

高中数学基础知识提要

杨玉生 李龙颜 文成周 编
曹世光 贺令闻

湖南教育出版社

出版说明

我们不断收到各方面读者的来信，要求以现行高中教材为依据，出版一套基础知识复习用书，以便有计划、有系统地进行复习，为高考和职工文化考核打下坚实的基础。这套高中“基础知识提要”就是根据这一要求编辑出版的。计有语文、政治、英语、历史、地理、数学、物理、化学、生物等九个分册，欢迎大家选用。

这套高中“基础知识提要”，在取材上全部立足于各学科总复习的需要，在编法上以加强基础知识、基本技能为目的。与一般复习资料不同，本书由三大部分组成：第一部分是基本内容，将本学科的基础知识归纳整理，使之条理化、系统化，并列出重点、难点，对需要着重领会的问题，进行必要的分析和说明；第二部分是解题方法示例，对基础知识的运用和学习中可能遇到的疑难问题，给出了范例和做了必要的解惑答疑；第三部分是小结与练习，对学习容易出现差错，容易混淆的概念，作了必要的提示，提出了相应的学习方法，并精选了若干练习题，以加深理解和消化有关知识。

这套高中“基础知识提要”，完全适合在校的高中毕业班学生使用。过去本社出版的初中“基础知识提要”丛书，颇受读者欢迎，曾多次重印。这套丛书就是在总结编写初中“基础知识提要”的经验的基础上，广泛征求有关方面的意见，几经斟酌方才定稿的，从而使其内容更为精粹，更加实用。相信本书如同初中“基础知识提要”一样，对辅导高中毕业班进行总复习也会起到应有的作用。

目 录

谈怎样学好高中数学·····	(1)
----------------	-------

代 数

第一章 数·····	(10)
第二章 代数式·····	(24)
第三章 代数方程·····	(39)
第四章 不等式·····	(60)
第五章 指数和对数·····	(78)
第六章 函数·····	(86)
第七章 数列·····	(121)
第八章 排列、组合，数学归纳法，二项式定理·····	(142)
第九章 概率·····	(160)

立 体 几 何

第一章 直线和平面·····	(170)
第二章 多面体和旋转体·····	(185)

三 角

第一章 任意角的三角函数·····	(201)
-------------------	-------

第二章	两角和与差的三角函数.....	(218)
第三章	反三角函数和三角方程.....	(242)

平面解析几何

第一章	直角坐标系.....	(256)
第二章	曲线和方程.....	(265)
第三章	直线.....	(274)
第四章	圆锥曲线.....	(286)
第五章	极坐标和参数方程.....	(301)

微积分初步

第一章	极限.....	(319)
第二章	导数和微分.....	(340)
第三章	积分.....	(364)

综 合 运 用 (396)

谈怎样学好高中数学

数学，这门内容丰富、分支繁多、思维严谨、高度抽象而又应用广泛的学科，处处闪耀着人类智慧的光辉。她，奥妙无穷，令人神往；她，以无穷的力量推动着科学技术的发展，确实无愧于“自然科学的皇后”、“科学之母”的称号。

正因为数学有如此高的价值，所以许多中学生对学习数学有着浓厚的兴趣。为了熟悉和掌握高中数学的基本内容和基本方法，付出了辛勤的劳动。但是，有些人由于学习不甚得法，往往事倍功半，收效甚微。对于数学上一个个的概念，一条条的定理，一则则的公式，他们可以一字不差地背诵。但在演算一些具体的数学习题时，又往往感到束手无策，一筹莫展。因此，不少人经常问我们“怎样才能学好高中数学”？要回答这个问题不是一件容易的事。因为数学具有高度的抽象性，所以，在学习时十分需要丰富的想象力和无穷的创造力，而不存在一个什么学习数学的模式，认为只要按照这个模式去做，就可以轻而易举地学好数学。然而，任何事物都具有一定的规律性，数学也自然如此，只要我们找到它，并掌握它，要学好数学，也并非难事。下面，我们根据数学的特点，并结合长期教学中的经验，就怎样学好高中数学谈谈体会，供学习时参考。

