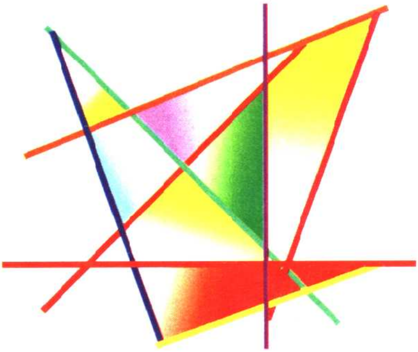
名师解惑丛书



不等式

崔吉会　编著

山东教育出版社

名师解惑丛书

不　等　式

崔吉会　编著

山东教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

不等式/崔吉会编著. —济南：山东教育出版社，1998（2000 重印）

（名师解惑丛书）

ISBN 7－5328－2699－6

Ⅰ.不…　Ⅱ.崔…　Ⅲ.代数课－高中－课外读物　Ⅳ.G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 02879 号

名师解惑丛书

不　等　式

崔吉会　编著

出 版 者：山东教育出版社

（济南市纬一路 321 号　邮编：250001）

电　　话：（0531）2023919　传真：（0531）2050104

网　　址：http：//www. sjs, com. cn

发 行 者：山东教育出版社

印　　刷：山东新华印刷厂临沂厂

版　　次：1998 年 9 月第 1 版　2001 年 2 月修订第 2 版

2001 年 4 月第 5 次印刷

规　　格：787mm×1092mm　32 开本

印　　张：6.5

字　　数：120 千字

书　　号：ISBN 7—5328—2699—6/G·2477

定　　价：6.10 元

如印装质量有问题，请与印刷厂联系调换

地址：临沂市解放路 76 号 邮编：276002

联系电话：（0539）8222161 转 3009

再版说明

“名师解惑丛书”出版发行以来，以其新颖的编写体例和缜密的知识阐述，深受广大读者青睐，曾连续多次重印.

近几年来，基础教育正发生深刻的改革：“科教兴国”战略深入人心，素质教育全面推进，与此同时，以“普通高等学校招生全国统一考试试卷”为主要载体，所反映出的高考招生改革信息和发展趋势，迫切需要广大教师和莘莘学子以新的视角和思维，关注并投身到这场改革之中.

有鉴于此，我们对“名师解惑丛书”进行了全面修订.此次修订将依然保持被广大读者认同的，每一册书为一个专题讲座的模式，围绕“如何学”，“如何建立知识间的联系”，“如何学以致用”等，帮助广大学生读者解决在学习知识和考试答卷过程中可能遇到的疑难问题.更重要的是，最新修订的“名师解惑丛书”在如何培养学生的创新精神和创造能力，联系现代科学技术及其在日常生产生活中的应用方面，做了较大的充实和修订……

丛书的编写者和出版者相信，您正在翻阅的这本书，将有助于您目前的学习.

AAA01/07

作者的话

自然界与现实社会中，不等的数量关系广泛地存在着．相等是相对的，而不等是绝对的．反映在数学中，不等的数量关系往往可归结为不等式问题．

不等式在中学数学中占有重要的地位，它与数、式、方程、函数、三角等几乎中学数学的所有内容存在密切的联系，不仅众多概念的定义、性质的表述需依赖不等式来完成，而且大量复合问题的研究亦往往难以规避不等式的相关结论与方法，甚至最基本的函数定义域、值域、单调性、最大值、最小值的研究，也离不开不等式的知识．

本书对于不等式问题的研究，将从最基础的内容入手，紧扣大纲和教材，逐层深入地揭示一般方法和规律．同时，注重可发展性原则，对于一些略微超出教材要求的，于培养学生数学能力，特别是数学应用能力有益的相关内容亦作了适当的展开．本书具有如下两个突出的特点：

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

1. 针对性强，针对学生学习过程中易出现的“对概念、性质领悟不透”，“遇到问题不知如何下手”，“解决问题时不知为何常出错”等问题，进行重点剖析，真正起到解决学生心中之“惑”的作用.

2. 突出应用性，顺应当前素质教育和高考改革的潮流，结合数学建模等新兴领域，重点加强学生“用数学”(“用不等式”)的能力.

总之，我们企盼通过对本书的学习能对广大中学生掌握“不等式”这部分内容有所裨益.

作者简介 崔吉会，中学特级教师，1981 年毕业于聊城师范专科学校数学系.现任山东省冠县武训高级中学业务副校长、山东省聊城市数学会理事、聊城市数学中心教研组成员、数学学科带头人、《21 世纪园丁计划》国家级培养对象.在《中学数学研究》、《数学通讯》、《中学生数理化》等十余种数学期刊上发表论文 60 余篇，其中 5 篇被中国人民大学复印中心复印收录在《中学数学教学》中，主编了《名师导练·中小学各科思维训练丛书》高中数学总复习分册，参编了《大面积提高教学质量实验丛书》高中数学总复习分册.

目　录

一　不等式及其性质

客观世界中不等的数量关系反映在数学中可归结为不等式问题.不等式的基本性质是解不等式和证明不等式的依据,因此,熟练掌握不等式的基本性质是正确解、证不等式的关键.由此延伸的不等式的性质是解、证不等式的理论基础,因此,一定要深刻理解不等式的基本性质和性质,熟练掌握这些性质,弄清推理和恰当的不等变形的根据,学会正确推理,提高思维的严密性.

(一)两个实数差的符号与两个实数大小的关系

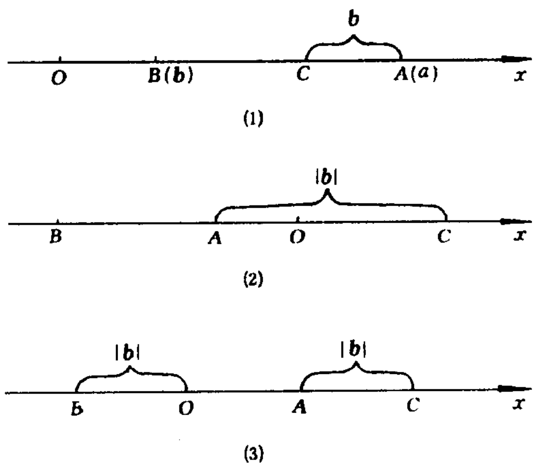
不等式的基本性质:

$$\boxed{\begin{array}{l} a>b\Leftrightarrow a-b>0 \\ a=b\Leftrightarrow a-b<0 \\ a<b\Leftrightarrow a-b<0 \end{array}}$$

它是研究和讨论不等式的基础和依

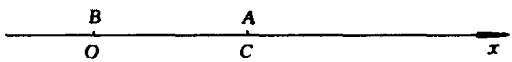
据，整个不等式理论这座大厦就建立在这一基石之上，读者应首先弄清楚为什么 $a>b\Leftrightarrow a-b>0$；$a=b\Leftrightarrow a-b<0$；$a<b\Leftrightarrow a-b<0$？

设 $a>b$，试问 $a-b$ 的符号？读者很快得到答案：$a-b>0$．但当问起，确定符号的依据是什么呢？读者可能就略感困惑了．利用数形结合，把一种问题转化为另一种问题来考虑，这是解决困难问题的一种常规思路．上述问题"可以转化为形的问题么？"即当 $a>b$ 时，数轴上与差 $a-b$ 对应点的位置能确定么？有什么特征？在此思路下，如何作出与差 $a-b$ 对应的点即成为解决问题的关键．我们不妨结合图形对其进行探讨．



对于图 1－1(1)而言，a、b 都是正数，所以与之对应的点都在原点 O 的右侧，而 $a>b$，表明 a 的对应点 A 在 b 的对应点 B 的右侧．在数轴上找一点 C，使 $AC=BO$（AC 与 BO 的

(4)



(5)

图 1－1

方向一致)，则点 C 就是差 $a-b$ 对应的点，显然，C 点在原点右侧，对于图象 1－1(2)、(3)、(4)、(5)而言，同样具备特征：①A 点在 B 点的右侧；②AC 与 BO 长度相等，方向相同；③C 点总在原点右侧．而图象 1－1(1)～(5)已涵盖了满足条件的 A、B 的所有可能情况，故当 $a>b$ 时，$a-b>0$；类似可知，当 $a=b$ 时，$a-b=0$；当 $a<b$ 时，$a-b<0$，于是，有

$$\boxed{\begin{array}{l} a>b\Rightarrow a-b>0 \\ a=b\Rightarrow a-b<0 \\ a<b\Rightarrow a-b<0 \end{array}}$$

再想一想为什么有下面的关系：

$$\boxed{\begin{array}{l} a-b>0\Rightarrow a>b \\ a-b=0\Rightarrow a=b \\ a-b<0\Rightarrow a<b \end{array}}$$

下面证明：$a-b>0\Rightarrow a>b$．事实上，若 $a<b$ 或 $a=b$，则 $a-b<0$ 或 $a-b=0$，这与 $a-b>0$ 矛盾，故 $a>b$．请同学们完成其余证明．

综上所述，我们得到实数 a、b 的"差运算"与 a、b 的大小关系间的对应：

$$\boxed{\begin{array}{l} a>b\Leftrightarrow a-b>0 \\ a=b\Leftrightarrow a-b=0 \\ a<b\Leftrightarrow a-b<0 \end{array}}$$

这一基本性质表明比较两个实数大小问题可以化归为研究其差的符号.

例 1　设 $a>0,b>0$，试比较 $\frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{a}{\sqrt{b}}$ 与 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的大小.

分析: 根据不等式的基本性质，要比较 $\frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{a}{\sqrt{b}}$ 与 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的大小，只要判定它们差的符号即可.

解: $\left(\frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{a}{\sqrt{b}}\right)-(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$$=\frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}.$$

$\because a>0,b>0$,

$\therefore \sqrt{a}+\sqrt{b}>0,(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0,\sqrt{ab}>0$,

$\therefore \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}\geqslant 0$,

即 $\left(\frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{a}{\sqrt{b}}\right)-(\sqrt{a}+\sqrt{b})\geqslant 0$,

$\therefore \frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{a}{\sqrt{b}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

当且仅当 $a=b$ 时，上式等号成立.

[导评]判定两个实数差的符号，变形一定要到位.一般而言，要将“差”化成积结构或非负数和的结构，才能判定其符号.下面的练习对变形的方向有一定的价值，建议读者自己完成：

设 $a>0, b>0, n\in\mathrm{N}^*$，比较 a^n+b^n 与 $a^{n-1}b+ab^{n-1}$ 的大小.

例2 比较 $a^2+b^2+c^2$ 与 $ab+bc+ca$ 的大小.

分析：比较两实数的大小，有时直接作差判定符号，有时变形作差再判定符号.

解：$\because 2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$

$$
\begin{aligned}
&=(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\\
&=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\\
&\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

$\therefore 2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(ab+bc+ca)$，

$\therefore a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

[导评]这里的变形作差，拓展了不等式基本性质应用的空间.常用的作差变形有：两实数分别取二倍再作差；两实数分别取乘方再作差；两实数分别取对数再作差等，其实质即不等式基本性质与函数的单调性的结合.

(二)不等式的性质及应用

上一节中，我们得到了不等式的3条基本性质.教材中，以这3条基本性质为工具，又进一步推导出10余条相关性质(分别以定理、推论、例题、习题等不同形式表述).对于这些性

质，应从推导过程入手加以记忆. 同时，应分清其中哪些是双向的，哪些是单向的.

(1)双向的

①$a>b \Leftrightarrow a-b>0$,

$a=b \Leftrightarrow a-b=0$,

$a<b \Leftrightarrow a-b<0$;

②$a>b \Leftrightarrow b<a$;

③$a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$.

(2)单向的

①$a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$,

$a>b, c>d \Rightarrow a-d>b-c$;

②$a>b, c>0 \Rightarrow ac>bc$,

$a>b, c<0 \Rightarrow ac<bc$;

③$a>b>0, c>d>0 \Rightarrow ac>bd$;

④$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n (n \in \mathrm{N}^*)$;

⑤$a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b} (n \in \mathrm{N}^*, n>1)$.

例 1 对于实数 a、b、c，判断下列命题的真假：

(1)若 $a>b$，则 $ac<bc$；

(2)若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$；

(3)若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$；

(4)若 $a<b<0$，则 $a^2>ab>b^2$；

(5)若 $a<b<0$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

(6)若 $a<b<0$，则$\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$；

(7)若 $a<b<0$，则$|a|>|b|$；

(8)若 $a<b<0$，则$\frac{b}{a}<1$；

(9)若 $c>a>b>0$，则$\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$；

(10)若 $a>b$，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，则 $a>0$，$b<0$.

解：(1)$\because c$ 的符号不定，

$\therefore$ 无法判定 ac 与 bc 的大小，

故原命题为假命题.

(2)$\because c^2\geqslant 0$，

$\therefore c=0$ 时，有 $ac^2=bc^2$，

故原命题为假命题.

(3)$\because ac^2>bc^2$，

$\therefore c\neq 0$，从而 $c^2>0$，

故原命题为真命题.

(4)$\because \begin{cases} a<b, \\ a<0, \end{cases}$

$\therefore a^2>ab$. ①

又$\begin{cases} a<b, \\ b<0, \end{cases}$

$\therefore ab>b^2$. ②

综合①、②，得 $a^2>ab>b^2$.

故原命题为真命题.

(5)由特例 $-2<-1<0$，但 $-\frac{1}{2}>-1$，知原命题为假命题.

事实上，当 $a<b<0$ 时，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

(6) $\because a<b<0$,

$\therefore \begin{cases} -a>-b>0, \\ \frac{1}{a}>\frac{1}{b}. \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} -a>-b>0, \\ -\frac{1}{b}>-\frac{1}{a}>0. \end{cases}$

$\therefore \frac{a}{b}>\frac{b}{a}$.

故原命题为假命题.

(7)两个负实数，绝对值大的反而小，所以该命题是真命题.

(8) $\because a<b<0$,

$\therefore |a|>|b|>0$,

$\therefore \frac{|b|}{|a|}<1$,

$\therefore \frac{b}{a}<1$,

故原命题为真命题.

(9) $\because c>a>b>0$,

$\therefore \begin{cases} -a<-b, \\ c>a, \end{cases}$

$\therefore c-b>c-a>0$.

$\therefore \frac{1}{c-a}>\frac{1}{c-b}>0$.

又 $\because a>b>0$,

$\therefore \dfrac{a}{c-a} > \dfrac{b}{c-b}$.

故原命题为真命题.

(10) $\because \begin{cases} a > b, \\ \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}, \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} a - b > 0, \\ \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} > 0, \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} b - a < 0, \\ \dfrac{b-a}{ab} > 0, \end{cases}$

$\therefore ab < 0$.

又 $\because a > b$,

$\therefore a > 0, b < 0$.

故原命题为真命题.

[**导评**]熟记不等式的性质是解决此类问题的关键.

例 2　设 $60 < a < 84, 28 \leqslant b < 33$，求 $a+b, a-b$ 及 $\dfrac{a}{b}$ 的范围.

解：由题意，得

$$\begin{cases} 60 < a < 84, \\ 28 \leqslant b < 33, \end{cases}$$

$\therefore 88 < a + b < 117$.

由题意，得

$$\begin{cases} 60 < a < 84, \\ -33 < -b \leqslant -28, \end{cases}$$

$\therefore 27<a-b<56$.

由题意,得

$$\begin{cases}60<a<84,\\ \dfrac{1}{33}<\dfrac{1}{b}\leqslant\dfrac{1}{28},\end{cases}$$

$\therefore \dfrac{60}{33}<\dfrac{a}{b}<\dfrac{84}{28}$,

即$\dfrac{20}{11}<\dfrac{a}{b}<3$.

[导评]由$\begin{cases}a>b,\\ c>d\end{cases}$可推出$a+c>b+d$;反之,则不然.切记,同向不等式两边分别相加是非等价变形.

例3 已知$f(x)=ax^2-c$,且$-4\leqslant f(1)\leqslant -1$,$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$.求$f(3)$的范围.

错解:依题设,有

$$\begin{cases}-4\leqslant a-c\leqslant -1,\\ -1\leqslant 4a-c\leqslant 5.\end{cases} \quad ①$$

消元,得

$$\begin{cases}0\leqslant a\leqslant 3,\\ 1\leqslant c\leqslant 7.\end{cases} \quad ②$$

$\because f(3)=9a-c$,

$\therefore -7\leqslant f(3)\leqslant 26$.

正解:先用$f(1)$、$f(2)$表示出a、c.

由题意,得

$$\begin{cases}f(1)=a-c,\\ f(2)=4a-c.\end{cases}$$

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com