本书从实用的观点出发，针对工程设计的实际需要，较系统地介绍了非线性规划和线性规划的理论、方法及其应用，并着重介绍了在实际应用中比较有效的、在电子计算机上易于实现的算法。本书还配置了一定数量的例题和习题，并力求深入浅出，以满足学校教学及读者自学的需要。

本书可作为高等工科院校各专业研究生及高年级大学生的教材或教学参考书，亦可供从事应用数学、工程设计和管理工程等方面工作的科技人员学习、参考。

优化计算方法

王子若　陈永昌　编

*

责任编辑：蓝启华　版式设计：张世琴
封面设计：田淑文　责任校对：熊天荣

*

机械工业出版社出版（北京阜成門外百万庄南里一号）
（北京市书刊出版业营业許可証出字第 117 号）
机械工业出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行・新华书店经售

*

开本 787×1092 1/32・印张 7 3/4・字数 169 千字
1989 年 6 月北京第一版・1989 年 6 月北京第一次印刷
印数　0,001—3,080・定价：5.90元

*

ISBN 7-111-00691-7/TB・86

前　言

最优化方法是一门密切结合实际需要而发展起来的学科。它内容丰富，应用广泛。在工程技术、计划管理、系统工程、自动控制、军事科学和科学实验等各个领域都有着广泛的应用。为了适应科学技术发展的需要，满足各工科院校教学上的要求，我们以我校教学中使用的《常用优化计算方法》讲义为基础，结合多年教学经验，经过对原讲义的修改和补充，编写了这本《优化计算方法》。

本书从工科实际需要出发，针对优化设计中出现较多的非线性规划与线性规划问题，较系统地介绍了这两类规划的理论、方法与应用，着重介绍比较成熟的、有效的及在电子计算机上容易实现的求解方法。本书在阐述上力求深入浅出，语言上通俗易懂，凡是具有微积分的基本知识并粗知线性代数的读者都可使用本书。

本书共八个部分——绪论及七个章节。最优化问题就是极值问题，第一章简要介绍了极值的概念及其理论，即优化方法的理论依据；第二章的一维搜索介绍了单因素优化问题的求解方法，它是其他优化方法的基础；第三章和第四章介绍了无约束优化问题的求解方法，它们既可直接用来解决实际问题，同时又是求解约束优化问题的基础；第五章介绍了线性规划的求解方法，内容上相对独立；第六章简要介绍了约束优化问题的几种求解方法；第七章则列举了一定数量的实际应用问题。

为了便于读者理解和掌握，本书在介绍各种方法时，先

直观、形象地介绍其基本思路，让读者了解问题的实质，然后讲述方法及计算步骤，给出框图，通过数值计算例题使读者进一步熟悉方法。为帮助读者了解各种方法的来龙去脉，本书适当地叙述了一些数学推理过程，但所占篇幅甚少，读者如果对它们不感兴趣，可以跳过而直接学习具体方法及计算步骤，同样可以达到学习目的。考虑到优化设计中实际应用问题都比较复杂，如果在介绍优化算法时以具体实际问题作为例题，势必会冲淡主要的内容，所以在介绍算法时仅举出了数值计算例题，而将实际应用的 例 题 集中在第七章介绍。不从事机械行业工作的读者亦可不读第七章。考虑到优化算法的计算程序已比较普及，读者不难在有关书籍中找到所需程序，本书就不再收入有关计算程序，但各章仍配置了一定数量的习题，以便读者复习与巩固。

本书由王子若同志主编。第七章由陈永昌同志编写，其他部分由王子若同志编写。编写过程中，我们得到了吉林工业大学应用数学教研室同志们的关怀与支持，方沛辰、钱钲和杨印生等同志协助做了不少工作，特此向他们表示感谢。

