\varphi(y)$,通常记为 $y=\varphi(x)$. $y=f(x)$和 $y=\varphi(x)$的图形是关于直线 $y=x$ 对称的.

设 $y=f(u),u=\varphi(x)$,且前一函数的定义域和后一函数的值域之交非空,则可以构成复合函数 $y=f(\varphi(x))$.

基本初等函数包括:幂函数,指数函数,对数函数,三角函数和反三角函数.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的可以用一个式子表示的函数称为初等函数.

二、极限

1. 数列的极限

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 用"$\varepsilon-N$"语言表述是:$\forall\varepsilon>0$,$\exists$ N(自然数),使当 $n>N$ 时,恒有$|x_n-a|<\varepsilon$ 成立.

如果数列$\{x_n\}$是收敛的,则其极限值是唯一的;收敛数列$\{x_n\}$是有界的;收敛数列$\{x_n\}$的任一子数列$\{x_{n_k}\}$与$\{x_n\}$有相同的极限.

2. 函数的极限

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 用"$\varepsilon-\delta$"语言表述是:$\forall\varepsilon>0$,$\exists$ $\delta>0$,使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 可以表述为:$\forall\varepsilon>0$,$\exists X>0$,使当$|x|>X$ 时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

$x\to x_0$ 时函数的极限存在与否,与函数在 x_0 点的定义无关.

极限存在的充要条件是左极限和右极限都存在且相等.

3. 极限的运算法则

(1)$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\lim\alpha(x)=0$,(同一极限过程).

(2)有限个无穷小之和还是无穷小.

(3)有界函数与无穷小之积还是无穷小.

(4)设 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,则(同一极限过程)

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$$
$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$$
$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B},(B\neq0).$$

(5)若$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a,\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$

(6)若 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$,且$\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$存在,则$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$,(同一极限过程).

4. 极限存在准则

夹逼定理:若 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$,且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

单调有界准则:单调增的数列若有上界,则数列的极限存在;单调减的数列若有下界,则数列的极限存在.

两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$.

三、函数的连续性

1. 函数的连续与间断

函数 $f(x)$ 在 x_0 连续的"$\varepsilon-\delta$"语言表述是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

连续的三个条件：(1)函数在 x_0 有定义；(2)极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；(3)极限值等于函数值，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

函数不连续的点称为间断点，间断点是：(1)无定义的点；(2)虽有定义但极限不存在的点；(3)虽有定义，极限也存在，但极限值不等于函数值的点.

第一类间断点：左极限和右极限都存在的间断点；第二类间断点：非第一类的间断点。可去间断点：极限存在的间断点.

函数在 x_0 连续的充要条件是：函数在 x_0 左连续也右连续.

基本初等函数在其定义域内是连续的，一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，且 $y=f(u)$ 在 a 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x))=f(a)$

2. 闭区间上连续函数的性质

在闭区间上连续的函数，在该区间上一定取得最大值和最小值.

在闭区间上连续的函数，在该区间上一定有界.

在闭区间上连续的函数，至少取得介于此区间上最大值和最小值之间的任何值各一次.

若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

典 型 例 题

一、函数的概念与性质

对于函数的概念与性质部分，主要是求函数的定义域，弄清函数的几个特性，利用函数的特性求解一些问题，一般是紧扣定义进行.

例1　已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f(\varphi(x))=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$.

解　由题设知 $\mathrm{e}^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，所以 $[\varphi(x)]^2=\ln(1-x)$.
又因为 $\varphi(x)\geqslant 0$，所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，$x\leqslant 0$.

例2　求函数 $f(x)=\frac{1}{a^x-1}+|x|\operatorname{sgn}x+\frac{1}{2}$ 的定义域；问函数是奇函数，偶函数，还是非奇非偶函数？

解　定义域显然是 $x\neq 0$. 因为有

$$f(-x)=\frac{1}{a^{-x}-1}+|-x|\operatorname{sgn}(-x)+\frac{1}{2}=\frac{a^x}{1-a^x}-|x|\operatorname{sgn}x+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{a^x-1+1}{1-a^x}+\frac{1}{2}-|x|\operatorname{sgn}x=-\frac{1}{a^x-1}-|x|\operatorname{sgn}x-\frac{1}{2}=-f(x)$$

所以 $f(x)$是奇函数.