一、端正态度，不断进取

学习是一种艰苦的脑力劳动，被人们称之为“锻炼人类思维

的体操”的数学更是如此。因此，学习高中数学要有一股艰苦踏实、不断进取的顽强毅力。“在科学上面是没有平坦的大路可走的，只有那在崎岖小路上不畏劳苦、勇于攀登的人，才有可能从一个高峰达到另一个高峰。”马克思的这段名言是我们学习的最好座右铭。

“书山有路勤为径，学海无涯苦作舟”。学习是要吃苦的。当你在学习中遇到困难时，你也许会感到苦恼，但一旦战胜了这个困难，又向新的高度进军时，你一定会尝到那种胜利者所特有的欢乐。这就叫做苦中有乐，乐在其中。如果你在学习中浅尝辄止，满足于一知半解，不愿多看书、多动脑、多动手，或者在学习中时紧时松，一曝十寒，甚至为了应付考试，投机取巧，猜题押题，以这样的态度对待学习，没有不失败的。

所以，要学好数学，首先要有一个正确的学习态度，这样，在学习中才能踏踏实实，一步一个脚印的前进。

二、学懂弄通基本概念

高中数学概念繁多。因为概念是赖以思维的基础，所以必须对概念要有清晰透彻的理解，而决不能停留在一字一句的背诵上。

例如：一一映射、逆映射、反函数等等，这些概念的定义，字句较长且绕口，理解起来较为困难，所以必须在理解的基础上抓住关键的字句，才能把握其实质。例如：由集 A 到集 B 的一一映射的实质，是在映射的前提下再加上两条：1. 原象不同，象亦不同；2. B 中每个元素在 A 中都有原象；逆映射的实质在于它是一个由象“找”原象的映射，其前提是原映射是一个一

一映射；反函数的实质是由逆映射建立的一种新的函数，其前提也是原映射为一一映射。由此可见，关键字句理解了，也就把握住了概念的实质。

数学中所有的概念都是由几个原始概念(如点、集合等等)出发，再一个一个定义下来的。因此，系统非常严密，结构非常完整。不少学生在学习时，经常犯概念混淆、张冠李戴、甚至循环定义的逻辑错误。例如，常常有人用“成直角”来定义“两直线垂直”，反过来又用“两直线垂直”来定义“成直角”，这就象回答一个问路的人：“张大爷住在李大爷对门，而李大爷呢，住在张大爷对门”一样荒谬可笑。

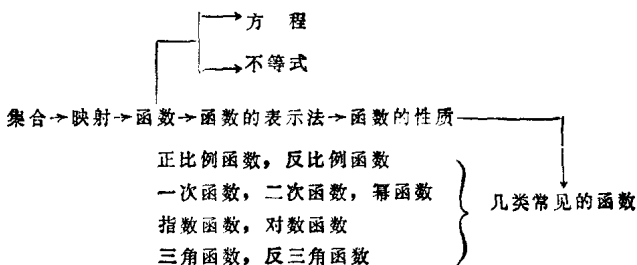
弄清概念的系统，抓住概念的实质之后，还要注意反映这个实质的各种表现形式。

例如等差数列，它的实质是每相邻两项“等差”，反映这个“等差”的形式可以用 $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_n - a_{n-1}$ 来表示，也可以用 $a, a+d, a+2d, \cdots, a+(n-1)d$, 或 $\cdots, x-d, x, x+d, \cdots$ 来表示。又如绝对值，在实数集内是 $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a & a < 0, \end{cases}$ 而在复数集内是：若 $z = x + yi$ ，则 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，两者实质都是由此数所表示的点到原点的距离。抓住了这个实质，就不难用代数、几何、三角等各种形式来表示一个数的绝对值。