由于编者水平有限，书中如有错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

编者

目　录

前言
绪论 …………………………………………………………………… 1
第一章　极值理论简介 ………………………………………………… 8
　§1.1　一元函数的极值 ……………………………………………… 8
　§1.2　二元函数的极值 ……………………………………………… 12
　§1.3　n 元函数的极值 ……………………………………………… 20
　§1.4　凸函数的极值性质 …………………………………………… 27
　§1.5　下降迭代算法 ………………………………………………… 32
　习题 ……………………………………………………………………… 39
第二章　常用的一维搜索方法 ………………………………………… 42
　§2.1　搜索区间的确定 ……………………………………………… 42
　§2.2　缩小搜索区间，0.618 法 …………………………………… 48
　§2.3　抛物线插值法 ………………………………………………… 55
　§2.4　二点三次插值法 ……………………………………………… 61
　习题 ……………………………………………………………………… 66
第三章　无约束最优化的梯度方法 …………………………………… 68
　§3.1　最速下降法 …………………………………………………… 69
　§3.2　Newton法 ……………………………………………………… 73
　§3.3　共轭梯度法 …………………………………………………… 77
　§3.4　变尺度法 ……………………………………………………… 92
　习题 ……………………………………………………………………… 100
第四章　无约束最优化的直接方法 …………………………………… 102
　§4.1　模式搜索法 …………………………………………………… 102
　§4.2　单纯形法 ……………………………………………………… 111
　§4.3　Powell直接方法 ……………………………………………… 120

习题 ……137
第五章 线性规划 ……138
§5.1 线性规划的基本概念 ……138
§5.2 单纯形方法 ……147
§5.3 人工变量法 ……158
§5.4 改进的单纯形方法 ……164
习题 ……173
第六章 约束最优化方法简介 ……176
§6.1 最优性条件 ……176
§6.2 可行方向法 ……184
§6.3 复合形法 ……191
§6.4 用线性规划逐步逼近非线性规划的方法 ……200
§6.5 惩罚函数法 ……205
习题 ……215
第七章 最优化方法在机械设计中的应用举例 ……218
§7.1 概述 ……218
§7.2 机械零部件优化设计举例 ……219
§7.3 农机优化设计举例 ……224
§7.4 自卸汽车液动六连杆倾卸机构的结构参数优化 ……228
§7.5 拖拉机转向梯形优化参数的寻查 ……236
参考文献 ……240

绪　论

（一）问题的提出

最优化问题来源于实际，当人们要完成某一项任务或解决某一实际问题时，常常有许多方案可供选择，方案有好的，有差的，人们关心的问题是如何选择最好的、合理的方案，例如某工厂如何利用现有的人力物力，合理安排生产使产量最高或成本最低；设计某种产品，如何合理选择某些参数使产品的某些性能指标最优等等。从前，人们常常凭直观或经验来选择好的或较好的方案，工程技术上，常常通过实验比较来选择较好的方案。对于简单的问题，凭经验与实验能解决一定问题，但不完全可靠，而当问题涉及的因素较多，变化过程较快，凭经验与试验就难于得到最优方案。而一个方案的选择是否恰当，常常给技术质量或经济效益带来很大的影响，为了适应现代工业技术发展的需要，要求在实验的基础上，用科学的方法找出最优方案，并用较准确的数值给出答案。这样就须要解决以下几个问题。首先是根据什么标准来衡量方案的优劣？这就需要根据实际问题提出优化指标，例如产量最高，强度最大，材料最省等等，再将问题数学化，根据优化指标建立目标函数。其次，要考虑方案的合理性，就是要根据实际问题，考虑方案需满足哪些条件才是可行的，将这些条件用数学关系式表示出来，形成约束条件。建立了目标函数和约束条件，就将实际问题抽象为数学问题，就是建立了数学模型。有了数学模型以后，还必须考虑第三个问题，即如何选取合适的数学方法来求出最优值，

找出最优方案。人们在探求优化方案的过程中，逐步产生和建立了许多求解优化问题的数学方法，从而形成一门系统的学科——优化理论与方法。

求最优值实际上就是求目标函数的最大值或最小值。古典的求最优值的方法是用初等代数或微积直接求解，有很大的局限性。而近代的优化方法是数值方法，它的主要特点是反复使用某一运算规律，用迭代方法逐步逼近最优解。适合于用电子计算机进行计算。

优化理论与方法是三十年代末期发展起来的，随着科学技术发展的需要，随着电子计算技术的发展与广泛使用，近几十年来得到迅速的发展，应用日益广泛，几乎渗透到工程技术、产品设计加工、系统工程、自动控制、军事科学等各个领域。从而形成一门崭新的、既有理论又有广泛应用的、以计算机为工具的学科，目前仍正在迅速发展之中，而且越来越受到人们的重视。

优化方法内容丰富，范围广泛。本书从实用的观点出发，编选了工程技术中常用的优化计算方法中的线性规划与非线性规划部分，力求照顾工程技术的特点，注意工程技术的应用，不作过多的理论探讨，讲清方法的来龙去脉，使读者掌握问题的实质，既有章可循又能举一反三。为了方便读者，配置了部分实例，并配有框图。

（二）最优化问题举例

最优化方法的应用范围十分广泛，有的十分复杂，这里我们仅举几个简单的例子。

例1 某工厂生产A，B两种产品，所有原料均为甲、乙、丙三种，每生产一个产品具体用料情况如下表：

	甲	乙	丙
A	9	3	14
B	4	10	5

已知产品A每件可得利润7千元，产品B每件可得利润12千元，如果这个厂现有原料甲360单位，原料乙300单位，原料丙200单位，问在现有条件下，应该生产产品A、B各多少，才能使获得的利润最多？

设生产A种产品x_1个，B种产品x_2个，则所获利润z为

$$z=7x_1+12x_2 \tag{0.1}$$

但应符合条件

$$\begin{aligned} 9x_1+4x_2&\leqslant 360\\ 3x_1+10x_2&\leqslant 300\\ 14x_1+5x_2&\leqslant 200 \end{aligned} \tag{0.2}$$

问题化为在约束条件(0.2)下求z的最大值，即求

$$\begin{aligned} \max\quad & z=7x_1+12x_2\\ \text{s.t.}\quad & 9x_1+4x_2\leqslant 360\\ & 3x_1+10x_2\leqslant 300\\ & 14x_1+5x_2\leqslant 200 \end{aligned}$$

式(0.1) $z=7x_1+12x_2$称为目标函数，式(0.2)称为约束条件。

例 2 非线性曲线的拟合问题

设某个物理量随着时间t的变化规律已知为

$$f(t)=a+be^{-ct}$$

其中a，b，c是待定参数，作n次试验，对于取定的n个t值t_i，该物理量对应的实验值为y_i($i=1,2,\cdots,n$)。现在要确定a，b，c值使$f(t)$所对应的曲线与实验点拟合，即在纵坐标方向上，曲线$y=f(x)$与实验点偏差z

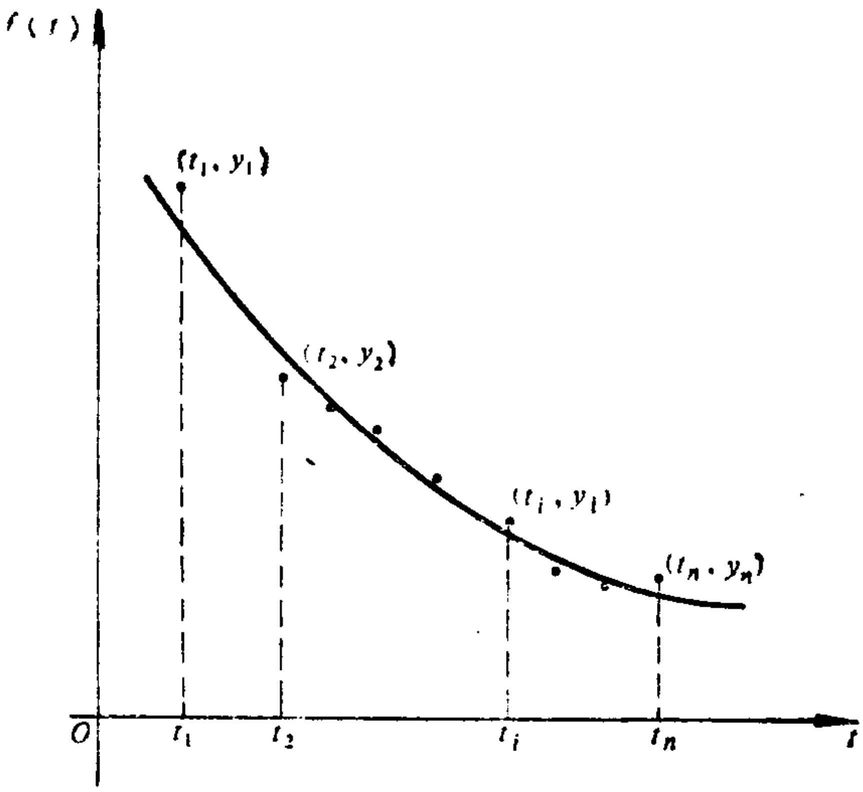

图 0.1

最小，见图0.1，而

$$z = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (a + be^{-ct_i})]^2$$

且规定 $c \geqslant 0$，$f(0) = 1$，故得 $a + b = 1$，问题可化为求

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (a + be^{-ct_i})]^2 \tag{0.3}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} a + b = 1 \\ c \geqslant 0 \end{cases} \tag{0.4}$$

式（0.3）是目标函数，式（0.4）为约束条件。a，b，c 是自变量。

例 3 两杆平面桁架的优化设计，如图 0.2 是一对称的平面桁架，在它的顶点处承受$2P$载荷的作用；两架之间的水

平距离为$2B$，设已选定的空心圆杆的壁厚为T，弹性模数为E，比重为ρ，屈服极限为σ_y，要求在满足强度与稳定要求的条件下，设计重量最轻的桁架。

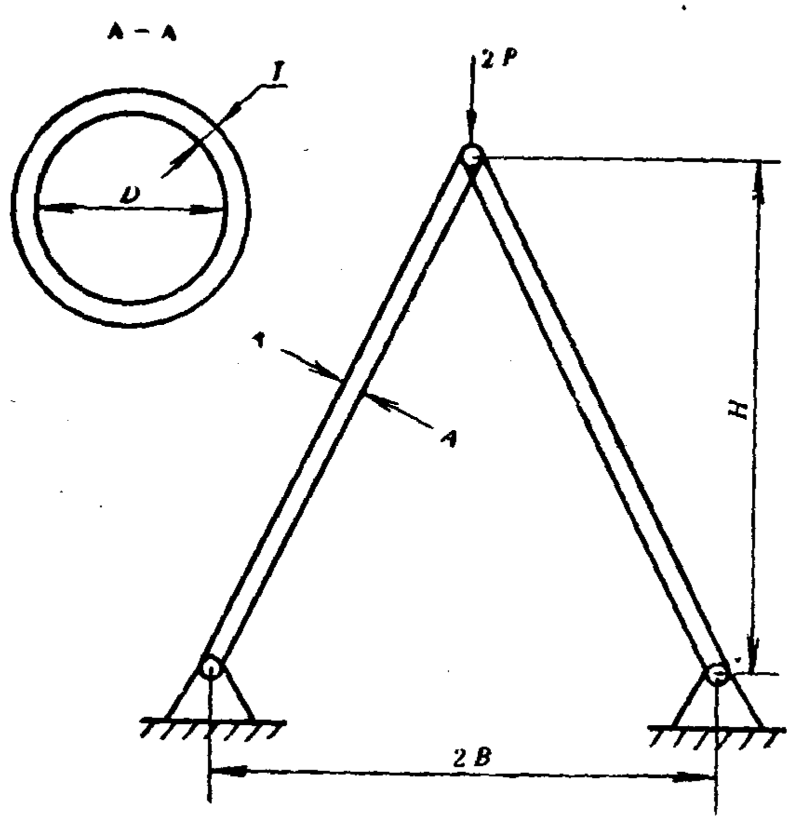

图 0.2

解 杆架的重量是由它的长度与内径确定的，已知杆的长度为$2\sqrt{B^2+H^2}$，设内径为x_1，令$x_2=H$，则杆架的体积为

$$f(x_1, x_2)=2\pi x_1 T\sqrt{B^2+x_2^2}$$

作为目标函数。

设桁架单位断面所受的力为$\sigma(x_1, x_2)$，则

$$\sigma(x_1, x_2)=\frac{P}{\pi T x_1}\frac{\sqrt{B^2+x_2^2}}{x_2}$$

且应满足

$$\sigma(x_1, x_2) \leqslant \sigma_y$$

$$\sigma(x_1, x_2) \leqslant \sigma_e$$

其中 σ_e是压杆稳定的临界应力，

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E(x_1^2 + T^2)}{8(B^2 + x_2^2)}$$

故得约束条件

$$\frac{P\sqrt{B^2 + x_2^2}}{\pi T x_1 x_2} \leqslant \sigma_y$$

$$\frac{P\sqrt{B^2 + x_2^2}}{\pi T x_1 x_2} \leqslant \frac{\pi^2 E(x_1^2 + T^2)}{8(B^2 + x_2^2)}$$

问题为化求

$$\min \quad f(x_1, x_2) = 2\pi T x_1 (B^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{s.t.} \quad P(B^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} - \pi T \sigma_y x_1 x_2 \leqslant 0$$

$$8P(B^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}} - \pi^3 T E x_1 x_2 (x_1^2 + T^2) \leqslant 0$$

$$x_1, \ x_2 \geqslant 0$$

对以上三个例子，我们分别建立了目标函数和约束条件，建立了数学模型。剩下的问题是求满足约束条件的目标函数的极值，其求解方法，将在后面的章节中讨论。

（三）优化问题的一般概念

大量实际问题的数学模型是下列形式的极小化问题

$$\min \quad f(x) \tag{0.5}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & g_i(x) \leqslant 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, m \\ & h_j(x) = 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, l \end{aligned} \tag{0.6}$$

这里的 x 是 n 维欧氏空间 R^n 中的点，或称为 R^n 空间的一个向量。

$$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

$f(x)$, $g_i(x)(i=1, 2, \cdots, m)$, $h_j(x)(j=1, 2, \cdots, l)$是定义在$R^n$中的实函数，称$f(x)$为目标函数，称式(0.6)为约束条件，称满足约束条件的点x为极小化问题(0.5)和(0.6)的**可行解**(或称可行点)，称全体可行解组成的集合D为**可行域**或**可行集**即

$$D=\{x \mid g_i(x)\leqslant 0, \quad i=1, 2, \cdots, m,$$
$$h_j(x)=0, \quad j=1, 2, \cdots, l\}$$

极小化问题(0.5)和(0.6)也称为数学规划问题。如果$f(x)$, $g_i(x)(i=1, 2, \cdots, m)$, $h_j(x)(j=1, 2, \cdots, l)$都是线性函数，则称为线性规划问题；如果这些函数中有非线性函数，则称为非线性规划问题。自变量x的分量可以连续取值，也可能某些分量只取特定的离散的数值（如整数值），如果约束条件要求x的某些分量取离散的数值，则问题(0.5)—(0.6)称为离散规划。如果x的分量只取整数值，则此规划称为整数规划。