例 3 设 $f(x)$和 $g(x)$在区间(a,b)内是单调增加的,证明 $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$和 $\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$在区间$(a,b)$内也是单调增加的.

证 对于$\forall x_1,x_2\in(a,b)$,且 $x_1<x_2$,则 $f(x_1)<f(x_2)$,$g(x_1)<g(x_2)$,从而

$$\max\{f(x_2),g(x_2)\}>f(x_1),\max\{f(x_2),g(x_2)\}>g(x_1)$$

所以
$$\max\{f(x_2),g(x_2)\}>\max\{f(x_1),g(x_1)\}$$

即 $\varphi(x_2)>\varphi(x_1)$,因此 $\varphi(x)$是单调增加的.

同时也有
$$\min\{f(x_1),g(x_1)\}<f(x_2),\min\{f(x_1),g(x_1)\}<g(x_2)$$

所以
$$\min\{f(x_1),g(x_1)\}<\min\{f(x_2),g(x_2)\}$$

此即 $\psi(x_1)<\psi(x_2)$,所以 $\psi(x)$也是单调增加的.

例 4 若函数 $y=f(x)$,$(-\infty<x<+\infty)$的图形关于两条竖直线 $x=a$ 和 $x=b(a<b)$对称,证明 $f(x)$为周期函数.

分析 利用对称性,考虑周期函数的定义.

证 由于函数 $y=f(x)$的图形关于 $x=a$ 和 $x=b$ 对称,所以有

$$f(a+x)=f(a-x),f(b+x)=f(b-x)$$

从而
$$\begin{aligned}f(x)&=f(a-(a-x))=f(a+(a-x))=f(2a-x)\\&=f(b-(b+x-2a))=f(b+(b+x-2a))=f(x+2(b-a))\end{aligned}$$

所以 $f(x)$是以 $2(b-a)$为周期的周期函数.

二、极限的概念

做这部分的题目,应对极限的几个概念真正清楚,准确理解极限的真正含义.用定义证明极限时要清楚其每步的意义,推理要严密,逻辑性要强,充分理解和掌握推导中的放大和缩小的技巧.避免出现逻辑混乱和用法不当的技术,这方面一定要特别注意.

例 5 判断下列结论的正确性:

(1)当 n 越来越大时,$|x_n-a|$越来越小,则数列$\{x_n\}$必以 a 为极限.

(2)$\forall\varepsilon>0$,$\exists N$,使得当 $n>N$ 时,总有无穷多个$\{x_n\}$满足$|x_n-a|<\varepsilon$,则数列$\{x_n\}$必以 a 为极限.

(3)$\forall\varepsilon>0$,数列$\{x_n\}$中仅有有限项不满足$|x_n-a|<\varepsilon$,则数列$\{x_n\}$必以 a 为极限.

(4)若$\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=0$,则必有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 或者$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$.

解 (1)错误.极限的接近程度不是越来越小所能表达的,它是一个充分小的概念,是要多小就多小.例如 $x_n=1+\dfrac{1}{n}$,$a=0$,则$|x_n-a|=1+\dfrac{1}{n}$,当 n 越来越大时,$|x_n-a|$确实是越来越小,但显然数列$\{x_n\}$不以 $a=0$ 为极限.

(2)错误.极限的定义是:对$\forall\varepsilon>0$,$\exists N$,使得当 $n>N$ 时的一切 x_n 都有$|x_n-a|<\varepsilon$ 成立,不是有无穷多个 x_n 成立就可以了.例如:$x_n=(-1)^n$,则对于 $a=1$,所有的偶数指标的项 x_{2n} 都有$|x_{2n}-a|=0<\varepsilon$ 成立,但显然数列$\{x_n\}$的极限不存在.

(3)正确.对于$\forall\varepsilon>0$,设数列$\{x_n\}$中有限项不满足$|x_n-a|<\varepsilon$ 的最大指标是 N,则当 $n>N$ 时总有$|x_n-a|<\varepsilon$ 成立,此即满足了极限的定义,故数列$\{x_n\}$以 a 为极限.

(4)错误.例如 $x_n=(-1)^n+1$,$y_n=(-1)^n-1$,则显然$\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=0$,但是$\{x_n\}$和$\{y_n\}$均

不收敛.

例 6 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}=\dfrac{3}{2}$.