三、归纳整理基本知识

读书有个由薄到厚，再由厚到薄的过程。在开始阶段，对新知识逐步充实，不断丰富，使原来的书越来越厚了；到后来逐步归纳整理，提纲挈领，又使原来的书越来越薄了。

例如，学过集合、映射、函数、不等式之后，对其知识系统可列成下表：



经常不断地做这样的归纳整理工作，一方面能使知识条理化、系统化，同时又能彻底弄清知识的纵横联系。

四、严格训练，加强基本运算

学习数学的重要目的之一就是培养自己具有迅速而准确的运算能力。要算得准、算得快，功夫全在平时，不通过平时的严格训练，是决不可能获得这种能力的。可是许多学生平时不愿在计算上用时间，花气力，一看题目，觉得似乎会做就丢手，或者草草划一下，不算出结果，以为满有把握。这些人一上考场，必然速度慢，算不对。

例如在一九八二年有一道高考题是：

抛物线 $y^2 = 2px$ 的内接三角形，有两边与抛物线 $x^2 = 2qy$ 相切，证明这个三角形的第三边也与抛物线 $x^2 = 2qy$ 相切。

这道题按通常的解法，思路很简单，即把有两边抛物线 $x^2 = 2qy$ 相切的条件，转化为判别式 $\Delta_1 = 0$ 及判别式 $\Delta_2 = 0$ ；要证得第三边也与抛物线 $x^2 = 2qy$ 相切，即转化为在 $\Delta_1 = 0$ ，

$\Delta_2 = 0$ 的情况下,推算 $\Delta_3 = 0$ 。大多数考生,虽然思路清晰,然而真正能利用 $\Delta_1 = 0$ 、 $\Delta_2 = 0$ 算出 $\Delta_3 = 0$ 的却为数极少!其原因就是平时太缺乏运算的训练了。还有一些学生,在平时做练习时,遇到计算就使用计算器,这将受害不浅!

为了提高运算速度,保证运算准确,必须牢记各条法则,各个公式及其变形。对于常用的数据,例如: $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{5} \approx 2.236$, $\lg 2 \approx 0.3010$, $\lg 3 \approx 0.4771$, 20以内的整数的平方数, 6以内的整数的阶乘, 30° 、 45° 、 60° 、 15° 、 22.5° 、 75° 的三角函数值,以 a 为边长的正三角形的高,边心距,半径和面积等等,都要记得烂熟。而对于一些容易记错的法则、公式(例如把 $\lg ab$ 错记为等于 $\lg a \cdot \lg b$,或把 $\lg(a+b)$ 误认为等于 $\lg a + \lg b$ 等等),更要认真的对待,反复的练习,从而加深理解,强化记忆。

五、推理论证要简明严谨

严密的逻辑性,是数学的显著特征之一。培养严密的逻辑思维能力,是学习数学的又一个重要目的。所谓推理,就是从已知的条件(题设)出发,依据已知的定义、公理、定理,运用逻辑方法,推演出正确的结论。推理的一般方法有分析法和综合法,归纳法和演绎法,直接证法和间接证法。这些方法,必须因题而异,灵活运用。

在逻辑推理上,最容易发生这样或那样的错误。常见的有,以特殊验证代替一般证明;不自觉地已知条件扩大;凭直观或“想当然”代替证明;为了证明的需要作出实际上不可能存在的辅助线、面;循环论证;等等,例如,我们常常看到学生在

证立体几何题中,出现“过一条直线作一个平面与另一条直线垂直”的错误。事实上,当这两条直线不互相垂直时,这样的平面是根本不存在的。又如,一九七九年有一道高考题是证明勾股定理,有的学生用余弦定理来证明它;有的学生用“ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ”来证明它;有的学生用两点间的距离公式来证明它。须知,按照通常的系统,这些定理、公式都是由勾股定理推演出来的,从而不自觉地犯了循环论证的逻辑错误。

