# 实用经济数学

邸奎　何云科　马月才　编译

化学工业出版社

# 目　　录

# 第一章 函 数

## 第一节 函数概念

在这一节里，通过介绍函数的重要概念来为以后各章奠定基础。事实上，任何经验数据的获得和研究现代科学技术的需要都会涉及这一数学概念。首先，直观地对函数加以描述，通过一些例子来理解什么是函数，然后再下定义。

简言之，函数 $f$ 符合这样一条规则：对任一给定的数 $x$，总有一个唯一的数 $f(x)$ 与其对应，读作“$x$ 的函数 $f$”。这里，$f(x)$ 是 $x$ 为已知数时的计算结果值，$f(x)$ 并不是指 $f$ 倍 $x$。

例如，与一个已知数的平方对应的函数 $f$ 是

$$f(x)=x^2$$

已知数 $x$ 叫自变量，与它有函数关系的数叫因变量，因为其值取决于 $x$。

**例 1-1** 对于函数

$$f(x)=4x^2-5$$

求自变量等于 3 时因变量 $f(x)$ 的值。

因变量的值为

$$f(3)=4.3^2-5=4.9-5=36-5=31$$

对于

$$f(x)=x^2,\quad g(x)=2x-3,\quad h(x)=\frac{1}{x}$$

这样一些函数，通常用 $y$ 来表示因变量，故写作

$$y=f(x)=x^2,\quad y=g(x)=2x-3,\quad y=h(x)=\frac{1}{x}$$

人们已经知道函数$f$是与实数$x$而不是与实数$y$相对应，那么就可以用记号

$$y=f(x)$$

来表示$x$与$y$之间的关系。如果记下所有的座标（$x,y$），这里$y$是纵坐标，$x$是横坐标，则所有点（$x,y$）的集合称为$y=f(x)$的图象。

现在给出函数的定义。

**定义：函数；定义域；值域。**

**设$D$和$R$是两个已知集合。函数$f$的取值对应于$D$中的每一个元素$x$，在$R$中也只有一个元素$y$与之对应。集合$D$则称为函数$f$的定义域，$R$则称为其值域。**

**例** 1-2　设集合$D$由一个班的学生组成，$R$是该班学生期末考试成绩的集合。因为每一名学生都正好与一个期末考试成绩相对应，所以这就是函数的一个例子。

在上面的例子中，定义域，值域和对应关系都是特定的。通常，对应关系为已知，定义域和值域则需要求出。例如，给定一个函数$f$，很自然地就要知道$f$的定义域和值域。为了便于给出答案，对研究的范围作出限制，使得实例中的定义域$D$和值域$R$都是实数集合。

有时，将函数想象成一个数字处理装置会有助于理解。定义域是这个装置的输入，而值域则是输出。见图1-1。

这个装置的限制条件是：

（1）它只接收来自$f$的定义域的数字，也就是只接受可供输出用的数字。

（2）每个输入只产生一个输出（对于不同的输入，输

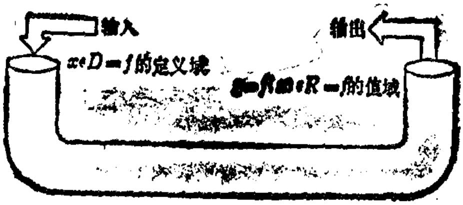


图 1-1

出可能是相同的)。

条件(2)对于判别一个已知关系式是否为函数很重要。例如,关系式$x=y^2$就不是一个函数,因为输入$x=1$产生$y=1$和$y=-1$两个输出。关系式$y=\pm\sqrt{x}$也不是一个函数,因为输入$x=4$产生$y=2$和$y=-2$两个输出。关系式$y=x^2$是一个函数,因为输入$x$只产生一个输出$y$。

下面集中讨论函数关系式。

回到二次函数$y=f(x)=x^2$。什么样的实数可以求得其平方?也就是:在什么实数集合内可进行平方运算?人们发现对任一实数总是可以求得其平方的。那么,$y=f(x)=x^2$的定义域就是实数集合$R$。一个实数平方以后结果是什么?会得出一个什么样的数?由于任一实数的平方总是非负数($\geqslant 0$),所以,可知其值域的数字集合也是非负的实数。这样,如果$D$为函数$f(x)=x^2$的定义域,$R$为其值域,则有

$$D=\{x|x\in\mathscr{R}\},\ R=\{y|y\geqslant 0\}$$

**例 1-3** 考虑以下关系式

$$y=f(x)=20x+100$$

$x$取什么样的实数就可以计算出$20x+100$呢?也就是说,什么情况下可以在100上加一个数字的二十倍呢?回答是总能做到。这样,$f$的定义域就是$D=\{x|x\in\mathscr{R}\}$。