分析 这类用极限定义证明极限的题目必须逻辑清楚,推理严谨,格式准确. 对于数列的极限,就是对任意给定的 $\varepsilon>0$,去找一个自然数 N,使得从这一项后(当 $n>N$ 时)的一切 x_n 均有不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立. 这个 N 怎样去找呢?一般来说是解不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$,得到 n 大于一个有关 ε 的式子 $\varphi(\varepsilon)$,则令 $N=[\varphi(\varepsilon)]$(取整)即可. 但有时 n 是不易求得的,这需要利用一些技巧,比如求另一放大的不等式 $|y_n|<\varepsilon$ 的解,同时因 $|x_n-a|\leqslant|y_n|$,则当 $|y_n|<\varepsilon$ 成立时,显然有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立. 这是一个相当有效的常用方法,一般情况下,有时要对 n 进行一定的限制,如 $n>N_1$,从而在后面假设 N 时必须考虑在内,如设 $N=\max\{[\varphi(\varepsilon)],N_1\}$. 在函数的极限中也有类似的方法和技术. 就本题而言,因为

$$\left|\frac{3n^2+n}{2n^2-1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{2n+3}{4n^2-2}\right|\leqslant\frac{6n}{2n^2}=\frac{3}{n}$$

所以对于 $\forall\varepsilon>0$,当 $\dfrac{3}{n}<\varepsilon$,即 $n>\dfrac{3}{\varepsilon}$ 时,一定有 $\left|\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$ 成立.

下面写出具体证明步骤.

证 因为
$$\left|\frac{3n^2+n}{2n^2-1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{2n+3}{4n^2-2}\right|\leqslant\frac{6n}{2n^2}=\frac{3}{n}$$

所以对于 $\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$ 只要 $\dfrac{3}{n}<\varepsilon$,即 $n>\dfrac{3}{\varepsilon}$.

从而取自然数 $N=\left[\dfrac{3}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,恒有不等式 $\left|\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$ 成立,满足极限的定义,因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}=\dfrac{3}{2}$.

注 例 6 中采用的适当放大的具体方法不是唯一的,只要符合要求即可. 就例 6 而言,因为 $n\to\infty$,所以可以先限制 $n>2$,则有
$$\left|\frac{3n^2+n}{2n^2-1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{2n+3}{4n^2-2}\right|<\frac{3n}{3n^2}=\frac{1}{n}$$

所以对于 $\forall\varepsilon>0$,只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$,就有 $\left|\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$ 成立,从而取 $N=\max\left\{2,\left[\dfrac{3}{\varepsilon}\right]\right\}$,则当 $n>N$ 时,恒有 $\left|\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$ 成立,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}=\dfrac{3}{2}$.

例 7 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$,其中 $a>1$ 为常数.

证 由于 $a>1$,且 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{a\cdot1\cdot1\cdots1}\leqslant\dfrac{1}{n}(a+n-1)$,(其中第二个根号下是 a 与 $n-1$ 个 1 相乘),所以 $|\sqrt[n]{a}-1|=\sqrt[n]{a}-1\leqslant\dfrac{1}{n}(a+n-1)-1=\dfrac{a-1}{n}<\dfrac{a}{n}$. 因此,对于 $\forall\varepsilon>0$,要使 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$,只要 $\dfrac{a}{n}<\varepsilon$,即 $n>\dfrac{a}{\varepsilon}$. 从而,取自然数 $N=\left[\dfrac{a}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,恒有不等式 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$ 成立,满足极限的定义,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

注 在放大不等式的过程中,此题也可以:设 $\sqrt[n]{a}-1=h>0$,则因
$$a=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2!}h^2+\cdots+h^n>nh$$

所以 $|\sqrt[n]{a}-1|=h<\dfrac{a}{n}$,其它是相同的.