如果极小化问题没有约束条件，即$D=R^n$则称为无约束极小化问题，或称无约束优化问题，一般表为

$$\min_{x\in R^n} f(x)$$

或

$$\min f(x)$$

至于求目标函数的最大值问题，可化为极小问题求解，即将求$\max f(x)$的问题化为求$\min -f(x)$问题。

数学规划问题内容丰富，分支很多，除了上面提到的以外，还有动态规划，多目标规划，随机规划等等，这里不一一作介绍。

第一章　极值理论简介

极值理论是优化方法的重要基础，本章先简要叙述一元函数与二元函数极值的基本知识，然后进一步介绍 n 元函数的极值知识。

§1.1　一元函数的极值

（一）一元函数的极值概念

如果一元函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义，函数 $f(x)$ 的极值点 x^* 的定义如下：

定义 1　设 x^* 是开区间 (a, b) 内的一点，如果对于点 x^* 的某个邻域内的任意点 x，函数值 $f(x)$ 都不小于（或不大于）$f(x^*)$，即

$$f(x) \geqslant f(x^*) \qquad (\text{或 } f(x) \leqslant f(x^*))$$

则称 x^* 是函数 $f(x)$ 的极小点（或极大点），$f(x^*)$ 称为函数 $f(x)$ 的极小值（或极大值）。

如果对于点 x^* 的某个邻域内的任意点 x，函数值 $f(x)$ 都大于（或都小于）$f(x^*)$，即

$$f(x) > f(x^*) \qquad (\text{或 } f(x) < f(x^*))$$

则称 x^* 是函数 $f(x)$ 的严格极小点（或严格极大点），对应的函数值 $f(x^*)$ 称为函数 $f(x)$ 的严格极小值（或严格极大值）。图1.1中点 x_1 是 $f(x)$ 的极大点，x_2 是 $f(x)$ 的极小点。

函数的极小值和极大值统称为函数的极值，极小点和极大点统称为函数的极值点。

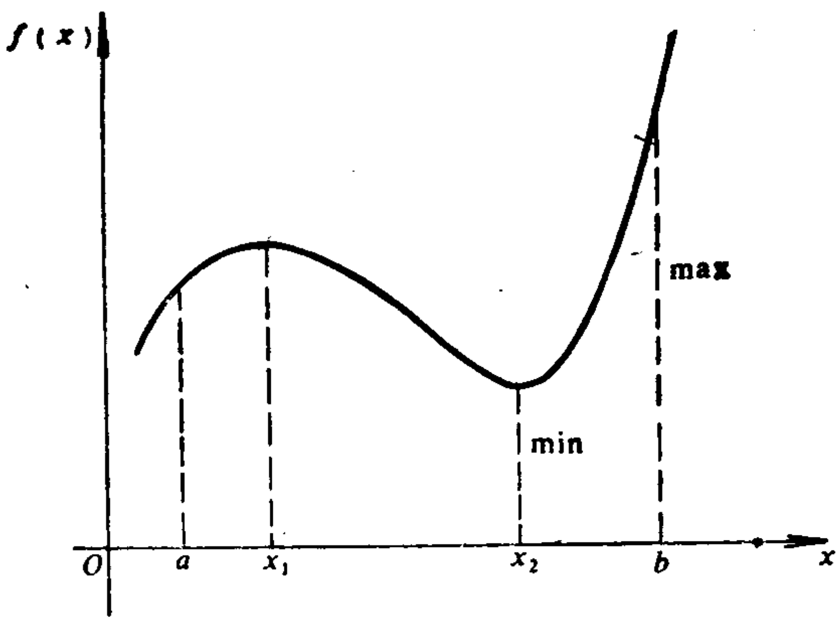

图 1.1

必须指出，函数的极值只是函数在某一点附近的局部性质。就是说，如果某一点是函数 $f(x)$的极值点，是将该点处的函数值与附近各点的函数值相比较而言。如果 $f(x)$在区间$[a, b]$上有多个极值点，并不意味极大点x_1处的函数值 $f(x_1)$一定比极小点x_2处的函数值 $f(x_2)$大，如图 1.2。

