目　录

第三篇　用解析几何的坐标法绘制列线图

第四篇　网络图及其与列线图的关系

第一篇　直线函数尺和专用计算尺

函数尺是图算法中最重要的一个基本概念，它是构成各种算图的一个基本元素。

函数尺按其形状可分为两大类：一类是直线形状的叫做直线函数尺；另一类是曲线形状的叫做曲线函数尺。本篇只涉及用数轴建立直线函数尺的问题，至于笛氏坐标系中的直线函数尺和曲线函数尺则留待第二篇再行介绍，但本篇所论及的许多概念和结论，对于所有函数尺都同样有效。

本篇前一部分详细讨论直线函数尺并介绍若干类常用的直线函数尺，后一部分介绍直线函数尺的一种应用——专用计算尺。

第一章　直线函数尺

§1　图　　尺

以后我们将会知道，绝大多数算图* 都是由一些代表某个公式中各个变量的图尺构成的。所谓**图尺**，就是一条载有**分度**（或叫尺度、刻度、标度）的直线（图1.1）或曲线（图1.2），这些分度与一组按照数值大小的顺序而排列的数相对应。这条直线或曲线叫做图尺的轴（或叫底、负荷线），简称**尺轴**。这些数叫做图尺的**标值**（或叫标数、读数），与标值所对应的那些点叫做**标值点**。为了图示清晰，标值点用与轴相交的短线标出。这些短线叫做**分度线**。分度线的全体构成了图尺的分度。

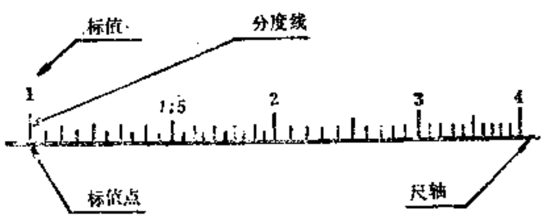


图 1.1　直线图尺

图 1.2　曲线图尺

以上所说的轴、标值、标值点、分度线等，是构成图尺的基本元素。

轴是直线的叫做**直线图尺**（图1.1）。轴是曲线的叫做**曲线图尺**（图1.2）。

在有的图尺上，相同数量级的标值点之间的分度情况是不同的。例如在图1.1中我们看到，标值1和2之间分成二十个小格，标值2和3，3和4之间各分成十个小格，分度线的长短也不一样。我们把一个图尺中与最大数量级的标值相对应的那些最长的分度线，叫做这个图尺的**主分度**。主分度以下叫**细分度**。细分度还可进一步分为二级分度、三级分度等等，分度线也按级依次地短一些。一般地只注出主分度的标值，例如图1.1中的标值

* 在有的算图（例如由三个一般线族构成的网络图）中不出现图尺。

1，2，3和4。但当遇到两个相邻主分度的间距过长，或其间细分度的级较多时，为了避免误读标值，我们往往在一些细分度旁也注以标值，例如图1.1中的标值1.5。同级的两个主分度之间，细分度的级可以是不同的，这要根据它们之间的间距大小及分度的性质而定，以便于目估插入值为准。图1.1所示的直线图尺有四级分度。其主分度标值间距为1，都注有标值，依次为1、2、3和4。二级分度的标值间距为0.5，图中只注出了一个二级分度的标值，即1.5。三级分度和四级分度的标值间距分别为0.1和0.05，这两级的分度皆未注标值。在这个图尺上只有标值点1和2之间有四级分度。

如果图尺的任意两个标值点之间的距离与它们的标值的增量成比例，那么，这样的图尺就叫做**均等图尺**（或叫线性图尺）。米尺上的刻度就是这种分度的一个例子。除此之外的其他一切分度形式的图尺都是非均等图尺（或叫非线性图尺）。收音机上的调谐刻度盘的分度就是这种分度的一个例子。

§2　函数尺和直线函数尺

前面所给的图尺的概念，只是从形式上定义了一种尺，这就是凡出现在算图中带有分度和标值的直线或曲线，我们都称它为图尺。至于它的分度和标值数字等是怎么来的，它们代表什么，有什么意义，则完全没有说明。为了说明这些问题和绘制图尺，现在我们引进函数尺的概念。

函数尺是这样的直线或曲线图尺，它的分度（标值点）的标值是某个变量的值，而各个分度（标值点）的坐标与上述变量的对应函数的值成比例。这样，函数尺就以其本身点的标值和坐标表示出一个变量与其函数之间的关系。

在数轴上，点的坐标由一个实数来表示，所以在数轴上利用某个变量的一个函数即可建立这个变量的直线函数尺。

在平面笛氏坐标系中，点的坐标由一对有序实数，即点的横标x和纵标y来表示。所以在平面上需要某个变量的两个函数才能建立这个变量的一条函数尺。如果两个函数中有一个为常数或零，或是两个函数存在线性关系，则建立直线函数尺。前一种情形得特殊位置（平行、垂直或重合于坐标轴）的直线函数尺。后一种情形得一般位置的直线函数尺。除上述情形外，得曲线函数尺。