例 8 用定义证明 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

分析 就这类函数的极限而言，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，要找一个与 ε 有关的正数 δ，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立. 一般来说都是反过来推，即在假设 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立时，看 x 在 x_0 的某去心邻域内应满足的范围，即从不等式中解出 $|x-x_0|$. 就本题而言，要使 $\left|\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，因为 $\left|\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{2x^2-x-1}{2(x+1)}\right|=\left|\dfrac{(2x+1)(x-1)}{2(x+1)}\right|$，所以即要 $\left|\dfrac{(2x+1)(x-1)}{2(x+1)}\right|<\varepsilon$，此处要解的是 $|x-1|$ 因子，而怎样去估计 $\left|\dfrac{2x+1}{2(x+1)}\right|$ 呢？这时一般采用先对 x 进行一定的限制，因为 $x\to1$，所以考虑限制 $\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}$，即 $|x-1|<\dfrac{1}{2}$，则 $\left|\dfrac{2x+1}{2(x+1)}\right|<\dfrac{3+1}{2(1+\frac{1}{2})}=\dfrac{4}{3}$，从而只要 $\dfrac{4}{3}|x-1|<\varepsilon$，即 $|x-1|<\dfrac{3\varepsilon}{4}$，则就有 $\left|\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{(2x+1)(x-1)}{2(x+1)}\right|<\varepsilon$ 成立.

证 因为 $\left|\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{(2x+1)}{2(x+1)}\right|\cdot|x-1|$，限制 $|x-1|<\dfrac{1}{2}$，所以对于 $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，则只要 $|x-1|<\dfrac{3\varepsilon}{4}$，从而取 $\delta=\min\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{3\varepsilon}{4}\right\}$，当 x 满足 $0<|x-1|<\delta$ 时，必有 $\left|\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ 成立，符合极限的定义，因此 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

例 9 用定义证明 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x+3}{x}=\infty$.

分析 要证明极限为无穷大，就是要对 $\forall M>0$，找一个与 M 有关的正数 δ，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有不等式 $|f(x)|>M$ 成立. 这时可能会解另一个缩小后的易解的不等式 $|\varphi(x)|>M$，而得到 $|x-x_0|$ 需小于的程度.

证 因为当 $x\neq0$ 时，有 $\left|\dfrac{2x+3}{x}\right|\geqslant\left|\dfrac{3}{x}\right|-2$，所以对于 $\forall M>0$，要使 $\left|\dfrac{2x+3}{x}\right|>M$，只要 $\left|\dfrac{3}{x}\right|-2>M$，即 $0<|x|<\dfrac{3}{M+2}$；从而取 $\delta=\dfrac{3}{M+2}$，则当 $0<|x|<\delta$ 时，就有 $\left|\dfrac{2x+3}{x}\right|>M$ 成立，满足定义的条件，因此 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x+3}{x}=\infty$.

注 用定义证明极限，必须弄清各种极限的“ε-N”“ε-δ”“ε-X”“M-δ”等语言的定义；弄清证明的过程和每步格式的含义. 解不等式找到的 N,δ 等一般是与所给的 ε 或 M 等有关. 解不等式时可采用适当放大或适当缩小的方法，一般情况下当证明极限值为有限值时用放大，而当极限为无穷大时用缩小.

三、极限的运算

求极限要熟悉各种运算法则，要注意运算法则所适用的范围，充分利用两个极限准则和两个重要极限，注重各种运算技巧、利用等价无穷小求极限时一定要注意等价代换的可能性和可行性.

例 10 下列运算是否正确：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2}=0+0+\cdot+0=0$

(2) 若 $x_1=1,x_n=1-x_{n-1},n=2,3,4,\cdots$，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则有 $a=1-a$，从而 $a=\dfrac{1}{2}$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\sin x=0\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\sin x=0.$

(4) 因为 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0.$

解 (1)错误. 有限个无穷小之和还是无穷小，而无穷多个无穷小之和就不一定了. 极限的四则运算也是对有限项的加法而言的. 此题是无穷多项之和，故此处求极限的方法不正确. 事实上有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$$

(2)错误. 在求由递推公式确定的数列极限时，应先证明极限的存在性，才能设极限值存在，从而利用等式解出极限值. 实际上，本题中 $x_n=\frac{1}{2}(1-(-1)^n)$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

(3)错误. 极限的四则运算是在每一部分极限存在的条件下而建立起来的结论，此处极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在，故不能利用四则运算. 正确的解法是：由于 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 是无穷小，又 $\sin x$ 是有界函数，所以由"有界函数与无穷小之积还是无穷小"知 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=0.$