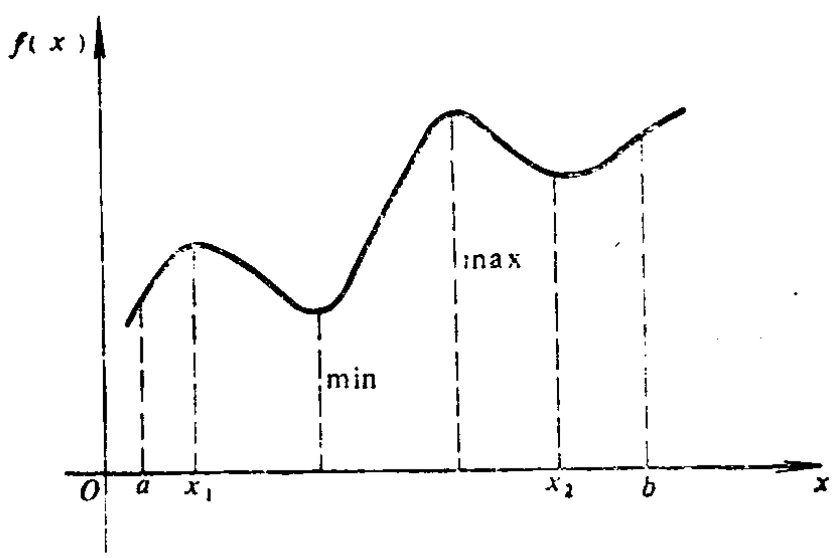

图 1.2

一个在闭区间$[a, b]$上连续的函数$f(x)$，必定存在全区间上的最大值和最小值，相应的点称为函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的最大值点和最小值点。容易看出，函数的最大值（最小值）点，或者是极值点，或者是边界点。因此，求函数$f(x)$在$[a, b]$上的最大（小）值点，只须求出$f(x)$在$[a, b]$上的极值点，再将各极值点处的函数值和边界点a、b处的函数值进行比较，从中求得最大(小)的函数值。见图1.1和图1.2。

（二）一元函数取得极值的条件

要求函数$f(x)$的极值点，必须先了解函数在极值点处的性态。

假设函数$f(x)$在(a, b)内一阶导数存在，x^*是$f(x)$在(a, b)内的极小点，由图1.3可以看出，在x^*的左侧，函数$f(x)$是下降的，曲线$y=f(x)$的切线斜率为负，即$f'(x)<0$。在x^*的右侧，函数$f(x)$是上升的，曲线$y=f(x)$的切线斜率为正，即$f'(x)>0$。而在点x^*处，正

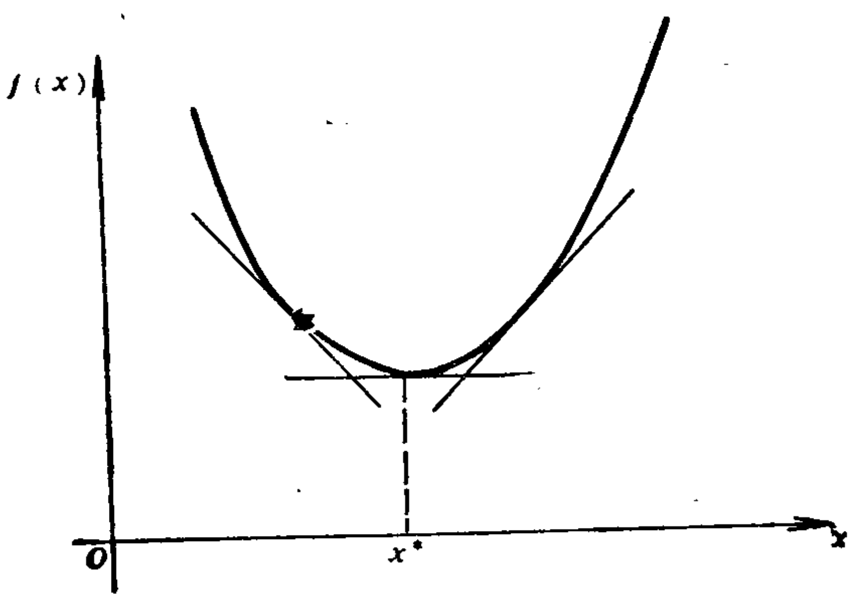

图 1.3

好是函数$f(x)$由下降变为上升的转折点，曲线$y=f(x)$在x^*处的切线是水平的，斜率为零，即$f'(x^*)=0$。

定理1.1　（必要条件）　如果

（1）$f(x)$在区间(a,b)内一阶导数存在；

（2）x^*是$f(x)$在(a,b)内的极值点。

则在x^*处函数$f(x)$的导数等于零，即

$$f'(x^*)=0$$

我们把$f'(x)=0$的点称为**驻点**。如果函数$f(x)$的一阶导数存在由定理1.1可知，$f(x)$的极值点必是驻点，但驻点不一定是极值点，例如$x=0$是函数$f(x)=x^3$的驻点，但它不是极值点。因此，要求函数的极值点，可以从驻点中去找。那么，如何从驻点中确定哪些是极值点呢？如果是极值点，是极大点还是极小点？下面的定理1.2，给出了判别极值点的充分条件，回答了上述问题。

定理1.2（充分条件）　如果

（1）$f(x)$存在二阶连续导数$f''(x)$；

（2）x^*是$f(x)$的驻点，即$f'(x^*)=0$。

则当$f''(x^*)>0$时，x^*是极小点；当$f''(x^*)<0$时，x^*是极大点。

极值的这个充分条件，有明显的几何解释：如果$f''(x^*)>0$，说明一阶导数$f'(x)$在x^*处是增大的，而在x^*处$f'(x^*)=0$，所以$f'(x)$由左到右经过x^*时由负变正，函数值$f(x)$由下降变为上升，说明x^*是极小点见图1.3。对于$f''(x^*)<0$的情形，利用同样的道理可知x^*是$f(x)$的极大点。而且，如果$f''(x^*)>0$，曲线$y=f(x)$在x^*附近向下凸；反之，如果$f''(x^*)<0$，曲线在x^*附近向上凸。可以用函数的二阶导数$f''(x)$来描述函数的凸性。

例 求$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$的极值

由于 $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x^2-3x+2)$

$$=6(x-1)(x-2)$$

所以，$f(x)$的驻点是$x_1=1$，$x_2=2$。又

$$f''(x)=12x-18$$

$$f''(1)=-6<0 \qquad f''(2)=6>0$$

所以，$x_1=1$为极大点，极大值$f(1)=2$；$x_2=2$为极小点，极小值$f(2)=1$。

§1.2 二元函数的极值

（一）极值概念

与一元函数相类似，对于二元函数$z=f(x, y)$的极值点定义如下：

定义 2 如果二元函数在点$M(x_0, y_0)$处的函数值$f(x_0,y_0)$不小于M点某邻域内任意点(x,y)处的函数值，即

$$f(x, y)\leqslant f(x_0, y_0)$$

则称M点是函数$f(x, y)$的极大点，函数值$f(x_0, y_0)$称为极大值。

如果点M处的函数值$f(x_0, y_0)$不大于M点某邻域内任意点(x, y)处的函数值即

$$f(x, y)\geqslant f(x_0, y_0)$$

则称M点是函数$f(x, y)$的极小点，函数值$f(x_0, y_0)$称为极小值。

二元函数$z=f(x, y)$在几何上表示空间曲面，如图1.4。

（二）极值点的必要条件和充分条件

我们以极小点为例来分析极值点的必要条件，对于极大