本章只介绍直线函数尺，而且是建立在数轴上的直线函数尺。除此之外的其他情况的函数尺均见第三篇。

另外，算图中的函数尺叫做这个算图的图尺，而算图中的图尺，都是某个变量的函数尺。所以在以后的叙述中，我们对这两个名称的使用没有作严格的区分。

直线函数尺是载于一条指定的坐标轴（数轴）上的直线图尺，它的分度（标值点）的标值，是某个变量的值，而它的各个分度（标值点）的坐标与上述变量的对应函数的值成比例。

设有变量z的一个函数$f(z)$。我们选定一个适当的正数μ做比例系数。现在任取一直线做坐标轴，我们称之为x-轴，并规定它的原点和方向。根据上述直线函数尺的定义，我们得动点（z）的流动坐标

$$x=\mu f(z) \tag{2.1}$$

在函数$f(z)$的定义域内给变量z以一系列值，于是在x-轴上就确定了一系列与之对应并

以式（2.1）的 x 为坐标的点（图2.1）。这些点即以对应的 z 值为标值。作出分度线并注以标值后，我们就做成了一条图尺，这就是变量 z 的一条直线函数尺，简称 **z尺**。x-轴就是这条直线函数尺的尺轴。我们规定，在本书中以1毫米做为坐标轴的单位长度。

由于实数的连续性，不可能于直线函数尺上做出全部标值点的分度线。根据实际需要，我们只按适当的间距求出有限数量的标值点并作出分度，就像我们在§1图尺中所说的那样。

比例系数 μ 叫做**尺系数**（或叫尺模数）。尺系数恒取正数。

据以绘制函数尺的函数（2.1）叫做**尺方程**。

绘制直线函数尺时，变量的变化范围是在定义域内根据实际需要和绘图可能来决定的。我们把这个范围叫做变量的**取值范围**（有的书中叫资用间节），它是一个闭区间。在取值范围的全部数中，最小的一个叫做**初值**（下限值），记作 $\underline{z}$；最大的一个叫做**终值**（上限值），记作 $\overline{z}$。所以，取值范围可表示为 $\underline{z} \leqslant z \leqslant \overline{z}$，或简记作 $z : \underline{z} \sim \overline{z}$。

在直线函数尺上与初值对应的标值点叫做尺的**始端**，与终值对应的标值点叫做尺的**终端**。所以这两个值可统称之为**端值**。以后在提到函数尺时，都假设是已给定了端值，不再另作说明。

直线函数尺由始端到终端的方向（也就是标值从小到大的方向）叫做这个函数尺的**尺方向**。注意，尺方向不是轴的方向，必须把这两个概念区别开来。两者可以相同，也可以相反。

尺方向和轴的方向一致的函数尺叫做**顺向尺**。反之，叫做**逆向尺**。显然，增函数的函数尺为顺向尺，而减函数的函数尺为逆向尺。为了在图上把这两者（尺方向和轴的方向）表示清楚，避免混淆，我们把轴的方向用箭头标明在轴上，而尺方向则在函数尺标值近旁另用一个箭头标明，如图2.2所示。图2.2（a）所示为一顺向尺，（b）所示为一逆向尺。

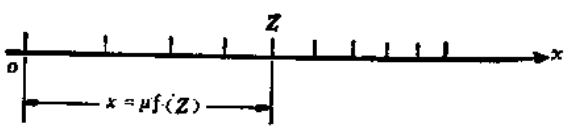


图 2.1　函数$f(z)$的函数尺

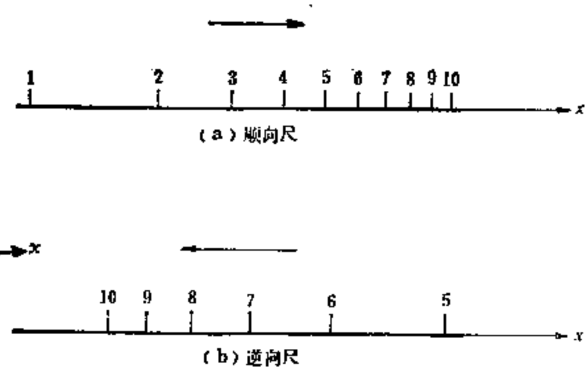


图 2.2　尺轴方向和尺方向的表示方法

在算图中一条直线函数尺（亦即图尺）的有用部分是两个端值之间的那一段，作图时只作出这一段就够了。对于某一给定的函数 $f(z)$，当确定了端值 $\underline{z}$ 和 $\overline{z}$ 之后，如果初值函数值 $f(\underline{z})$ 不等于零，特别是当它的标值点离原点较远时，将会使作出分度遇到麻烦。为了绘制直线函数尺的方便，需对尺方程（2.1）所给的坐标做移轴处理。我们把原点移至初值点 $\underline{z}$ 即得各标值点的新坐标如下

$$x = \mu[f(z) - f(\underline{z})] \tag{2.2}$$

式（2.2）就是据以绘制初值函数$f(\underline{z})$不等于零的直线函数尺的尺方程。我们把移轴后的新原点（标值为$\underline{z}$）叫做直线函数尺的**基点**。但是应当知道，这样做只是为了便于作出直线函数尺的分度，在实际算图中各函数尺的位置是依一定的几何关系排定的，不能随便移动。