(4)错误. 利用等价无穷小进行极限运算时要特别注意. 把分子或分母的整体进行等价代换是可以的，但在分子或分母中做部分和因式代换时要有一定的条件. 必须要求被代换的一部分与未被代换的另一部分的负值是可比较的非等价无穷小. 如若某一分子是 $f(x)+g(x)$，且 $f(x)\sim\varphi(x)$，又 $f(x)$ 与 $-g(x)$ 不是等价的，则有

$$\lim\frac{f(x)+g(x)}{F(x)}=\lim\frac{\varphi(x)+g(x)}{F(x)}$$

本题正确解法是：因为 $x\to 0$ 时，$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$，所以有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}=\frac{1}{6}$

例 11 计算下列各极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+3+\cdots+k}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2n})$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$ (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+3+\cdots+k}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=2\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=2.$

$$(2)\ \lim_{n\to\infty}(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n})=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\right)(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\right)=\frac{\sin x}{x},x\neq 0;$$

显然当 $x=0$ 时，极限为 1.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$

(4)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-3}{6+x}\right)^{\left(-\frac{x+6}{3}\right)\cdot-\left(\frac{3(x-1)}{2(x+6)}\right)}=\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}.$

例 12 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

解 设 $x_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}$,则$\dfrac{1}{2}x_n=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\dfrac{5}{2^4}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^{n+1}}$

所以 $x_n-\dfrac{1}{2}x_n=\dfrac{1}{2}+(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}})-\dfrac{2n-1}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{2}+(1-(\dfrac{1}{2})^{n-1})-\dfrac{2n-1}{2^{n+1}}$

从而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}x_n=\frac{1}{2}+1,\text{因此}\lim_{n\to\infty}x_n=3$$

例 13 若 $a>0,b>0$,求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}$.

解 设 $x_n=\sqrt[n]{a^n+b^n}$,不妨设 $a\geqslant b$,则 $a\leqslant x_n\leqslant a\sqrt[n]{2}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$,所以由夹逼定理知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=a$

注 类似可以求得极限$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 其中 $a_k>0,k=1,2,\cdots,m$.

例 14 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

分析 求这类和式的极限,一般的方法有:直接求和求极限,利用夹逼定理求极限以及后面的用定积分的定义和级数求和求极限等方法.此题直接求和不行,这里利用夹逼定理与求和相结合的方法求极限.

解 设 $x_n=\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}$,则有
$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\leqslant x_n\leqslant\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$$

又
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+2n}=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}$$

例 15 设 $x_1=1,x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{x_n+1},n=1,2,\cdots$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

分析 这类用递推公式给出的数列的极限问题,一般是利用单调有界准则先证明极限存在,再具体求极限.

解 显然 $x_2=1+\dfrac{1}{2}>x_1=1$,且对所有的 n 有 $x_n>0$,假设 $x_k>x_{k-1}$,则

$x_{k+1}-x_k=\dfrac{x_k}{x_k+1}-\dfrac{x_{k-1}}{x_{k-1}+1}=\dfrac{x_k-x_{k-1}}{(x_k+1)(x_{k-1}+1)}>0$,即 $x_{k+1}>x_k$.

从而由归纳假设,对一切 x_n 有 $x_{n+1}>x_n,n=1,2,\cdots$,此即 x_n 单调增.

又对任何 x_n,有 $x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1}=2-\dfrac{1}{x_{n-1}+1}<2$,所以 x_n 有界.

因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.假设极限值为 a,在递推公式中令 $n\to\infty$,得 $a=1+\dfrac{a}{a+1}$,即 $a^2-a-1=0$,

解之得 $a=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.因 $x_n>0$,故 a 非负,所以 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

例 16 设 $x_1=1, x_{n+1}=1+\dfrac{1}{x_n+1}, n=1,2,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 显然 $x_n\geqslant 1$，且 $x_{n+1}=1+\dfrac{1}{x_n+1}<2, n=1,2,\cdots$，所以 x_n 有界. 但是 $x_2=1+\dfrac{1}{2}>x_1=1, x_3=1+\dfrac{1}{x_2+1}=\dfrac{7}{5}<x_2=\dfrac{3}{2}$，$x_n$ 可能不具单调性. 而因 $x_3=\dfrac{7}{5}>x_1=1, x_4=\dfrac{17}{12}<x_2=\dfrac{3}{2}$，且 $x_{n+2}-x_n=\dfrac{x_{n-1}-x_{n+1}}{(1+x_{n-1})(1+x_{n+1})}$，所以 $x_{2n+1}>x_{2n-1}, x_{2n+2}<x_{2n}, n=1,2,\cdots$，即奇数项和偶数项分别具有单调性. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}$ 均存在.