为了防止证题中的逻辑错误,在证题过程中,我们必须注意:第一,每一步推理是否有据?是凭直观或“想当然”得来的,还是确实有定理、公式、法则作依据?第二,所作的辅助线、面是否存在?第三,是否用了由要证的命题推演出来的结论作依据,即是否犯了循环论证的错误?最后还要看看证明途径是否绕了弯子?叙述是否清晰?做到了这几条,才能使证明过程简明严谨。

六、做题时要注意数形结合,扬长避短

十七世纪法国数学家笛卡儿把变量引进了数学,同时通过建立坐标系,用代数方程来研究几何图形。这种方法,把数学研究的两大主要对象——数与形结合起来,从而使辩证法进入了数学,所以它是数学史上的一场伟大变革。

有了这个方法,不但许多几何题的证明、计算,可以通过建立坐标系,找出适合图形中某些曲线(直线)的方程,通过方程的演算而使问题得到解决,而且,许多纯代数题目,结合图形来求解,有时也显得特别容易。例如,求适合 $|z - \sqrt{2} + i| = 2$ 的 z , 使 z 的模最大。这个题如果用纯代数方法求解,

需设 $z = x + yi$, 代入已知条件, 再求 $|z|$ 的最大值, 比较繁琐. 如果我们用解析法, 就可以转化为在复平面内, 以 $z_0 = \sqrt{2} - i$ 所在的点为圆心, 2 为半径的圆上所求的一点. 使这一点到原点的距离最大, 那么这一点所表示的复数即为所求. 这样, 问题就简单得多了.

又如, “设实数 x 、 y 满足关系 $x^2 + y^2 = 1$, 且 $y \geq 0$, 求 $k = \frac{y-2}{x-1}$ 的取值范围.” 此题如果用纯代数法, 必须消去 y , 整理成含 x 的二次式, 令 $\Delta \geq 0$, 解含 k 的不等式而得 k 的取值范围; 如果用解析法, 它就转化为求过点 $P(1, 2)$ 且又是半圆 $x^2 + y^2 = 1 (y \geq 0)$ 的切线的斜率的范围. 两法相比, 前者何其繁琐呆板, 后者多么简单巧妙! 因此, 我们要学会通过数形结合, 互相转化, 扬长避短, 选取较好的方法去解题.

七、认真分析, 全面考虑

不少学生在解数学习题时, 经常不事先认真分析, 不对各种情况全面考虑, 或者忽视一个式子成立的条件, 从而造成谬误. 以解排列组合问题为例, 不分析所给问题是排列还是组合, 不注意防止重复、遗漏现象的发生, 因而导致结果的错误.

请看下面这个题目:

“把不同的 6 本书分给三个人, 这三个人中有得 1 本的, 有得 2 本的, 有得 3 本的, 共有多少种不同的分法?” 有学生解答是: 第一个人从 6 本书中任取 1 本, 有 C_6^1 种方法; 第二个人从剩下的 5 本书中任取 2 本, 有 C_5^2 种方法; 第三个人取得最后 3 本, 有 C_3^3 种方法, 故共有 $C_6^1 C_5^2 C_3^3$ 种不同的方法.

很明显，这个答案是错误的，错误的原因在于他把得1本、2本、3本书中的人分别固定下来了。只有把题目改为“……甲得1本，乙得2本，丙得3本”才是 $C_3^1 \cdot C_2^2 \cdot C_3^3$ 种不同的分法。本题没有指明谁得1本，谁得2本，谁得3本，而1本书，2本书，3本书这三个相异的物群与三个人的对应方法有 P_3^3 种，故不同的分法应有 $C_3^1 \cdot C_2^2 \cdot C_3^3 \cdot P_3^3$ 种。