显然，当初值函数$f(\underline{z})=0$时，基点即原点。无论基点是否在原点，它的标值都不一定是零。

直线函数尺的**尺长**，指的是它的两个端点之间的长度，用L表示，单位为毫米。尺长L根据预期的算图尺寸、尺的精度、变量的取值范围等具体条件来决定。

当确定了端值$\underline{z}$、$\overline{z}$和尺长L之后，尺系数μ即由下式确定

$$\mu=\frac{L}{|f(\overline{z})-f(\underline{z})|} \tag{2.3}$$

例题2.1 为变量t的下列函数

$$f(t)=t^2 \qquad (a)$$

绘制一直线函数尺，给定条件是$0\leqslant t\leqslant 5$，尺长$L=150$毫米。

解：已知$\underline{t}=0$，$\overline{t}=5$，$L=150$，根据式（2.3）求出所需的尺系数

$$\mu=\frac{L}{|f(\overline{t})-f(\underline{t})|}=\frac{150}{|5^2-0^2|}=6$$

根据式（2.1）列出尺方程

$$x=\mu f(t)=6t^2, \quad (0\leqslant t\leqslant 5) \qquad (b)$$

给变量t以一系列整数值，求出对应的x值，现将计算结果列表如下

t	0	1	2	3	4	5
$x=6t^2$	0	6	24	54	96	150

作图：取水平直线为x-轴，指定原点O和轴的方向（向右为正，以后如不加说明，都是如此），按上表数据求出各标值点并划出分度线，注以对应的标值（即变量t的值），即得所给函数（a）的直线函数尺——t尺，如图2.3所示。图中没有注出x-轴的符号，以后一般也如此。

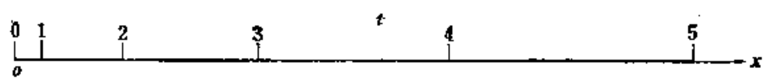


图 2.3 $f(t)=t^2$ 的函数尺

例题2.2 为变量u的下列函数

$$f(u)=\sqrt{u} \qquad (a)$$

绘制一直线函数尺。给定条件为$10\leqslant u\leqslant 100$，$L=120$毫米。

解：已知 $\underline{u}=10$，$\overline{u}=100$，$L=120$，根据式（2.3）求出尺系数

$$u=\frac{L}{|f(\overline{u})-f(\underline{u})|}=\frac{120}{|\sqrt{100}-\sqrt{10}|}\doteq 17.5$$

为便于计算，取$\mu=20$。这样，尺长将为

$$L=\mu|f(\overline{u})-f(\underline{u})|=20\times(\sqrt{100}-\sqrt{10})=137\text{毫米}$$

略长于原设的120毫米。现在我们以初值$\underline{u}=10$为基点，根据式（2.2）写出尺方程

$$x=\mu[f(u)-f(\underline{u})]=20[\sqrt{u}-\sqrt{10}]$$

即

$$x=20\sqrt{u}-63.2 \tag{b}$$

以10为间距给出u从10到100的值，将按式（b）计算的结果列表如下：

u	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$x=20\sqrt{u}-63.2$	0	26.2	47	63	78	92	104	116	127	137

作图步骤同前，不赘述。据此绘制的u尺示于图2.4。

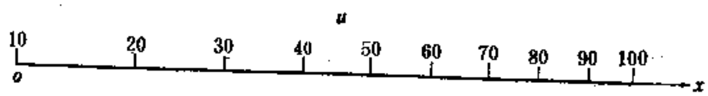


图 2.4 $f(u)=\sqrt{u}$的函数尺

注意，在本例中直线函数尺基点的标值不是零，基点也不是轴的原点，原点在基点左方63.2毫米处，图中未给出。从原点到基点这段虽不构成函数尺的有用部分，但以后我们将会看到，在有些情况下它对确定图尺在算图中的位置是有用的。

以上二例中的函数尺都是顺向尺。下面我们再看一个逆向尺的例子。

例题2.3 为变量w的下列函数

$$f(w)=\frac{1}{w} \tag{a}$$

绘制一函数尺。给定条件为$5\leqslant w\leqslant 10$，$L=100$毫米。

解： 已知 $\underline{w}=5$，$\overline{w}=10$，$L=100$，根据式（2.3）求出尺系数

$$\mu=\frac{L}{|f(\overline{w})-f(\underline{w})|}=\frac{100}{\left|\frac{1}{10}-\frac{1}{5}\right|}=1000$$

以初值$\underline{w}=5$为基点，根据式（2.1）写出尺方程如下：

$$x=\mu[f(w)-f(\underline{w})]=1000\times\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{5}\right)$$

即

$$x=\frac{1000}{w}-200 \tag{b}$$

以1为间距给出w从5到10的值，将按式（b）计算的结果列表如下

w	5	6	7	8	9	10
$x=\frac{1000}{w}-200$	0	−33	−57	−75	−89	−100

作图：取水平直线为x-轴，指定基点和轴的方向（向右为正），按上表数据绘制的w尺如图2.5所示。我们看到，减函数$\frac{1}{w}$的函数尺是逆向尺。图中分别用箭头示出了轴的方向和尺方向。在这个函数尺上基点的标值为5，而x-轴的原点O在基点5_w的左方200毫米处，图中未给出。