假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a, \lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=b$，则有 $a=1+\dfrac{1}{1+b}$ 和 $b=1+\dfrac{1}{1+a}$，从而 $a=b=\sqrt{2}$. 进而得到 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

注 并不是每个由递推公式给出的数列的极限都可以利用单调有界准则求解，有的题目需用其它方法求解. 下面就是一例.

例 17 设 $x_1=a, x_2=b, a\neq b, x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+x_{n-1}), n=2,3,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 因为

$$x_2-x_1=b-a, x_3-x_2=-\frac{1}{2}(x_2-x_1)=-\frac{1}{2}(b-a)$$

$$x_4-x_3=-\frac{1}{2}(x_3-x_2)=(-\frac{1}{2})^2(b-a)\cdots\cdots$$

$$x_n-x_{n-1}=-\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2})=(-\frac{1}{2})^{n-2}(b-a)$$

所以 $$x_n-x_1=\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\cdots+(-1)^{n-2}\frac{1}{2^{n-2}}\right](b-a)=\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n-1}}{1+\frac{1}{2}}(b-a).$$

从而 $$x_n=a+\frac{2}{3}(1-(-\frac{1}{2})^{n-1})(b-a)$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}x_n=a+\frac{2}{3}(b-a)=\frac{1}{3}(a+2b).$$

例 18 计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x\sin x})}{2\tan x}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$；(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2e^{x^2}-3x^3)^{\frac{2}{x^2}}$.

解 (1) 因为 $x\to 0^+$ 时，有 $\ln(1+\sqrt{x\sin x})\sim\sqrt{x\sin x}\sim x, \tan x\sim x$，所以

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+\sqrt{x\sin x})}{2\tan x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$$

(2) $$原式=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(3\frac{\sin x}{x}+x\sin\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{2}.$$

(3) 因为 $x\to 0$ 时，有 $x^2e^{x^2}-3x^3\sim x^2$，所以

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2e^{x^2}-3x^3)^{\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{2}{x^2}}=e^2$$

注 例 18 均是利用等价代换求极限，这里顺便再强调一下，对于式子中的相乘或相除的因式可以进行等价代换，以得到简单的式子；但在部分和式作代换时必须注意要求一部分与另一部分的负值是不等价的才行. 如(1)和(2)都是相乘或相除的因式的等价代换，(3)中的等价代换的可行性，只要对式子取对数就

是显然的了.

四、函数的连续性

函数连续和间断的概念要清楚，特别是分段定义的函数的连续性问题，一定要用连续的定义去考虑，极限的存在性也要注意. 连续符号与极限符号可以交换是求极限时一个很有效的方法. 闭区间上连续函数的几个性质要注意连续和闭区间是两个不能缺少的条件，用连续函数的介值(零点)定理判定方程根的存在性时，只是说明有根存在，至于根的具体位置和根的多少是不能确定的.

例 19 判断下列结论的正确性

(1)若函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $|f(x)|$ 在 x_0 处必连续.

(2)若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，在 (a,b) 内连续，并且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内必有零点.

解 (1)正确. 事实上，对于 $\forall\varepsilon>0$，因为 $f(x)$ 在 x_0 处连续，所以 $\exists\delta>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立. 又有 $|(|f(x)|-|f(x_0)|)|\leqslant|f(x)-f(x_0)|$，从而也有 $|(|f(x)|-|f(x_0)|)|<\varepsilon$ 成立，因此 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|f(x_0)|$，即 $|f(x)|$ 在 x_0 处也连续.

注 此命题之逆不成立. 考查例子：$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbf{Z}\\ -1 & x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}\end{cases}$ 其中 $\mathbf{Z}$ 为整数集，$\mathbf{R}$ 为实数集.

(2)错误. 闭区间上连续函数的特性，在去掉闭的条件后是不能保证的.

例如
$$f(x)=\begin{cases}x & x\in(0,1]\\ -1 & x=0\end{cases}$$
则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义，在 $(0,1)$ 内连续，且 $f(0)\cdot f(1)=-1$，但是显然 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无零点.

例 20 已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^n+x^n)}{n}$，$x\geqslant0$，求 $f(x)$ 的表达式，并讨论 $f(x)$ 在定义域上的连续性.

解 当 $0\leqslant x\leqslant\mathrm{e}$ 时，
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^n+x^n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^n(1+(\frac{x}{\mathrm{e}})^n))}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\ln(1+(\frac{x}{\mathrm{e}})^n)}{n}=1$$
当 $x>\mathrm{e}$ 时，
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^n+x^n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(x^n(1+(\frac{\mathrm{e}}{x})^n))}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln x+\ln(1+(\frac{\mathrm{e}}{x})^n)}{n}=\ln x$$
即 $f(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,\mathrm{e}]\\ \ln x & x\in(\mathrm{e},+\infty)\end{cases}$ 显然 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 和 $(\mathrm{e},+\infty)$ 内是连续的.

又
$$\lim_{x\to\mathrm{e}+0}f(x)=\lim_{x\to\mathrm{e}+0}\ln x=1,\ \lim_{x\to\mathrm{e}-0}f(x)=\lim_{x\to\mathrm{e}-0}1=1,$$
所以 $f(x)$ 在 $x=\mathrm{e}$ 处是连续的；且显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是右连续的. 因此 $f(x)$ 在 $x\geqslant0$，即定义域上是连续的.

注 这类讨论分段定义的函数的连续性问题，在断开定义的点处一定要讨论极限的存在性，或者是讨论左右连续性，从而判断其连续性.

例 21 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，则必有 $c\in(a,b)$，使

得 $f(c)=\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)}$.

证 令 $m=\min\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}$, $M=\max\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}$

则显然有
$$m\leqslant\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)}\leqslant M$$
因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上连续，由闭区间上连续函数的介值定理，存在 $c\in[x_1,x_n]\subset(a,b)$，使得
$$f(c)=\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)}$$

注 此题中，若是对 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（而不是 $[x_1,x_n]$ 上）应用介值定理，则只能得到 $c\in[a,b]$. 对于 m，M 的假设也可以设为 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上的最小值和最大值，但是不能设为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值.

例 22 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

解 因为 $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\sin(n\pi+\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)=(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)=\sin(\lim\limits_{n\to\infty}(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi))=\sin(\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}))=0$

所以由有界函数与无穷小之积还是无穷小，得到
$$\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)=0$$

例 23 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

证 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则对于 $\varepsilon=1$，存在 $X>0$，当 $x>X$ 时，有 $|f(x)-A|<1$ 成立，所以 $|f(x)|<|A|+1$，即对 $\forall x\in(X,+\infty)$，有 $|f(x)|<|A|+1$.

又函数 $f(x)$ 在 $[a,X]$ 上连续，从而有界. 即存在 $M_1>0$，使当 $x\in[a,X]$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M_1$.

这样取 $M=\max\{M_1,|A|+1\}$，则对 $\forall x\in[a,+\infty)$，有 $|f(x)|\leqslant M$，即 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

例 24 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $0<f(x)<1$. 对任何自然数 n，在 $(0,1)$ 内至少存在一点 c，使得 $f(c)=c^n$.

分析 这类利用闭区间上连续函数的零点定理证明方程在某区间内存在实根的题目，一般可以构造一个辅助函数 $F(x)$，讨论其连续性并确定其零点范围而实现.

证 设 $F(x)=f(x)-x^n$. 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以 $F(x)$ 也在 $[0,1]$ 上连续，且显然有 $F(0)=f(0)>0$，$F(1)=f(1)-1<0$. 从而由连续函数的零点定理，至少存在一点 $c\in(0,1)$，使 $F(c)=0$，即 $f(c)=c^n$.

练　习　一

1. 判断题：

(1) 函数 $f(x)$ 在 E 上有界的充分必要条件是：存在常数 A 与 B，使得对任一 $x\in E$，都有 $A\leqslant f(x)\leqslant B$.

(2) 若数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都发散，则数列 $\{x_n+y_n\}$ 和 $\{x_ny_n\}$ 也必发散.

(3) 如果数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 有相同的极限 a，则数列 $x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_n,y_n\cdots$ 也有相同极

限 a.

(4)对于数列$\{x_n\}$,若$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$,则一定有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(5)设 $f(u)=u^2-1,u=g(x)=\mathrm{sgn}x$,则 $x=0$ 是复合函数 $f(g(x))$的跳跃间断点.

(6)若 $g(x)$在 x_0 处不连续,$f(u)$在 $u_0=g(x_0)$处连续,则 $f(g(x))$在 x_0 点一定不连续.

2. 填空题:

(1)函数 $f(x)$的定义域是$(0,1)$,则 $g(x)=f(\frac{[x]}{x})$的定义域是__________.

(2)极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{3\sqrt{3\cdots\sqrt{3}}}=$__________.

(3)极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}})=$__________.

(4)极限$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x=$__________.　(5)极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n=$__________.

(6)极限$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+a)^{x+b}(x+b)^{x+a}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}=$__________.

(7)若函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\tan ax}{x} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$__________.

(8)若函数 $f(x)=\begin{cases}1+x^2 & x<0\\ ax+b & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x^3-2 & x>1\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$处连续,则 $a=$__________,$b=$__________.

3. 选择题:

(1)数列有界是数列收敛的[　　　　]

(A)充分条件　(B)必要条件　(C)充要条件　(D)非充分也非必要条件

(2)当 $x\to 0$ 时,$2x^2+\sin x$ 是 x 的[　　　　]

(A)高阶无穷小　(B)低阶无穷小　(C)等价无穷小　(D)同阶但不等价无穷小

(3)数列 $x_n=(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{4})\cdots(1+\frac{1}{2^n})$是[　　　　]

(A)单调减且有界　(B)单调增且有界　(C)单调减但无界　(D)单调增但无界

(4)极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos ax}}$,$(0<|a|<\pi)$的结果是[　　　　]

(A)$\frac{\sqrt{2}}{a}$　(B)$-\frac{\sqrt{2}}{a}$　(C)$\frac{2\sqrt{2}}{a}$　(D)不存在

(5)极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{|x|}-1}{x}$,的结果是[　　　　]

(A)1　(B)-1　(C)0　(D)不存在

(6)设 $f(x)=\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+3e^{\frac{1}{x}}}$,则 $x=0$ 是 $f(x)$的[　　　　]

(A)可去间断点　(B)跳跃间断点　(C)无穷间断点　(D)振荡间断点

(7)若函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$为连续函数,则[　　　　]

(A)$a=1,b=0$　(B)$a=0,b=1$　(C)$a=-1,b=-1$　(D)$a=1,b=1$

(8)函数 $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$ 有[　　　]

(A)可去间断点 $x=0$,无穷间断点 $x=1$ 和 $x=-1$

(B)可去间断点 $x=1$,无穷间断点 $x=0$ 和 $x=-1$

(C)可去间断点 $x=1$ 和 $x=0$,无穷间断点 $x=-1$

(D)可去间断点 $x=-1$,无穷间断点 $x=0$,跳跃间断点 $x=1$

4. 设 $f(x)$ 满足关系式 $2f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{k}{x}$,$k$ 为常数,证明 $f(x)$ 为奇函数.

5. 用定义证明下列极限:

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}=\dfrac{1}{3}$.　　(2)$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3$.

6. 计算下列各极限:

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$.

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3}{1\cdot2^2}+\frac{5}{2^2\cdot3^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2})$.

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}+\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}})$.

(4)$\lim\limits_{x\to\infty}x(\sin(1+\frac{3}{x})-\sin(1+\frac{1}{x}))$.

(5)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$.　　(6)$\lim\limits_{x\to0}(1-x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

(7)$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.　　(8)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}$,$(x\geqslant0)$.

(9)$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan2x}$.　　(10)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\tan x-\sin^2x\ln(1+x)}{x^3-1+\cos x}$.

7. 求极限:

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})$.　　(2)$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.　　(3)$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

8. 设 a_n,b_n 为两递增的正数数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 均存在,并对 a_n 的每一固定项总有 b_n 的项大于它,反之也一样,试证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

9. 证明数列 $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ 收敛.

10. 已知 $x_1=2$,$x_2=2+\frac{1}{2}$,$x_3=2+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}$,$\cdots$,$x_n=2+\frac{1}{x_{n-1}}$,$\cdots$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

11. 设 $x_1=a$,$y_1=b$,$(b>a>0)$,$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$,$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$,$n=1,2,3,\cdots$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

12. 设 $y_1=\sin x$,$y_2=\sin y_1$,$y_n=\sin y_{n-1}$,$n=,3,4,\cdots$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

13. 设 $0<x<\pi$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sec\frac{x}{2}\sec\frac{x}{4}\cdots\sec\frac{x}{2^n})$.