我们还看一个例子：

“求适合关系 $\log_{1+y} x + \log_{1-y} x = 2(\log_{1+y} x)(\log_{1-y} x)$ 的动点轨迹”。

不少人通过换底，整理，得动点轨迹为圆：

$$x^2 + y^2 = 1.$$

然而这样做就忽视了题目中的隐含条件：

$$x > 0 \text{ 且 } x \neq 1, -1 < y < 1 \text{ 且 } y \neq 0.$$

其正确解答应该是

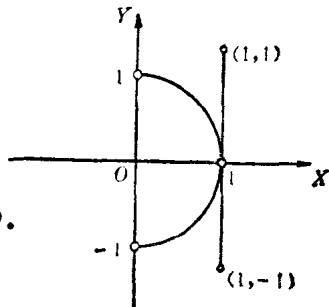
$$1) \text{ 若 } x \neq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$(-1 < y < 1 \text{ 且 } y \neq 0,$$

$$x > 0 \text{ 且 } x \neq 1);$$

$$2) \ x = 1 \ (-1 < y < 1 \text{ 且 } y \neq 0).$$

其轨迹于图。



八、多读多写，多思多练

许多中学生，没有读数学书的良好习惯。课后拿了题目就做，题目做不出来就去翻翻书上类似的例题，然后照葫芦画瓢地去解题。有的人虽然也看看教材，但象读语文、外语那样，一字一句去背诵那些定义、定理、法则，而不去消化教材。这

些都是学习数学的不良习惯。

对于数学教材，不但要认真读，而且要有正确的方法。那就是在读的同时，还要勤于动笔，多思多练。例如，一条定理是怎样叙述的？先关着书，想一想，自己动笔推演推演，然后打开书再看看书上与自己想的、写的是否一致？如果自己错了，原因在那里？应该怎样更正？有了这样一个过程，你就对这条定理的实质及其证明方法彻底弄通了。在动脑动笔的过程中加深了理解，强化了记忆。所以有人说：“不动笔墨不看书”，是很有道理的。

在搞通基本概念，掌握基本定理、法则、公式的同时，还必须加强练习。练习的目的不仅在于熟悉巩固所学的知识，还在于训练解题技巧，综合应用知识。在解题之后应回顾一下，解这道题用到了哪些知识，采用了哪些方法，解题的关键在哪里，还有其它的解法没有？再进一步考虑，这道题与过去哪些题有关联或相似之处？然后归纳对比，串联沟通，总结提高。经常这样做，就会收到举一反三，触类旁通的效果。这对提高观察分析能力，总结概括能力和逻辑推理能力也是有帮助的。最后，演题一定要独立进行，只有这样，才能达到上述目的。

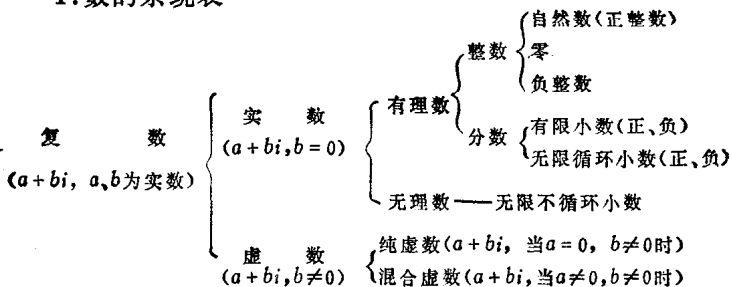
“世上无难事，只要肯登攀”，让这光辉的名句激励我们攀登数学上一个又一个的高峰吧！

代 数

第一章 数

基 本 内 容

1. 数的系统表



2. 自然数：任意自然数均可用 $a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n$ 表示，其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 分别是 0, 1, 2, $\cdots$ 9 中的一个。对质数、合数、约数、倍数、公约数、公倍数、最大公约数与最小公倍数的概念一定要清楚。

3. 整数

(1) 整数可按被某一整数 p 除所得余数分类： $pn, pn+1, pn+2, \cdots, pn+(p-1)$ 。若 $p=2$ ，整数可分为奇数、偶数两类。连续整数可表成 $n, n+1, n+2, \cdots$ 。

(2) 被2、3、5、7、9、11整除的整数的特征:

被 n 整除	特 征
2, 5	这个数末位数字能被2或5整除
3, 9	这个数各位上数字的和能被3或9整除
7	这个数末三位数字所表示的数与末三位以前数字所表示的数的差能被7整除
11	这个数奇数位上数字之和与偶数位上数字之和的差能被11整除