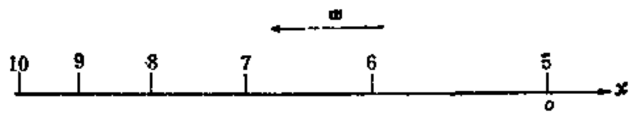


图 2.5　$f(w)=\frac{1}{w}$的函数尺

§3　函数中的常数对函数尺的影响

一个变量的函数除了包含这个变量之外，有时还包含一些常数。常数在函数中存在的形式不同，对函数尺所产生的影响也不一样。下面我们研究三种基本情形。

3.1　函数中的常数项对函数尺的影响　这类函数一般可写成如下形状

$$\phi(z)=f(z)+c \tag{3.1}$$

上式中$f(z)$表示函数$\phi(z)$中不含常数项的部分，c表示函数$\phi(z)$本身所带有的常数项。

现在我们为函数（3.1）绘制一直线函数尺。根据式（2.1）得尺方程

$$x=\mu\phi(z)=\mu[f(z)+c]$$

或写作

$$x=\mu f(z)+\mu c \tag{3.2}$$

根据式（2.1），式（3.2）中$\mu f(z)$是函数$f(z)$的尺方程中的全部项，设记为x'，即

$$x'=\mu f(z) \tag{3.2'}$$

实际上这是函数$f(z)$的尺方程。两个尺方程（3.2）和（3.2′）只相差一个常数项μc。由此可知，带有常数项c的函数$f(z)+c$与不带有常数项的函数$f(z)$，两者的函数尺形状完全相同，只是前者相对于后者来说，在位置上沿轴移动了一段距离μc，移动的方向依常数c的符号而定。

例题3.1　为变量u的下列两个函数

$$f(u)=u \tag{a}$$

$$\phi(u)=u+2 \tag{b}$$

分别绘制一直线函数尺并比较其异同。给定条件都是$0\leqslant u\leqslant 10$，$\mu=10$。

解：根据所给条件并皆以原点为基点，分别列出函数（a）和（b）的尺方程

$$x'=\mu f(u)=10u \tag{a'}$$

$$x=\mu\phi(u)=10u+20 \tag{b'}$$

据上列二尺方程绘制的函数尺如图3.1所示。

比较图3.1（a）和（b）所示的两条函数尺可以看出，在两尺轴的原点对齐的情况下，两尺只是在位置上相差了一段距离$\mu c=20$毫米，而尺的分度结构完全相同。在图3.1（b）中我们看到，标值为0的点不是x-轴的原点。

3.2　函数的常系数对函数尺的影响　这类函数一般可写成如下形状

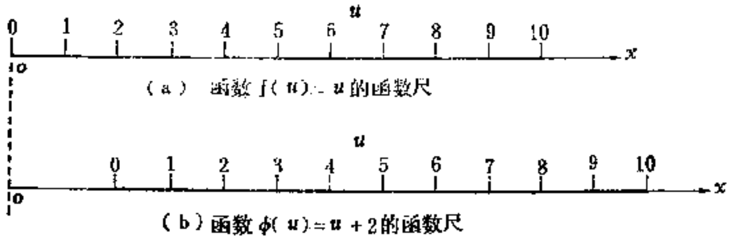


图 3.1 函数中的常数项对函数尺位置的影响

$$\phi(z)=c\cdot f(z) \tag{3.3}$$

上式中 c 表示变量 z 的函数$\phi(z)$中的常数因子，$f(z)$表示 其中 不含常系数的因式。如果 $f(z)$是一个多项式，那么这个多项式中各项 的 常 系 数 应 该 是 互 质的。例如，$\frac{\pi}{4}d^2$，$25.4I$，$3(2\sin t+5\lg t)$ 等就是 这种情形。

设尺系数为μ，为函数（3.3）绘制一函数尺，根据式（2.1）得尺方程

$$x=\mu\cdot\phi(z)=\mu\cdot c\cdot f(z) \tag{3.4}$$

上式中 μ 和 c 都是常数，它们的积$\mu\cdot c$仍是常数，设以μ' 表示之，即令

$$\mu'=\mu c \tag{3.5}$$

将关系（3.5）代入式（3.4），则有

$$x=\mu' f(z) \tag{3.6}$$

式（3.6）相当于尺系数为μ'时的函数$f(z)$的尺方程。但是我们知道，它是函数$c\cdot f(z)$的尺方程，并不是函数$f(z)$的尺方程。我们把 原来的 尺系数 μ 叫做 **真尺系数**，而把μ'叫做**有效尺系数**。

真尺系数是根据预期的尺长和给定的变量取值范围，按照 尺系数的 公式（2.3）计算得出的。以后在设计算图时，确定各图尺的相对位置，确定互相关联的尺系数或进行与尺系数有关的其他计算中，用的都是真尺系数。有效尺系数只与计算标值点的坐标有关。这一点绝对不能混淆。当它们以具体的常数形式出现时往往不易看出而容易弄错。例如，对于尺系数$\mu=50$时函数$\lg u^2$的函数尺 的尺 方程是

$$x=50\lg u^2$$

但也可写作

$$x=100\lg u$$

但是，它是函数$\lg u^2$的尺方程，尺系数是$\mu=50$，而不是函数 $\lg u$的 尺方程，尺 系数 更不是100。

3.3 特定位置的常数对函数尺的影响 在有的函数中常数和变量一起组成不可离析的形式，这种情况是多种多样的。例如，$\lg(z+c)$，$\frac{ax+b}{cx+d}$，$\sin(\omega t+a)$等等就是这种情形。这种函数可一般表示为

$$f(z,c) \tag{3.7}$$

这种函数有或没有那个（或那些）常数，其函数尺的分度结构是根本不同的，所以我们把它当做一个新的函数来考虑。

例题3.2 为变量 θ 的下列两个函数

$$f(\theta)=\sin\theta \quad \text{(a)}$$

$$g(\theta)=\sin 2\theta \quad \text{(b)}$$

各绘制一直线函数尺并比较其分度结构。给定条件为 $0\leqslant\theta\leqslant45°$，$L=120$。

解：根据给定条件分别绘制函数（a）和函数（b）的函数尺如下：

1．对于函数 $f(\theta)=\sin\theta$，已知 $\underline{\theta}=0$，$\bar{\theta}=45°$，$L=120$，根据式（2.3）求出尺系数

$$\mu=\frac{120}{|\sin 45°-\sin 0|}=170$$

根据式（2.1）可得尺方程

$$x=170\sin\theta \quad \text{(a')}$$

据此绘制的函数尺示于图3.2（a）（计算从略，后同）。

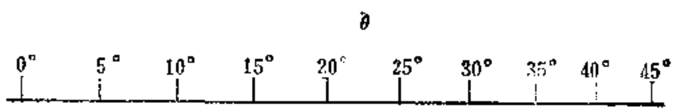
2．对于函数 $g(\theta)=\sin 2\theta$，已知 $\underline{\theta}=0$，$\bar{\theta}=45°$，$L=120$，则尺系数为

$$\mu=\frac{120}{|\sin(2\times45°)-\sin(2\times0)|}=120$$

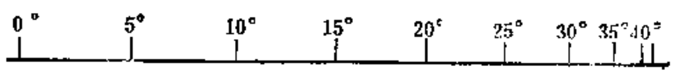
根据式（2.1）得尺方程

$$x=120\sin 2\theta \quad \text{(b')}$$

据此绘制的函数尺示于图3.2（b）。



（a）函数 $f(\theta)=\sin\theta$ 的函数尺



（b）函数 $g(\theta)=\sin 2\theta$ 的函数尺

图 3.2　函数中特殊位置的常数对函数尺分度结构的影响

比较一下图3.2（a）和（b）所示的两条函数尺，可以明显地看出它们的分度结构有本质上的不同。

3.4 关于直线函数尺的注记　直线函数尺的实质是：它把有着函数关系的两个变量——自变量和因变量（即函数）用数（代表自变量的值）和有向线段的长度（代表函数的值）在轴上反映出来。在直线函数尺上这两者必须建立一一对应的关系。因此，只有单值的单调连续函数才能够绘制函数尺。假若不是这样的函数，但是它存在着单值单调连续变化的区间，那么它的这个区间可用直线函数尺表示。对于周期函数，我们就只考虑它的最小正周期内的情况。理由是明显的。因为如果不是这样，那么将会有自变量的一个值与几个不同的函数值相对应（多值函数）。或者相反，自变量的几个不同的值与一个函数值相对应（非单调函数）。这反映在函数尺上为：或者在同一条函数尺的不同位置上出现许多标值相同的标值点，或者在同一个点上注有许多不同的标值。这将引起分度和标值的混乱，这样的直线函数尺是不能使用的。

§4 对 数 尺

4.1 对数尺 根据变量 z 的对数函数 $\log_a z$ 构绘的函数尺叫做对数尺。对数的底a，可以是不等于零的任意正实数。以后如果不附加特别说明，我们指的是以10为底的常用对数并以 $\lg z$表示。对数尺的尺方程为

$$x=\mu \lg z \tag{4.1}$$

例题4.1 为变量w绘制一对数尺，给定条件为$1\leqslant w\leqslant 10$，$L=125$毫米。

解：根据式（4.1）写出尺方程

$$x=\mu \lg w \tag{a}$$

已知$\underline{w}=1$，$\overline{w}=10$和$L=125$。据此求出尺系数

$$\mu=\frac{L}{|\lg \overline{w}-\lg \underline{w}|}=\frac{125}{|\lg 10-\lg 1|}=125$$

将求得的尺系数之值代入式（a），我们得到尺方程

$$x=125 \lg w \tag{b}$$

给w以从 1 到10一系列整数值，由对数表查出相应的对数，逐一代入式（b），将计算结果列表如下

w	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x=125\lg w$	0	38	60	75	87	97	106	113	119	125

据此绘制的函数尺示于图4.1，这就是变量w的对数尺。在这条尺上基点即原点，而它的

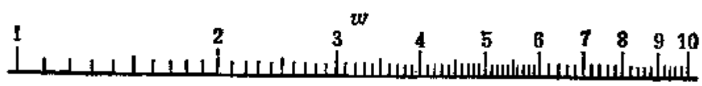


图 4.1 对数尺——$f(w)=\lg w$的函数尺

标值却不是零。在图4.1的对数尺上，我们做出了细分度，这不是根据计算做出的，它的做法将在后面介绍。

对数尺的分度结构有一些特点，掌握这些特点对绘制算图有很大帮助。下面我们就来研究一下它的这些特点。

4.2 对数尺的节和尺系数 作为尺方程，对于变量 z 的任何函数$f(z)$ 都有

$$x=\mu f(z)$$

在直线函数尺上任意两个标值点，例如$z=a$和$z=b$，之间的距离（毫米数）Δx 是这两个点的坐标x_1和x_2之差的绝对值，即

$$\Delta x=|x_2-x_1|=\mu|f(b)-f(a)| \tag{4.2}$$

由此可知，在任何一条直线函数尺上，只要两个函数值之差的绝对值相等，那么，与这两个函数值对应的标值点之间的距离就相等。对于对数函数来说，我们有

$$|\lg(10z)-\lg z|=1$$

式中 z 表示变量 z 在取值范围内的任意一数。由此可知，比值为10的任意两数，其对数之差恒为 1 。这就是说，在对数尺上任何标值之比为10的两点之间的距离为一常数。我们把

对数尺上这样两个点之间的一段叫做它的一个节，其长度就叫做节长，以符号l_0表示之。特别地，我们把标值为 1 和10的两个标值点之间的这一节叫做基本节。

含有n个节的对数尺，它的尺长等于 n 倍节长，即

$$L=nl_0 \tag{4.3}$$

对数尺的尺系数等于它的节长，即

$$\mu=l_0 \tag{4.4}$$

无论它有多少节和尺长是多少，都是如此。因为根据式（4.2），对数尺上标值为a和b的二不同点之间的距离是

$$\Delta x=\mu\,|f(b)-f(a)|=\mu\,|\lg b-\lg a|$$

当 $b=10a$ 时这个距离就是节长，即$\Delta x=l_0$，而$\lg b-\lg a=\lg 10a-\lg a=1$　所以立即得到式4.4所表达的关系，它与节数和尺长都无关。

对带有常系数的对数函数来说，有效尺系数等于节长。设变量z的一个带有常系数 c 的对数函数为$\varphi(z)=c\lg z$，取尺系数为μ，则它的尺方程为

$$x=\mu c\lg z$$

令$\mu c=\mu'$，则有

$$x=\mu'\lg z \tag{4.5}$$

我们知道，在式（4.5）中$\mu'=\mu\cdot c$是函数尺$c\lg z$的有效尺系数。

对数尺所包含的节数 n，等于其两个端值$\overline{z}$和$\underline{z}$的对数差（绝对值），即

$$n=|\lg\overline{z}-\lg\underline{z}| \tag{4.6}$$

因为，由式（2.3）可得

$$L=\mu\,|\lg\overline{z}-\lg\underline{z}|$$

对于对数尺来说，$L=nl_0$，$\mu=l_0$，把这关系代入上式，消去等号两边的公因子l_0即得式（4.6）。

由式（4.3），（4.4）可得

$$\mu=\frac{L}{n} \tag{4.7}$$

即，对数尺的尺系数等于尺长除以节数所得之商。

例题4.2　设有一对数尺（变量为z），两个端值分别为0.01和1000。问它包含多少个节？如尺长为150毫米，则尺方程如何？

解： 已知$\underline{z}=0.01$，$\overline{z}=1000$，$L=150$。根据式（4.6）得节数为

$$n=|\lg 1000-\lg 0.01|=5$$

又，根据式（4.7）得尺系数为

$$\mu=\frac{150}{5}=30$$

所以，这条对数尺的尺方程为

$$x=30\lg z$$

例题4.3　为变量w绘制一对数尺，给定条件为$2\leqslant w\leqslant 5$，$L=50$。

解： 已知$\underline{w}=2$，$\overline{w}=5$，$L=50$，根据式（2.3）求出尺系数

$$\mu=\frac{100}{|\lg 5-\lg 2|}=125$$

所以，题设所要求的对数尺的尺方程为

$$x=125\lg w$$

这个尺方程和例题4.1所作的对数尺的一样。实际上本例题所要作的对数尺就是例题4.1(图4.1）那条尺上标值为2和5之间的那一段。现在只要从已经作过的那条尺上取下（即描绘出）这一段即可。这里，我们就不再作图了。

4.3 对数尺分度的周期性 我们已经知道，含有多个节的对数尺其各个节长都相等。现在我们再来研究其每个节的分度结构。为了便于叙述，我们先把例题4.2中所讨论的对数尺绘制出来（图4.2）。它是一条五节对数尺，各节的标值范围是

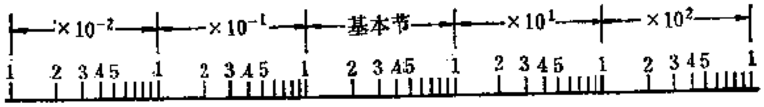


图 4.2 对数尺分度的周期性

0.01—0.1/0.1—1/1—10/10—100/100—1000

其中标值1—10的一节是基本节。设以原点为基点，尺系数为μ，命w^0表示半闭区间〔1，10〕内的任意一个数，则基本节内标值点的坐标x_b为

$$x_b=\mu\lg w^0 \tag{4.8}$$

基本节以外其他节上的标值数w可以写成

$$w=w^0\times 10^n$$

的形式*，式中n为正或负的整数。显然w和w^0的有效数字相同。例如$0.0325=3.25\times 10^{-2}$；$476=4.76\times 10^2$，等等。于是标值点$w$的坐标为

$$x=\mu\lg w=\mu\lg w^0\times 10^n=\mu\lg w^0+\mu n=x_b+\mu n$$

因为对数尺的尺系数等于它的节长，即$\mu=l_0$，所以上式可写成

$$x=x_b+nl_0 \tag{4.9}$$

式（4.9）表明这样一个事实：如果以基本节为基准，那么，一个点的标值每比基本节上相同有效数字标值点的标值变化10^n倍，这个点的位置就往正向（$n>0$）或负向（$n<0$）移动n个节长的距离。对于一个整节来说，就等于把基本节从它原来所在的位置原封不变地沿轴移动(正向或负向)n个节长的距离，而全部标值点的标值都相应变化10^n倍。图4.2清楚地表明了这一情况。我们把这一特点叫做对数尺分度的周期性。利用对数尺的这一特点，只要绘制出它的一个基本节，就可把它向正负两个方向任意延伸而得到任意多个节的对数尺，无须再去逐点计算其它各节的标值点的坐标。

4.4 对数比例尺 对数尺是算图中最常用的一种图尺。我们经常要用到尺系数不同的对数尺。为了避免每次都要计算求出标值点，可以利用所谓对数比例尺以简化绘制工作。对数比例尺依据的是位似变换原理，它的用法很简单。图4.3所示是它的示意图。图中线段OA与AB互相垂直且长度相等。AB上载有尺系数$\mu=250$的对数尺。任何尺系数小于250的对数尺都可利用此图直接进行分度。例如，欲绘制一尺系数$\mu=200$的对数尺，则在

* 数的这种表示方法叫做科学记数法，是浮点记数法的一种形式。

OA上截取$OA'=200$毫米，然后自点A'作平行于AB的直线交OB于点B'，直线$A'B'$即所求之尺轴，它与发自点O的诸射线的交点即所求之标值点，于其上作出分度线，注以与AB上相应的标值即得所欲绘制之对数尺。

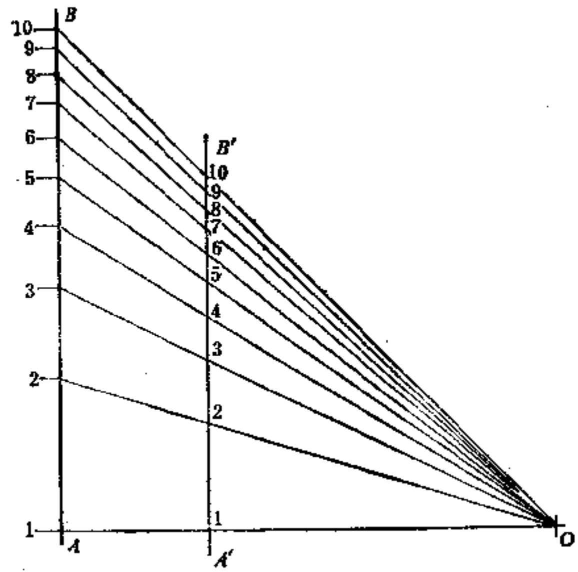


图 4.3 对数比例尺及其用法示意图

§5 射 影 尺

5.1 射影尺 如果l与l'是两条相交的直线，S为不在此两直线上但与之共面的一点，并设P是l上任一点(图5.1或图5.2)，如果SP与l'相交，则交点P'叫做直线l的点P从S投射到直线l'上的**中心射影**，点S叫**射心**，SP叫**射线**。显见P也是P'在l上的中心射影。中心射

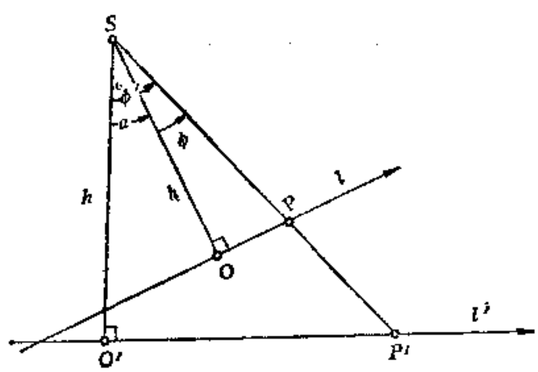


图 5.1 两相交直线上点的透视对应

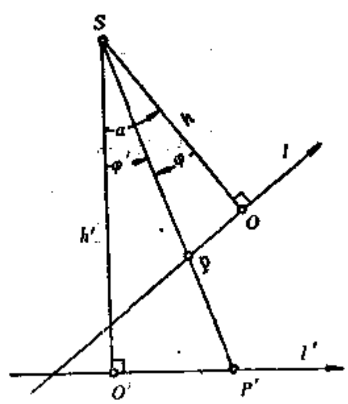


图 5.2 图 5.1 的另一种情况

影也叫做透视对应或透视映射，P'叫做P在l'上的映象。

自S到l及l'作垂线，垂足分别是O及O'，以O及O'为原点，分别在l及l'上引进笛氏坐标系，P及P'的坐标分别是x与x'，在l上引进均等函数尺

$$x=\mu z$$

则于l'上所得射影映象的函数尺

$$x' = \mu f(z)$$

叫做射影函数尺，简称射影尺。今推求$f(z)$。

在图5.1或图5.2中，令$h=SO$，$h'=SO'$，于是

$$x=OP=h\,\mathrm{tg}\varphi$$

$$x'=O'P'=h'\mathrm{tg}\varphi'$$

这里φ，φ'是动角，但$\alpha=\varphi'-\varphi$则是定角，将$\varphi'=\alpha+\varphi$代入上式，即得

$$x'=h'\mathrm{tg}(\alpha+\varphi)=\frac{h'(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\varphi)}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\varphi}$$

将$\mathrm{tg}\varphi=x/h$代入上式，整理后即得

$$x'=\frac{h'x+hh'\mathrm{tg}\alpha}{(-\mathrm{tg}\alpha)x+h}$$

但h，h'和α都是常数，故上式可写成

$$x'=\frac{ax+b}{cx+d}$$

这里$a=h'$，$b=hh'\mathrm{tg}\alpha$，$c=-\mathrm{tg}\alpha$，$d=h$且

$$ad-bc=hh'+hh'\mathrm{tg}^2\alpha=hh'\sec^2\alpha\neq0$$

我们把分式线性函数

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d},\quad ad-bc\neq0 \tag{5.1}$$

叫做**射影函数**。根据它绘制的函数尺就是$x=\mu z$的**射影尺**。

如果z是另一变量t的函数$f(t)$，亦即$z=f(t)$，则射影函数的一般形式为

$$y=\frac{af(t)+b}{cf(t)+d} \tag{5.2}$$

在这种情况下须将函数尺$z=\mu f(t)$投射到y-轴上去。

例题5.1 为变量u的射影函数

$$f(u)=\frac{2u+5}{4u+3}$$

绘制一函数尺，给定条件为$1\leqslant u\leqslant10$，$L=100$毫米。

解： 已知$\underline{u}=1$，$\overline{u}=10$，$L=100$。先求出尺系数

$$\mu=\frac{L}{|f(\overline{u})-f(\underline{u})|}=\frac{100}{\left|\dfrac{2\times10+5}{4\times10+3}-\dfrac{2\times1+5}{4\times1+3}\right|}=238$$

为方便计，取$\mu=250$（尺长略有变化）。设以标值点1为基点，则尺方程为

$$x=\mu[f(u)-f(1)]=250\left(\frac{2u+5}{4u+3}\right)-250$$

取水平的尺轴且右向为正，绘成的函数尺如图5.3所示。

我们看到它是一条逆向尺。但这不是射影尺的固有性质，它也有顺向的，下一节我们就讨论这个问题。

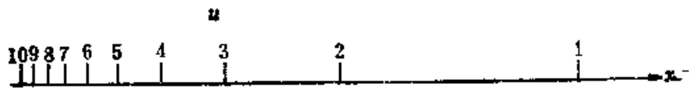


图 5.3 $f(u)=\dfrac{2u+5}{4u+3}$的函数尺

5.2 射影尺的尺方向 射影函数的增减性质，与它所含的四个常数a,b,c和d的具体数值有关。射影尺的尺方向也由此决定。设已知一射影函数

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d},\quad ad-bc\neq 0$$

求$f(z)$的导数，我们有

$$f'(z)=\frac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

因为$ad-bc\neq 0$，所以除$z=-\dfrac{d}{c}$*外，对z的所有值$f'(z)$都不为零。又因为$(cz+d)^2$常为正值，所以$f'(z)$的符号取决于$ad-bc$的符号。即

1．当$ad-bc>0$时，$f'(z)>0$，$f(z)$为常增函数，射影尺为顺向尺。

2．当$ad-bc<0$时，$f'(z)<0$，$f(z)$为常减函数，射影尺为逆向尺。

在例题5.1中，$a=2$，$b=5$，$c=4$，$d=3$，而$ad-bc=2\times3-5\times4=-14<0$,所以那个射影尺是逆向尺。

5.3 射影尺的几何作图法 根据射影对应的原理，我们知道，两点列的射影对应由已知的三对对应元素确定。所以，绘制射影尺时如已给定函数

$$y=\frac{af(t)+b}{cf(t)+d} \tag{5.2}$$

和尺长L，那么按下述的几何方法作图将会简单得多。作图步骤如下：

1．选定y-轴的位置（在算图中一般是给定的），于其上截取长度为L的一段做为t尺的尺轴，标出两个端点$\underline{t}$和$\overline{t}$。

2．做任一条与y-轴相交的x-轴，于其上以任意尺系数μ按尺方程

$$x=\mu[f(t)-f(\underline{t})] \tag{5.3}$$

作一函数尺t'。

3．根据已知条件求出三对对应关系，借以确定射心S。

4．自射心S把函数尺（5.3）投射到y-轴上去即得射影尺（5.2）。

当$f(t)$是线性函数时，用这个方法绘制射影尺就显得特别简单。

以后为了叙述上的方便，我们把据之作出射影尺的这个函数尺(5.3)叫做**射影原尺**。

例题5.2 试用几何作图法绘制例题5.1的射影尺。尺长取$L=105$毫米，其他参数同前。

解：作图步骤如下（参见图5.4）：

1．作任一x-轴，以之为u尺的轴，于其上以105毫米的间距定出两个端点1_u和10_u。

2．任意作一与x-轴相交的x'-轴作为u'尺的轴。为简化作图计，我们使u'尺交于u尺之始端，即点1_u，并以该点亦为u'尺之始端，即点$1_{u'}$。因此它是一个射影对应的二重点（这

* 它对应于射影尺上的无穷远点。