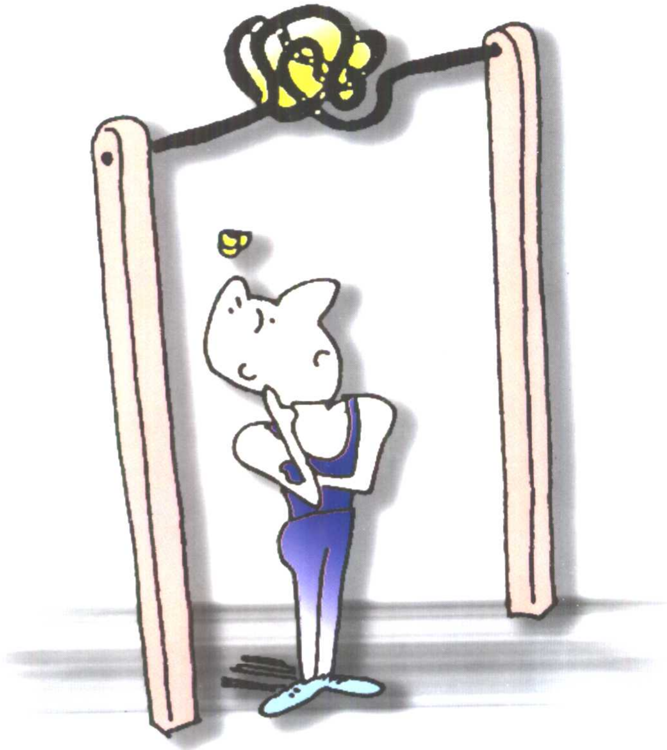
高考冲刺锦囊

数学

吴沈泉主编

冲 刺
成功的导向



上海远東出版社

考点研究与对策

知识点概述

精选例题

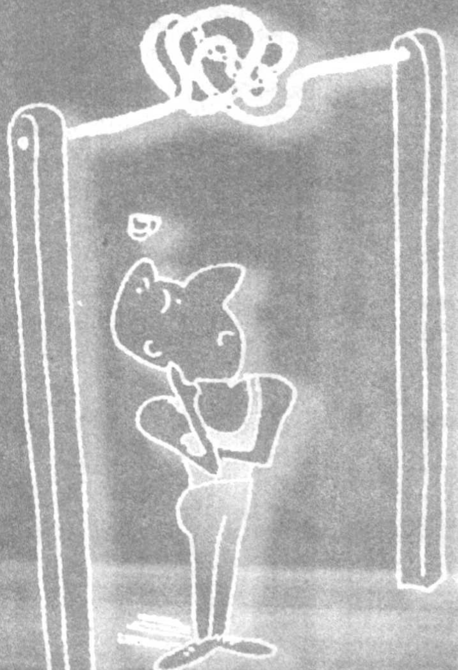
模拟试卷

放松驿站

高中数学

吴沈泉主编

华吾森　孙　琪　徐　俭　余缨缨　陶烨昕编



上海远东出版社

高考冲刺锦囊:数学

主　　编/吴沈泉
编　　者/华吾森　孙　琪　徐　俭　余缨缨　陶烨昕

责任编辑/章　怡
装帧设计/徐程璐　殷　飞
责任出版/李　昕

出　　版/上海远东出版社
　　　　(200336)　中国上海市仙霞路 357 号
发　　行/新华书店上海发行所
　　　　上海远东出版社
排　　版/华东电力试验研究院印刷厂
印　　刷/江苏扬中市印刷厂
装　　订/江苏扬中市印刷厂

版　　次/2000 年 12 月第 1 版
印　　次/2000 年 12 月第 1 次
开　　本/787×1092　1/16
字　　数/332 千字
印　　张/14
印　　数/1－11000

ISBN 7-80661-199-1
G·92　定价 15.00 元

用我的心

由于工作原因,多年来经常出差,有机会与全国各地重点中学的特、高级教师交流和讨论。这些教师总是让我代买上海的教辅书。他们认为上海的教辅书新信息量大,新题型丰富。而面向全国卷考生的教辅书虽多,但从总体上来看,新信息不足,新题型较少,难以满足面对高考"出题不断创新"的考生复习迎考的需求。

我常常想:上海特、高级教师手头的新信息材料丰富,有创意的新题型较多,其他省市特、高级教师对全国卷的教材比上海(使用上海教材)要熟悉,何不充分凭借他们各自的优势资源为参加全国卷高考的考生编写一套高考复习辅导书呢?

"高考冲刺锦囊"这套书(分语文、数学、物理、化学、英语 5 本)正是在这种背景下产生的。在组织编写这套书之前,还特地走访了许多已考上全国重点大学的学生,了解他们在高考复习中的经验和对高考辅导书的建议和想法。这些经验、建议和想法经整理后,融入了"高考冲刺锦囊"的设计与编撰之中。例如在"精选例题"中,从选择例题到对例题的分析,都是围绕"培养考生的思维品质和科学素质"而展开的。只有这样才有助于考生举一反三,触类旁通,在考场上游刃有余。又如,为了满足考生在高考复习紧张之际,需要充分调剂脑力活动,在书中特意设计了"放松驿站"。总之,我用我的心为你设计了这套"高考冲刺锦囊",愿它能助你走向成功之路。

最后,想让你猜两则谜语:潜水艇(打一常用语),轻舟逐浪(打一字)。同时,把它们的谜底送给你。

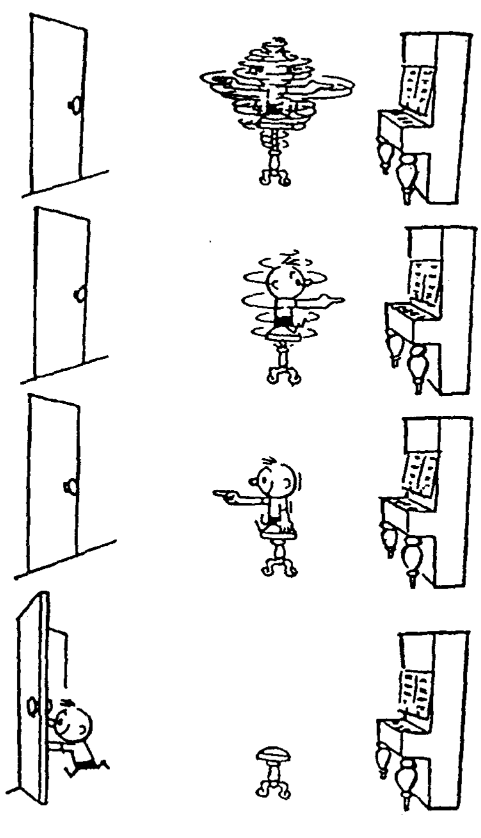
目录

第一单元　函　数

一、考点研究和知识点概述

函数这一部分内容是高考的重点，也是难点，其主要内容包括：函数的解析式，函数的定义域、值域，函数的奇偶性、单调性、周期性与对称性，同时，利用函数的图像也是研究函数、解决函数问题的一个重要方法。此外，函数与方程的关系也是十分密切的。在高中阶段，我们主要研究的函数有二次函数、幂函数、指数函数与对数函数。

放松驿站：重心



二、精选例题

例1 已知函数 $f(1+\sin x)=2m+2m\sin x-6(1+\sin x)^3$,其中 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$,$m$ 是实常数,(1)求 $f(x)$的解析式;(2)设 $m\in(3,+\infty)$,求 $f(x)$的最大值 n。

分析 这道题目主要考查的知识点有:(1)函数的解析式,尤其要注意变量的取值范围;(2)函数的最值问题的一般解法,主要方法有①换元法,②比较法,证明大小。

解 (1) 设 $1+\sin x=t$ $\because$ $\sin x\in[-1,0]$ $\therefore$ $t\in[0,1]$,则 $\sin x=t-1$

我们有:$f(t)=2m+2m(t-1)-6t^3=-6t^3+2m(t-1)+2m$

所以:$f(x)=-6x^3+2mx$ $x\in[0,1]$

(2) $f(x)=2x(m-3x^2)$

(i) 当 $m\in(3,9]$时

$$f(x)=2\sqrt{x^2(m-3x^2)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{6x^2(m-3x^2)(m-3x^2)}\leqslant\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\sqrt{\left(\frac{2m}{3}\right)^3}=\frac{4m\sqrt{m}}{9}$$

(和有定值,积有最大值)

当且仅当 $6x^2=m-3x^2$,$x=\frac{\sqrt{m}}{3}$的等号成立

(ii) 当 $m\in(9,+\infty)$时,

任取 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant1$

$$f(x_1)-f(x_2)=2m(x_1-x_2)-6(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$$
$$=2(x_1-x_2)[m-3(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)]$$

$\because$ $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant1$ $\therefore$ $x_1-x_2<0$, $x_1^2+x_1x_2+x_2^2<3$

$\therefore$ $f(x_1)-f(x_2)<0$, $f(x_1)<f(x_2)$

$\therefore$ 当 $m>9$ 时,$f(x)$在$[0,1]$上单调递增

$\therefore$ $x=1$ 时,$f(x)$取到最大值 $2m-6$

由(i)与(ii)可得

$$f(x)\text{的最大值 } n=\begin{cases}\dfrac{4m\sqrt{m}}{9} & m\in(3,9]\\ 2m-6 & m\in(9,+\infty)\end{cases}$$

说明 求函数的最值的方法一般有以下几种:(1)利用二次函数性质;(2)利用不等式的性质;(3)利用函数的增减性,等等。

例2 设 $f(x)=\log_{(x+1)}(x^2+x-6)^2$,$g(x)=x^2+2mx+m$。(1)若存在实数 x,使得不等式 $f(x)\geqslant4$ 与 $g(x)>-\frac{1}{4}$同时成立,求实数 m 的取值范围。(2)若对任意实数 x 不等式$f(x)\geqslant4$ 与 $g(x)>-\frac{1}{4}$中至少有一成立,求实数 m 的范围。

分析 这两个小问题语言中差别不大,但包含的实际含义却相差甚远,我们设 $f(x)\geqslant4$

的解集为 A，$g(x)>-\frac{1}{4}$ 的解集为 B，问题(1)实际上就是 $A\cap B\neq\phi$，问题(2)实际上就是 $A\cup B=R$，同时，此题对解不等式也有一定的要求。

解 对于 $f(x)\geqslant 4$

即 $\log_{(x+1)}(x^2+x-6)^2\geqslant 4=\log_{(x+1)}(x+1)^4$

当 $x+1>1$ 时，则有 $\begin{cases}x+1>1\\(x^2+x-6)^2>0\\(x+1)^4>0\\(x^2+x-6)^2\geqslant(x+1)^4\end{cases}$ 解集 $0<x\leqslant 1$

当 $0<x+1<1$ 时，则有 $\begin{cases}0<x+1<1\\(x^2+x-6)^2>0\\(x+1)^4>0\\(x^2+x-6)^2\leqslant(x+1)^4\end{cases}$ 解集 ϕ

$\therefore$ $f(x)\geqslant 4$ 的解集 $A=(0,1]$

对于 $g(x)>-\frac{1}{4}$

即 $x^2+2mx+m+\frac{1}{4}>0$

当 $\Delta=(2m)^2-4\left(m+\frac{1}{4}\right)=4m^2-4m-1\geqslant 0$ 时，

即 $m\in\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$

$g(x)>-\frac{1}{4}$ 的解集

$B=(-\infty,-m-\sqrt{m^2-m-\frac{1}{4}})\cup(-m+\sqrt{m^2-m-\frac{1}{4}},+\infty)$

(1) $A\cap B\neq\phi$

即 $-m-\sqrt{m^2-m-\frac{1}{4}}>0$ ① 或 $-m+\sqrt{m^2-m-\frac{1}{4}}\leqslant 1$ ②

由①可得 $m\in\left(-\frac{1}{4},\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$

由②可得 $m\in\left(-\frac{5}{12},\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$

$\therefore$ $m\in\left(-\frac{5}{12},\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$

(2) $A\cup B=R$

即 $-m-\sqrt{m^2-m-\frac{1}{4}}>0$ 且 $-m+\sqrt{m^2-m-\frac{1}{4}}\leqslant 1$

$\therefore$ $m\in\left(-\frac{1}{4},\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right]$

说明 解无理不等式 $\sqrt{f(x)}<g(x)$ 与 $\sqrt{f(x)}>g(x)$ 时，要注意分 $g(x)\geqslant 0$ 与 $g(x)<0$ 两种情况进行讨论，如果把条件改为 $g(x)\geqslant-\frac{1}{4}$，那么结果又会如何呢？

例 3 设 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+a$(a 为实常数,且 $a\leqslant\frac{5}{2}$),是否存在实数 $m,n(m<n)$,当 $f(x)$定义域为$[m,n]$时,$f(x)$的值域恰为$[3m,3n]$。

分析 这是关于二次函数内容的题目,主要是定义在闭区间上二次函数的值域问题,这类问题在高中数学中涉及的较多。

解 配方 $f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2+a+\frac{1}{2}$

当 $x=1$ 时,$f(x)$的最大值为 $a+\frac{1}{2}$

显然 $3n\leqslant a+\frac{1}{2}$

又 $a\leqslant\frac{5}{2}$ $\therefore 3n\leqslant 3$ $\therefore n\leqslant 1$

故 $[m,n]\subset(-\infty,1]$

$\therefore$ $f(x)$在$[m,n]$区间上单调递减。

所以 $f(m)=3m$ 及 $f(n)=3n$

$\therefore$ m,n 是方程 $f(x)=3x$ 的两个根

而 $f(x)=3x$ 等价于 $x^2+4x-2a=0$ (*)

对于(*)式 $\Delta=16+8a$

若(i) $\Delta<0$,即 $a<-2$,方程无解。

当然 m,n 也就不存在了。

若(ii) $\Delta=0$,即 $a=-2$

$\therefore$ $m=n=-2$ 与 $m<n$ 相矛盾。

故也不存在这样的 m 与 n。

若(iii) $\Delta>0$ 时,即 $a>-2$。

方程有二解 $m=-2-\sqrt{4+2a}$,$n=-2+\sqrt{4+2a}$

故 $a\in\left(-2,\frac{5}{2}\right]$时,存在这样的实数 m,n: $m=-2-\sqrt{4+2a}$

$n=-2+\sqrt{4+2a}$,使 $f(x)\in[3m,3n]$。

说明 二次函数的值域问题一般要考虑两个方面,一是定义域范围,二是对称轴的位置,二者之间是互相联系的。

例 4 设二次函数 $f(x)=x^2+bx+c$ $(b,c\in R)$

已知,不论 α,β 取任何实数都有 $f(\sin\alpha)\geqslant 0$,$f(2+\cos\beta)\leqslant 0$ 成立。

(1) 求 c 的最小值;(2)若函数 $f(\sin\alpha)$最大值为 8,求 b,c 的值。

分析 这题思想方法是从 $f(\sin\alpha)\geqslant 0$ 与 $f(2+\cos\beta)\leqslant 0$ 恒成立入手。

解 (1) 不论 α 取任何实数时,都有 $f(\sin\alpha)\geqslant 0$ 等价于无论 $x\in[-1,1]$,$f(x)\geqslant 0$ 恒成立,同理,$f(2+\cos\beta)\leqslant 0$ 恒成立等价于 $x\in[1,3]$,$f(x)\leqslant 0$ 恒成立。

故 $x=1$ 时,$f(x)$必为 0。

$\therefore$ $f(1)=1+b+c=0$ $\therefore$ $b+c=-1$, $b=-1-c$

此时 $f(x)=x^2+(-c-1)x+c=(x-1)(x-c)$

$\because$ $1\leqslant x\leqslant 3$ 时，$f(x)\leqslant 0$ 恒成立 $\therefore$ $c\geqslant 3$

又 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立 $\therefore$ $c\geqslant 1$

故 $c\geqslant 3$ 即 c 的最小值为 3。

(2) 由上题 $f(x)=(x-1)(x-c)$

而 $c\geqslant 3$ $\therefore$ $f(x)$在$(-\infty,1]$区间上是单调递减的。

而 $f(\sin\alpha)$的最大值为 8，

故当 $\sin\alpha=-1$ 时，

$f(-1)=8$ 即 $1-b+c=8$

$\therefore$ $b-c=-7$，又 $b+c=-1$

解得 $b=-4, c=3$

说明 此题从两个不等式入手，一环紧扣一环，是一道典型的用综合法求解的函数问题。

例 5 已知函数 $y=f(x)$的图像经过点$(m-2,0)(m\in R)$，并且 $f(x-2)=ax^2-(a-3)x+(a-2)(a\in Z^-)$，设 $g(x)=f[f(x)]$，$F(x)=p\cdot g(x)+q\cdot f(x)$，问是否存在实数 $p(p>0)$和 q，使 $F(x)$在$(-\infty,f(2)]$上是增函数，并在区间$(f(2),0)$上是减函数？若存在，请证明你的结论；若不存在，试说明理由。

分析 本题主要考查函数的单调性，当函数是复合函数时，要考虑两个函数的情况，对于 $F(x)=f(g(x))$。若 $x\in D_1$，$g(x)\in D_2$，$g(x)$在 D_1 上递增(减)，若 $f(x)$在 D_2 上递增(减)，则 $F(x)$在 D_1 上递增；若 $f(x)$在 D_2 上递减(增)，则 $F(x)$在 D_1 上递减。

解 $y=f(x)$图像经过点$(m-2,0)$

$\therefore$ $f(m-2)=0$

又 $\because$ $f(x-2)=ax^2-(a-3)x+(a-2)$

$\therefore$ $am^2-(a-3)m+(a-2)=0$

又 $\because$ $m\in R, a\neq 0$

$\therefore$ $\Delta\geqslant 0$ 即 $a\in\left[\frac{1-2\sqrt{7}}{3},\frac{1+2\sqrt{7}}{3}\right]$

由于 $a\in Z^-$，故满足条件的 a 只有 -1

因此 $f(x-2)=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$

即 $f(x)=-x^2+1$ $x\in R$ $f(2)=-3$

由此可得 $g(x)=-x^4+2x^2$

$F(x)=p\cdot g(x)+q\cdot f(x)=-px^4+(2p-q)x^2+q$

由条件可得 $F(x)$在$(-\infty,-3]$上是增函数，并且在$(-3,0)$上是减函数

即 $x\in(-\infty,-3]$，$x^2\in[9,+\infty)$

x^2 关于 x 在$(-\infty,-3]$上是减函数

而 $F(x)$关于 x 在$(-\infty,-3]$上是增函数

故 $F(x)$关于 x^2 在$[9,+\infty)$上是减函数

同理可得 $F(x)$关于 x^2 在$(0,9)$上是增函数

所以 $-\frac{2p-q}{2(-p)}=9$

即 $18p=2p-q \quad 16p+q=0$

因此,存在这样的实数 $p(p>0)$ 和 q 使 $F(x)$ 在 $(-\infty,3]$ 上是增函数,并且在区间 $(-3,0)$ 上是减函数。

说明 此题的 $F(x)=-px^4+(2p-q)x^2+q$ 可以看作为复合函数 $h(t(x))$

其中 $t(x)=x^2, h(x)=-px^2+(2p-q)x+q$

例 6 已知定义域为 R 的函数 $y=f(x)$ 满足 $f(2+x)=f(2-x)$

(1)证明函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称;(2)若方程 $f(x)=0$ 有三个实根,且一个根为 0,求另两个根。

分析 证明图像关于曲线对称,通常可采用这样的方法,$f(x)$ 上任意一点 $(x_0,f(x_0))$ 关于曲线 C 的对称点仍然满足 $f(x)$ 的解析式,即对称点仍在曲线上。

解 (1) 设 $y=f(x)$ 上有任意一点 $A(x_0,f(x_0))$,则点 A 关于直线 $x=2$ 的对称点 A' 坐标为 $(4-x_0,f(x_0))$。

下面求证:$f(4-x_0)=f(x_0)$

因为 $f(2+x)=f(2-x)$

所以 $f(4-x_0)=f[2+(2-x_0)]=f[2-(2-x_0)]=f(x_0)$

故 $(4-x_0,f(x_0))$ 也在曲线 $y=f(x)$ 上

因此 函数图像关于直线 $x=2$ 对称。

(2) 因为 $y=f(x)$ 图像关于 $x=2$ 对称

故 $f(x)=0$,一根为 0,必存在一根为 4,第三个根一定为 2(证明略)。

所以 $f(x)=0$ 三根为 $x_1=0, x_2=2, x_3=4$

说明 通常对于定义在 R 上的函数 $f(x)$,若满足 $f(a+x)=f(a-x)$,则函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称,若满足 $f(x+a)=f(x-a)(a\neq0)$,则函数 $y=f(x)$ 为周期函数,它的一个周期为 $2a$。

例 7 (1) 证明下面的命题:一次函数 $f(x)=kx+h(k\neq0)$,若 $m<n, f(m)>0, f(n)>0$,则对于任意的 $x\in[m,n]$ 都有 $f(x)>0$;(2)试用上面的结论证明下面的命题,若 a,b,c 均为实数,且 $|a|<1,|b|<1,|c|<1$,则 $ab+bc+ca>-1$。

分析 对于命题(1),它的几何意义就是,如果一条线段的两个端点落在 x 轴上方,那么这条线段的所有点都在 x 轴上方,在前面例 4 的第(1)小题中我们已经用到这个性质,所以,我们不妨从函数的单调性入手。

证明 (1) 当 $k>0$ 时,$f(x)=kx+h$ 在 $[m,n]$ 上是增函数,

则有 $f(m)<f(x)<f(n)$

$\because f(m)>0 \quad \therefore f(x)>0$

当 $k<0, f(x)=kx+h$ 在 $[m,n]$ 上是减函数,则有 $f(m)>f(x)>f(n)$

$\because f(n)>0 \quad \therefore f(x)>0$

综上所述,当 $k\neq0$ 时,对于任意的 $x\in[m,n]$ 都有 $f(x)>0$。

(2) 题目要求利用第(1)小题的结论,那么我们首先需要构造一次函数。

注意到欲证不等式等价于 $(b+c)a+bc+1>0$

因此可构造函数 $f(x)=(b+c)x+bc+1, x\in(-1,1)$

当 $b+c=0$ 时，$f(a)=bc+1=-b^2+1>0$

即 $ab+bc+ca>-1$。

当 $b+c\neq0$ 时，$f(x)=(b+c)x+bc+1$ 为一次函数

$\because f(-1)=-b-c+bc+1=(1-b)(1-c)>0$

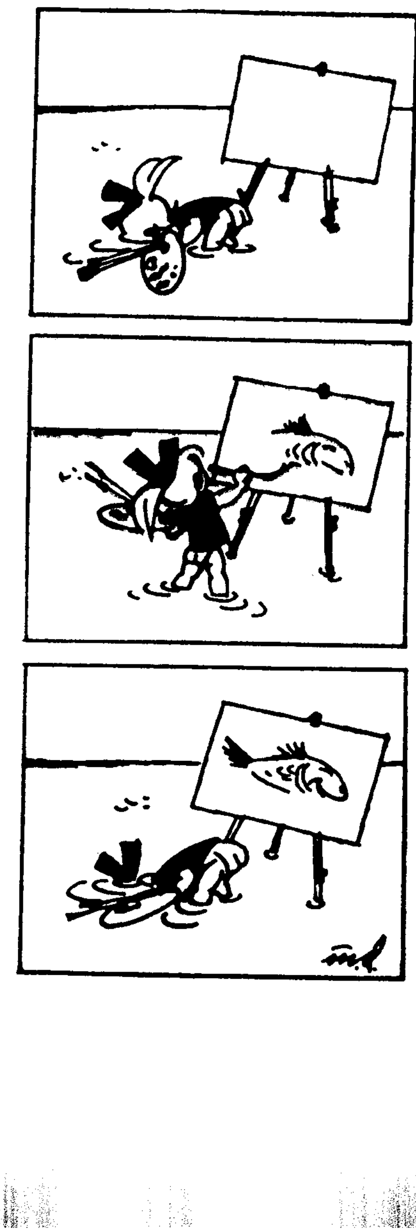
$f(1)=b+c+bc+1=(1+b)(1+c)>0$（因为 $|b|<1, |c|<1$）

$\therefore$ 由第(1)小题的结论，对于任意的 $a\in(-1,1)$ 都有 $f(a)>0$，即 $ab+bc+ca>-1$

综上所述，恒有 $ab+bc+ca>-1$。

说明 此题还有更一般的结论：设 $|a|<m, |b|<m, |c|<m, (m>0)$，那么 $ab+bc+ca>-m^2$，读者可以依照上述证明自己独立完成。

放松驿站



函数模拟试题

一、填空题

1. 若方程 $3x^2-2x-p=0$ 的解集是 $\{\sin\alpha,\cos\alpha\}$，则实数 p 的值为__________。

2. 将函数 $y=2^x$ 的图像向左平移一个单位，得到图像 c_1，再将 c_1 向上平移一个单位得到图像 c_2，作 c_2 关于直线 $y=x$ 的对称图像是 c_3，则曲线 c_3 的解析式是__________。

3. 设 $z\in C$，$A=\{z\,|\,|z-1|\leqslant 1\}$，$B=\{z\,|\,|z|>a\}$，全集 $I=C$，那么使 $A\subset\bar{B}$ 成立的充要条件是__________。

4. 函数 $f(x)=\lg(ax^2+2x+1)$ 的值域为 R，则实数 a 的取值范围是__________。

5. 已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$，且当 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)=2^x+\dfrac{1}{5}$，则 $f(\log_2 20)$ 的值为______。

6. 函数 $f(x)=-\log_{\frac{1}{2}}(x^2-ax-a)$ 在区间 $(-\infty,1-\sqrt{3})$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是__________。

7. 对于每个 $a>0$，过原点且与函数 $y=x|x+2a|+a^2$ 的图像恰有 2 个不同的公共点的直线方程是__________。

8. 已知关于 x 的不等式 $(x-1)\log_3{}^2a-bx\log_3 a+x+1>0$，在 $x\in[0,1]$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围是__________。

二、选择题

9. 已知 $0<a<1$，$x_1>x_2>0$，则下列不等式中恒成立的是 （　　）

   A. $a^{x_1}>a^{x_2}$　　B. ${x_1}^a<{x_2}^a$　　C. $3^{\log_2 x_1}<3^{\log_a x_2}$　　D. $a^{-x_1}<a^{-x_2}$

10. 设函数 $y=f(x)$ 定义在 R 上，则函数 $y=f(x-1)$ 与 $y=f(1-x)$ 的图像关于 （　　）

    A. x 轴对称　　B. y 轴对称

    C. 直线 $y=1$ 对称　　D. 直线 $x=1$ 对称

11. 设 $f(x)$，$g(x)$ 是定义在实数集上的函数，且 $M=\{x\,|\,f(x)\neq 0\}$，$N=\{x\,|\,g(x)\neq 0\}$，那么集合 $\{x\,|\,f(x)\cdot g(x)=0\}$ 等于 （　　）

    A. $\overline{M}\cap\overline{N}$　　B. $\overline{M}\cup N$　　C. $M\cup\overline{N}$　　D. $\overline{M\cap N}$

12. 如果函数 $y=a^x+b$ 的图像经过第二、三、四象限，那么 （　　）

    A. $a>1,b>-1$　　B. $a>1,b<-1$

    C. $0<a<1,b>-1$　　D. $0<a<1,b<-1$

13. 若函数 $y=f(x)$ 的图像经过点 $P(1,2)$，则 $f(x+2)$ 的反函数的图像必经过点 （　　）

A. $(2,-1)$　　B. $(-1,-2)$　　C. $(-1,2)$　　D. $(2,1)$

14. 某电脑用户计划使用不超过500元的资金购买单价分别为60元、70元的单片软件和盒装磁盘，根据需要，软件至少买3片，磁盘至少买2盒，则不同的选购方式共有（　　）

A. 5种　　B. 6种　　C. 7种　　D. 8种

三、解答题

15. 函数 $y=\sqrt{\dfrac{2-x}{x-1}}$ 的定义域为集合 A，关于 x 的不等式 $\lg(2ax)<\lg(a+x)$ $(a\in R^{+})$ 的解集为 B，求使 $A\cap B=A$ 的实数 a 的取值范围。

16. 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且对任意的非零实数 x_1,x_2，有 $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$。(1)计算 $f(1)$ 的值；(2)证明 $f(x)$ 是偶函数；(3)若 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数，且 $f(x)+f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\leqslant 0$，求 x 的取值范围。

17. 设 $s>1,t>1,m\in R,x=\log_s t+\log_t s,y=\log_s^4 t+\log_t^4 s+m(\log_s^2 t+\log_t^2 s)$。(1)将 y 表示成 x 的函数 $y=f(x)$，并求出 $f(x)$ 的定义域；(2)若关于 x 的方程 $f(x)=0$ 有且仅有一个实数根，求 m 的取值范围。

18. 如右图矩形 $ABCD$ 中，$|OA|=4,|OC|=3,P$ 和 Q 两点分别位于 AB 和 BC 上，且 $\angle POQ=\dfrac{\pi}{4}$，设 $P(4,y),Q(x,3)$。(1)用 y 表示 $\triangle POQ$ 的面积 $S(y)$；(2)求 $\triangle POQ$ 面积的最大值和最小值。