4. 有理数: 任何有理数都可以表示为 $\frac{p}{q}$ (p, q 为互质的整数)。若 $\sqrt{a}$ 为有理数, 则 a 为完全平方数。

5. 无理数: 无理数不能表成 $\frac{p}{q}$ 的形式 (p, q 为互质整数), 故不可能等于任何有理数。不尽根数都是无理数。

若 $a + b\sqrt{A} = c + d\sqrt{A}$, (a, b, c, d 是有理数, $\sqrt{A}$ 是无理数) 则 $a = c$, $b = d$ 。

6. 实数

(1) 实数与数轴上的点一一对应。实数具有连续性。两个实数可以比较大小。

(2) 实数 a 的绝对值 $|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$ 。

(3) 实数的平方是非负数。若 $\sqrt{a}$ 是实数, 则 $a \geq 0$, 由此推出

若 $ax^2 + bx + c = 0$ 有实根, 则 $b^2 - 4ac \geq 0$ 。

7. 复数

(1) 虚数单位 i

规定 $i^2 = -1$, i 具有周期性: $i^{4K} = 1, i^{4K+1} = i, i^{4K+2} = -1, i^{4K+3} = -i$ (K 为整数). i 能和实数一起按通常的四则运算法则进行运算.

(2) 复数的表示法

① 复数的代数形式: $a + bi$ (a, b 为实数).

② 复数的几何表示法: 复平面内的点 $Z(a, b)$ 与复数 $a + bi$ 一一对应, 可以用点 $Z(a, b)$ 表示复数 $a + bi$. 平面内以原点为起点, $Z(a, b)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 与 $Z(a, b)$ 一一对应, 所以可用平面向量 $\overrightarrow{OZ}$ 表示复数 $a + bi$. 线段 OZ 的长叫复数 $a + bi$ 的模, 记做 $|a + bi|$, 且 $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$. OA 与 x 轴的正方向的夹角称为 $a + bi$ 的幅角. 幅角是多值的. 在区间 $[0, 2\pi)$ 的值称为主值.

③ 复数的三角形式: $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, 其中 r 是复数的模, θ 是幅角. 在这里要特别注意 $r \geq 0$, 括号里的实部是 θ 的余弦, 虚部是 θ 的正弦, 实部与虚部之间用加号连接, 幅角通常取主值.

(3) 复数的重要性质

① 在复数范围内无顺序可言, 无正负可言, 但有互反数. 两复数若不全相等就不能比较大小.

② 复数 $a + bi$ 与 $c + di$ 相等, 当且仅当 $a = c, b = d$ (a, b, c, d 都是实数).

③ $z = a + bi$ 与 $\bar{z} = a - bi$ (a, b 为实数) 称为共轭复数. 它们在复平面内关于实轴对称. 实数与自身共轭. 复数与它的共轭复数满足 $z\bar{z} = |z|^2$.

(4) 复数的运算

① 复数的和、差、积、商(除数不为零)、幂、方根仍是复数.它的代数形式的运算只需将 i 当作字母 x 按二项式($a+bx$)的运算规律进行(注意 $i^2=-1$).作复数的除法时,要把分母实数化,转化为乘法进行,复数开方时,使用代数形式计算起来不方便,宜化成三角形式后再开方.

② 复数的三角形式的运算

$$\begin{aligned}\text{乘法: } r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{除法: } \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} &= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{乘方: } [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n &= r^n (\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad (n \text{ 为整数}) \\ (\text{上式称为棣美弗公式})\end{aligned}$$

开方: $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 有 n 个 n 次方根, 它们是

$$\sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\theta + 2kn}{n} + i \sin \frac{\theta + 2kn}{n} \right) \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

解题方法示例

例1 若一个自然数 m 的平方能被3整除, 则这个自然数也一定能被3整除.

证明 (用穷举法) 若 m 不能被3整除, 则以下两种情况必居其一: