数值积分及其应用

华罗庚　王　元

科学出版社

数值积分及其应用

（"积分的近似計算"的修訂本）

华罗庚　王　元著

科学出版社

內 容 簡 介

本书分两部分，前一部分包括对古典的求积公式的重新处理；对实用調和分析的誤差及其应用的研究；对測量工作者常用的求容积与表面积的方法，作了数学加工与分析比較．第二部分为系統地总結近年来发展起来的用数論方法处理高維空間的数值积分的成果．这些理論目前已經达到了可以推广的阶段．不少实例說明了这些方法是极精密的．书中还談到了数論方法在数值計算的其他若干問題上的应用．

此书可供数学工作者及計算数学工作者之用，并可供地理、矿业及地质工作者参考．

数值积分及其应用

（"积分的近似計算"的修訂本）

华罗庚　王　元　著

*

科学出版社 出版（北京朝阳門大街117号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第061号

中国科学院印刷厂印刷　新华书店总經售

*

1963年9月第一版　书号：2849　字数：134,000

1963年9月第一次印刷　开本：850×1168 1/32

（京）0001—5,000　印张：5 1/4

定价：0.90元

序

我們的小册子"积分的近似計算"，間世将近两年了．近二年来，在数論方法用于多重积分的数値計算及其应用方面，有了較大的进展．此小册子，由于是在这一分支刚开始发展时写的，現在看来，无論从內容及其对一些問題的看法上，都有必要加以增訂．又由于这次添加了一些数值积分法的应用，所以将书名改为"数值积分及其应用"．

这本书的写作开始于 1958 年，当时作者們在中国科学技术大学联合执教微积分課．本书的前一部分就是为了教学的需要而写的．有些想法虽然起源頗早，但一直到这次教課时才一同把它們整理了出来(見[1])．又由于需要找一些計算面积、容积(或体积)与表面积的实用方法，作者曾向地理、矿业与地質工作者們請教了他們常用的方法，并对这些方法作了数学的加工和检定，使之能够作为数学課程的教材．

数論方法在数值計算上的应用的研究，开始于 1957 年，由于作者一直是非常重視数論方法的实际应用，所以对这方面的总結与整理就构成了书的后一部分．

用古典的矩形公式来計算某些函数族上的函数的数值积分时，誤差依賴于积分的重数．詳細言之，固定分点的个数，则当积分的重数增加时，誤差亦随之而迅速增大，或者可以說，当要求数值积分有一定的精确度时，则分点的数目必須随着积分重数的增加而迅速增加．因此，用这一方法来处理高維空間的数值积分时，由于計算量十分巨大，是难于实现的．

近年来所发展起来的 Monte Carlo 方法是常用的計算多重积分的方法．用这种方法来計算数值积分，首先就是对被积函数进行一系列的随机抽样，然后取平均值，用它来計算积分．这种方法

的优点在于在机器上运算的手續簡便. 收斂的速度虽然比矩形方法快些,但是由这一方法所能得到的只能是概率的誤差,而不是眞正的誤差.

数論方法处理多重积分的近似計算的理論基础在于数論中的一致分布理論，即按照事先选定的最佳分布上的函数值所构成的单和来逼近多重积分，因而得到的誤差不再是概率的，而是肯定的. 不仅如此,这些肯定的誤差竟比概率誤差还要精密,并且可以証明,对于某些函数族来說,这种逼近的誤差的主阶已經臻于至善了. 不少数論中的著名原理与方法都能有效地用于这一問題,例如三角和的估値、丟番图逼近論以及連分数論等等. 在本书中,我們介紹了 van der Corput, Hammersley 与 Halton 等人所发展起来的利用 r 进位小数来构造最佳一致分布点列的方法，及 Коробов 与 Бахвалов 等人所发展起来的所謂“极値系数法”. 在书末还附了一个可供实际应用的“极値系数表”. 在这一部分里也包括了作者的一些工作，例如二重积分的計算方法及极値系数法在插入法方面的应用等等. 此外,在处理某些已有的結果的时候,也参加了我們自己的看法或簡化了証明.

在計算調和分析或用迭代法求解积分方程时，实际上就是将問題归結为一系列积分的計算問題. 如果給了有限多个数据，用数値积分法来計算,要注意計算的項数需要恰到好处,有时項数計算多了,不仅浪費,反而会导致不精确的結果. 又有一些偏微分方程,在某些条件下,也能将解答写成一个积分,本书将举例說明,有时用数値积分法来处理是不妥当的;而从这有限多个边界值出发,通过有限的方法（指数論与代数的方法）直接求出解的近似値来,反而能导致精确的結果. 书中提供了两个最簡单的例子来闡明这一点，可以供作这方面进一步探討的参考.

因此,本书仅仅对数値积分及其应用的若干問題作一些討論,并未企图对数値計算作較全面的介紹. 特别应該指出的是我国学者的貢献,例如赵訪熊关于近似求解代数方程的工作，閔嗣鶴、徐利治[2]关于数値积分的工作,还有关肇直[3]、卢文等把泛函分析用

到数值計算方面的工作等等.

我們衷心地感謝我国的地理、矿业与地質工作者，他們热情地帮助我們学会了一些实际应用的求面积、容积与表面积的方法．还有木材厂的老工人，他們为我們提供了木材利用率的例子．在小册子初版間世后，一直不断地收到讀者們的宝貴意見，特别是何祚庥同志，还为本书写了书評[4]．再版的手稿，承蒙中国科学院計算技术研究所第三室的有关同志看过，并提出了很好的意見，对我們很有帮助．

最后，作者十分殷切地期望这本小册子再次問世后能得到更多的批評与帮助．

華罗庚　王　元

1963年5月15日于北京

目　　录

§ 1. Euler 求和公式及 Euler 函数

定理 1 (Euler). 命 $\varphi(x)$ 是有限閉区間 $[a,b]$ 內有連續微商的函数,則

$$\sum_{a<n\leqslant b}\varphi(n)=\int_a^b\varphi(x)dx+\int_a^b\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx+$$
$$+\left(a-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(a)-\left(b-[b]-\frac{1}{2}\right)\varphi(b),$$

此处 $[\xi]$ 代表实数 ξ 的整数部分.

証. 1) 如果 $[a]+1>[b]$, 則 $[a]=[b]$, 这公式变为

$$0=\int_a^b\varphi(x)dx+\int_a^b\left(x-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx+$$
$$+\left(a-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(a)-\left(b-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(b),$$

即

$$\int_a^b\left(x-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx=-\left(a-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(a)+$$
$$+\left(b-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(b)-\int_a^b\varphi(x)dx.$$

这就是部分积分公式的直接推理.

2) 假定 $[a]+1\leqslant[b]$, 則

$$\int_a^b[x]\varphi'(x)dx=\int_{[a]+1}^{[b]}[x]\varphi'(x)dx+\int_a^{[a]+1}[x]\varphi'(x)dx+$$
$$+\int_{[b]}^b[x]\varphi'(x)dx=$$
$$=\sum_{n=[a]+1}^{[b]-1}n\int_n^{n+1}\varphi'(x)dx+\int_a^{[a]+1}[a]\varphi'(x)dx+\int_{[b]}^b[b]\varphi'(x)dx=$$
$$=\sum_{n=[a]+1}^{[b]-1}n(\varphi(n+1)-\varphi(n))+[a](\varphi([a]+1)-\varphi(a))+$$

$$+[b](\varphi(b)-\varphi([b]))=$$

$$=-\sum_{n=[a]+1}^{[b]}\varphi(n)-[a]\varphi(a)+[b]\varphi(b).$$

又由部分积分可知

$$\int_a^b\left(x-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx=\left(b-\frac{1}{2}\right)\varphi(b)-\left(a-\frac{1}{2}\right)\varphi(a)-$$

$$-\int_a^b\varphi(x)dx,$$

因此

$$\int_a^b\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx=\sum_{n=[a]+1}^{[b]}\varphi(n)-\int_a^b\varphi(x)dx-$$

$$-\left(a-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(a)+\left(b-[b]-\frac{1}{2}\right)\varphi(b),$$

即明所欲証.

我們現在用 Euler 求和公式来研究，当 n 充分大时，$n!$ 的漸近情况.

1) 命 $\varphi(x)=\log x$, $a=1$, $b=n$（整数），則得

$$\sum_{1<m\leqslant n}\log m=\int_1^n\log x dx+\int_1^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x}+$$

$$+\frac{1}{2}\log n. \tag{1}$$

由于

$$\left|x-[x]-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2}$$

及

$$\int_\xi^{\xi+1}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)dx=0\quad(\xi\text{ 为实数}),$$

故由第二中值公式可知积分

$$\int_1^\infty\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x}$$

收斂，因此由(1)可知

$$\log n!=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+C+\gamma_n,$$

此处

$$C=1+\int_1^{\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x},$$

$$\gamma_n=-\int_n^{\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{e^{-n}n^{n+1/2}}=e^C=C_1. \tag{2}$$

我們称公式(2)为 Stirling 公式.

2）現在我們来进一步定出 C. 由 Wallis 公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots(2n)\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{\pi}{2}$$

可知

$$\frac{(2^n n!)^4}{(2n)!^2(2n+1)}(1+o(1))=\frac{\pi}{2}.$$

以(2)式代入得

$$\frac{C_1^4(2^n n^{n+1/2}e^{-n})^4}{C_1^2((2n)^{2n+1/2}e^{-2n})^2(2n+1)}(1+o(1))=\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{C_1^2 n}{2(2n+1)}(1+o(1))=\frac{\pi}{2}.$$

命 $n\to\infty$ 得

$$C_1=\sqrt{2\pi}.$$

同时我們也算出了

$$\int_1^{\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\log 2\pi-1.$$

因为經常用到,我們引进符号

$$b_1(x)=x-[x]-\frac{1}{2}$$

并且用归納法来定义 Euler 函数 $b_l\,(l=1,2,\cdots)$.

定义. (i) $b_l(x)$ 是以 1 为周期的函数,也就是

$$b_l(x+1)=b_l(x).$$

(ii) $\displaystyle\int_0^x b_l(y)dy=b_{l+1}(x)-b_{l+1}(0).$

由周期性显然得出

$$\int_0^1 b_l(y)dy = 0.$$

我們得先說明一下，这样，函数 $b_l(x)$ 就完全定义了．由 (ii) 可知如果 $b_l(x)$ 完全定义了，$b_{l+1}(x)$ 仅差一常数，也就完全定义了．这一常数可由 $b_{l+2}(x)$ 的周期性来决定．

我們現在算出前几个 $b_l(x)$ 来．周期既然是 1，我們不妨假定 $0 < x < 1$，由

$$b_2(x) - b_2(0) = \int_0^x \left(t - \frac{1}{2}\right)dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2},$$

即

$$b_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + b_2(0).$$

由

$$0 = \int_0^1 b_2(x)dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + b_2(0)x \Big|_0^1 = -\frac{1}{12} + b_2(0),$$

即当 $0 < x < 1$ 时

$$b_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}.$$

由于 $b_2(x)$ 的周期性，可一般地有

$$b_2(x) = \frac{(x - [x])^2}{2} - \frac{x - [x]}{2} + \frac{1}{12}.$$

同法可以推得

$$b_3(x) = \frac{1}{6}(x - [x])^3 - \frac{1}{4}(x - [x])^2 + \frac{1}{12}(x - [x]),$$

$$b_4(x) = \frac{1}{24}(x - [x])^4 - \frac{1}{12}(x - [x])^3 + \frac{1}{24}(x - [x])^2 - \frac{1}{720}.$$

讀者可以再算一两个例子以資熟練．

§ 2. 梯形法、矩形法与 Simpson 法

假定 $f(x)$ 是一个在 $[\alpha, \beta]$ 內定义了的函数，以后如果用到几次微商，便假定 $f(x)$ 有几次微商. 我們用 Euler 求和公式来推出普通数值积分的梯形法、矩形法与 Simpson 法.

1. 梯 形 法

在 Euler 求和公式中取

$$\varphi(x) = f\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right),\ a = 0,\ b = n\ (n\text{ 是自然数}).$$

記

$$y_l = f\left(\alpha + l\frac{\beta-\alpha}{n}\right),$$

如此則得

$$\sum_{0<l\leqslant n} f\left(\alpha + l\frac{\beta-\alpha}{n}\right) = \int_0^n f\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx + \frac{1}{2}f(\beta) -$$
$$-\frac{1}{2}f(\alpha) + \frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx.$$

換变数 $\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n} = t$，則得

$$\sum_{l=1}^{n-1} y_l + \frac{1}{2}(y_0+y_n) = \frac{n}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(t)dt +$$
$$+\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n b_1(x)f'\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx,$$

也就是

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt - \frac{\beta-\alpha}{n}\left(\sum_{l=1}^{n-1} y_l + \frac{1}{2}(y_0+y_n)\right) =$$
$$= -\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2\int_0^n b_1(x)f'\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx. \qquad (1)$$

这个式子說明，求积分的梯形法的誤差是可以用积分形式表出来的. 現在把誤差表达得更清楚些. 用部分积分可知

$$\int_0^n b_1(x) f'\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx = b_2(x) f'\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\Big|_0^n -$$

$$-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n b_2(x) f''\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx =$$

$$=\frac{1}{12}(f'(\beta)-f'(\alpha)) - \frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n b_2(x) f''\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx =$$

$$=\frac{1}{12}\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n f''\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx -$$

$$-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n b_2(x) f''\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx =$$

$$=-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n \left(b_2(x)-\frac{1}{12}\right) f''\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx,$$

因此得出

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt - \frac{\beta-\alpha}{n}\left(\sum_{l=1}^{n-1} y_l + \frac{1}{2}(y_0+y_n)\right) =$$

$$=\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3\int_0^n \left(b_2(x)-\frac{1}{12}\right) f''\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx. \quad (2)$$

梯形法余項 (1) 須假定 $f(x)$ 有一次微商，而 (2) 假定了 $f(x)$ 有二次微商；梯形法余項我們用

$$R_t = \int_\alpha^\beta f(t)dt - \frac{\beta-\alpha}{n}\left(\sum_{l=1}^{n-1} y_l + \frac{1}{2}(y_0+y_n)\right)$$

来表它.

定理 1. 如果 $|f''(x)| \leqslant M \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta)$，則

$$|R_t| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^3 M}{12n^2}.$$

証. 由 (2) 可知

$$|R_t| \leqslant \left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3\int_0^n \left|b_2(x)-\frac{1}{2}\right|\left|f''\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\right|dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3 M\int_0^n \left|b_2(x)-\frac{1}{12}\right|dx =$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)^3}{n^2} M \int_0^1 \left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{(\beta-\alpha)^3 M}{12n^2}.$$

定理 2. 如果 $f'(x)$ 是单調递减非負函数,則

$$|R_l| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^2}{8n^2} f'(\alpha).$$

証. 由 (1) 及第二中值公式可知

$$|R_l| = \left| \left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2 \int_0^n b_1(x) f'\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right) dx \right| =$$

$$= \left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2 f'(\alpha) \left| \int_0^\xi b_1(x) dx \right|.$$

由

$$\left| \int_0^\xi b_1(x) dx \right| \leqslant \frac{1}{8}$$

可得定理.

如果积分的区間較长,这估計比以前的好些.

2. 矩 形 法

取

$$\varphi(x) = f\left(\alpha + \left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right),$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = n - \frac{1}{2},$$

并記

$$y_{l+\frac{1}{2}} = f\left(\alpha + \left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right),$$

則得

$$\sum_{-\frac{1}{2}<l\leqslant n-\frac{1}{2}} f\left(\alpha + \left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right) =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} f\left(\alpha + \left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right) dx +$$

$$+ \frac{\beta-\alpha}{n} \int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} b_1(x) f'\left(\alpha + \left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right) dx.$$

换变数

$$\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}=t,$$

则得

$$\sum_{l=0}^{n-1}y_{l+\frac{1}{2}}=\frac{n}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}f(t)dt+\frac{\beta-\alpha}{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}b_1(x)\times$$
$$\times f'\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx.$$

命

$$R_r=\int_{\alpha}^{\beta}f(t)dt-\frac{\beta-\alpha}{n}\sum_{l=0}^{n-1}y_{l+\frac{1}{2}}$$

代表矩形法的余項,则

$$R_r=-\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}b_1(x)f'\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx. \quad (3)$$

部分积分得

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}b_1(x)f'\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$
$$=b_2(x)f'\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}-$$
$$-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}b_2(x)f''\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$
$$=-\frac{1}{24}(f'(\beta)-f'(\alpha))-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}b_2(x)\times$$
$$\times f''\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$
$$=-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\left(b_2(x)+\frac{1}{24}\right)f''\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx,$$

即

$$R_r=\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\left(b_2(x)+\frac{1}{24}\right)\times$$
$$\times f''\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx. \quad (4)$$

定理 3. 如果 $|f''(x)| \leqslant M \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta)$, 則

$$|R_r| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^3 M}{24n^2}.$$

証. 由 (4) 可知

$$\begin{aligned}|R_r| &\leqslant \left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3 M\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\left|b_2(x)+\frac{1}{24}\right|dx \leqslant \\ &\leqslant \left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3 Mn\int_0^1\left|b_2(x)+\frac{1}{24}\right|dx = \\ &= \frac{(\beta-\alpha)^3}{n^2}M\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\right)dx = \\ &= \frac{(\beta-\alpha)^3}{24n^2}M.\end{aligned}$$

定理 4. 如果 $f'(x)$ 是单調递減非負函数, 則

$$|R_r| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^2 f'(\alpha)}{8n^2}.$$

証. 于 (3) 上用第二中值公式可知

$$\begin{aligned}|R_r| &= \frac{(\beta-\alpha)^2 f'(\alpha)}{n^2}\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\xi} b_1(x)dx\right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{(\beta-\alpha)^2 f'(\alpha)}{8n^2}.\end{aligned}$$

3. Simpson 法

命

$$R_s = \frac{1}{3}R_t + \frac{2}{3}R_r,$$

則得

$$R_s = \int_\alpha^\beta f(t)dt - \frac{\beta-\alpha}{6n}\left(y_0+y_n+2\sum_{i=1}^{n-1}y_i+4\sum_{i=0}^{n-1}y_{i+\frac{1}{2}}\right),$$

而且 Simpson 公式的余項 [由 (2) 与 (4)] 为

$$R_s = \left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3\int_0^n\left(\frac{b_2(x)}{3}-\frac{1}{36}+\frac{2b_2(x-\frac{1}{2})}{3}+\frac{1}{36}\right)\times$$