同样，$f$ 的值域，是与定义域中的数字 $x$ 相对应的数字集合 $R=\{y\mid y\in\mathscr{R}\}$

最后，因为对于每一个 $x$ 都只有一个 $y$ 与其相对应，所以 $f$ 是一个函数。函数的图象由 $y=20x+100$ 上的所有点 $(x, y)$ 组成。见图1-2。

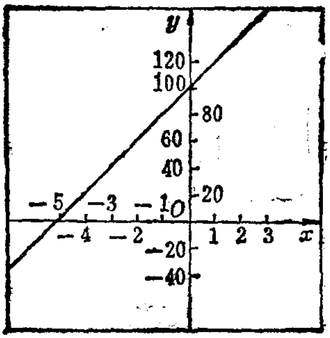


图 1-2

假设例 1-3 的函数 $f$ 代表一个工厂的生产总成本，其中管理费是 100 元，单件产品的制造成本是20元。在这种情况下，$x$ 就代表生产的产品件数。那么，$f$ 的定义域和值域的含义是什么呢？

既然变量 $x$ 在此表示产品件数，它只有取非负整数值时才有意义，那么可得

$$D=\{0, 1, 2, 3, \cdots\cdots\}$$

当变量 $x$ 取值0，1，2，3，……时，变量 $y$ 则取值

$$f(0)=20.0+100=100$$

$$f(1)=20.1+100=120$$

$$f(2)=20.2+100=140$$

等等。因而值域为

$$R=\{100, 120, 140, 160, \cdots\cdots\}$$

图1-3给出了其图象。

当继续研究函数时会发现，在许多情况下，实际因素可能改变函数的定义域和值域。人们注意到，上面两种情况中，第一个函数可以取任何值，而第二个函数只能取非负整数值。第一个函数的定义域和值域被认为是连续的，第二个函

数的定义域和值域则被认为是离散的。时间是一个连续变量的例子，而按年龄组分类的人数则是离散的。

例 1-4　求函数的定义域

$$f(x)=\sqrt{1-x}$$

并画出函数的图象。

要求$f(x)$的定义域，有一个问题：即$x$取什么值时才能计算$\sqrt{1-x}$？人们知道，在实集范围内，求一个负数的平方根是不可能的。那么，$x$只有取值

$$1-x\geqslant 0\quad 或\quad x\leqslant 1$$

才在定义域内。因而，$f(x)$的定义域是$\{x|x\leqslant 1\}$。

这意味着图象必须在$x=1$上和其左方。此外，还要注意到定义域中的每个$x$只与一个数字$y$相对应。根据平方根的定义，数字$y$是非负的。图1-4给出了其图象。

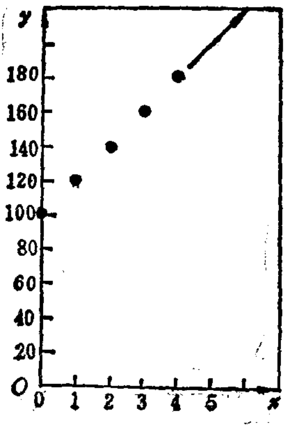


图 1-3

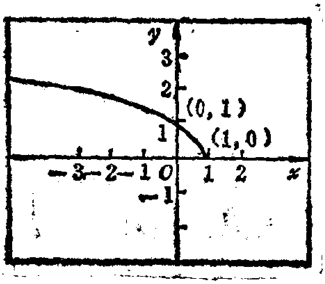


图 1-4

下面的例子说明怎样建立函数。

例 1-5　看一个利润函数的例子。假设某唱片公司以5

元的单价每天销售 $x$ 册唱片簿，那么每天的收入就是 5 元乘以售出的唱片簿册数。

$$\text{收入}=5x$$

再假设唱片簿的制造和销售成本是每册 4 元加上每天的固定经营费用400元（取暖费，租金和保险金等），则每天的总成本为

$$\text{成本}=4x+400$$

每天的利润等于收入减去成本

$$5x-(4x+400)=x-400$$

如果字母 $P$ 表示利润函数，则 $P(x)$ 表示产销 $x$ 册唱片簿时的实际利润。

$$\text{利润}=P(x)=x-400$$

当产销600册，400 册，300 册时的利润各是多少？我们还是利用这个公式。

$$P(600)=600-400=200$$

$$P(400)=400-400=0$$

$$P(300)=300-400=-100$$

对应于600册的利润是200元，对应于400册不盈不亏，对应于300册亏损100元。

**例 1-6** 画出函数的图象

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x>0 \\ 1 & x\leqslant 0 \end{cases}$$

在这个问题中，因为对于 $x$ 的全部实数取值都可以找到一个 $y$ 值，所以定义域是所有的实数。其图象在图 1-5 中给出。注意对函数 $f$ 有两条规定：一条是 $x>0$，另一条是 $x\leqslant 0$。

**例 1-7** 画出函数的图象

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & -1\leqslant x<1\\ 2 & x=1\\ x+\dfrac{1}{2} & x>1\end{cases}$$

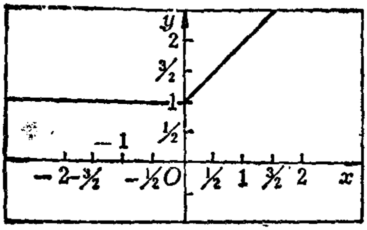


图 1-5

这里，$f$的定义域是所有$\geqslant -1$的实数。其图象在图1-6中给出。我们用实圈• 表示$x=1$时$f(x)$的值为2，用空圈◦表示$x=1$时图象$f(x)$的取值在1/2和3/2处都不存在。

**例 1-8** 一超级市场最初在货架上存放48听玉米，发现每天售出12听。当存货量减至12听时，他们补充了一箱36听装的货。以时间为横轴，货架上的存货听数为纵轴，建立一个函数来描述这种情况。

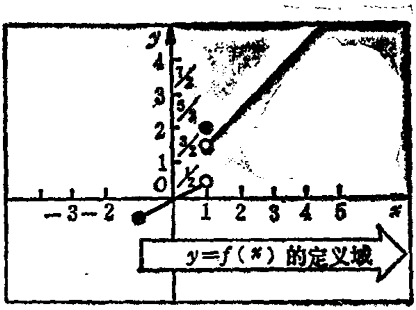


图 1-6

我们从时间$t=0$开始，此刻存货量是48听，所以(0，48)是图象上的一个点。$t=1$，存货量是36听；$t=2$，存货量是24听；$t=3$，存货量是12听。在这一点，我们往货架上加了36听，所以存货量又回到48。就这样随着时

间的继续而往复下去。见图1-7。

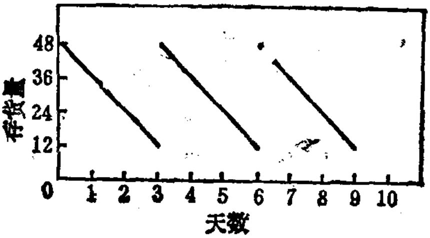


图 1-7

## 练 习 一

1. 对于函数$f(x)=3x-2$，求

(a) $f(3)$　(c) $f(0)$　(e) $f(x+h)$

(b) $f(-2)$　(d) $f(11)$　(f) $f(1/x)$

2. 对于函数$f(x)=3x^4+1$，求

(a) $f(1)$　(c) $f(0)$　(e) $f(x+h)$

(b) $f(h)$　(d) $f(h+1)$　(f) $f(1/x)$

3. 对下列函数

(a) $f(x)=2x+5$　求　$f(x+h)$

(b) $f(x)=x^2$　求　$f(x+h)-f(x)$

(c) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$ 求 $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$　$h\neq 0$

4. 试确定下列式子哪一个是函数，求出每一个函数的定义域，并画出函数图象。

(a) $y^2=1-x^2$　(d) $y=\pm\sqrt{1-2x}$

(b) $y=\dfrac{2}{x}$　(e) $y=\sqrt{1+x}$

(e) $y=x^2-1$　　(f) $y=\dfrac{1}{x-2}$

5. 画出下列函数的图象，并求出定义域。

(a) $f(x)=\begin{cases}2x-3, & x<0\\ x-3, & 0\leqslant x<5\end{cases}$

(b) $f(x)=\begin{cases}4x+5, & -2\leqslant x<0\\ 4, & x=0\\ 2x, & x>0\end{cases}$

(c) $f(x)\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x+1, & x>0\end{cases}$

6. 一超级市场最初在货架上存放72听豌豆，发现每天售出8听。当存货量减至0时，他们补充3箱24听装的货。建立一个函数描述这种情况。

## 第二节　几个常用的函数

对于许多从经济管理中引出的函数，都比较容易进行分类和讨论。在这一节里，我们给出这些函数的定义，确定其定义域，并画出图象。

我们讨论的第一个重要函数是我们已经遇到过的——线性函数或其图象是一条非垂直直线的函数。

**定义：线性函数**

**线性函数是下列形式的函数**

$$f(x)=mx+b$$

**其中$m$和$b$为实常数。**

显然，线性函数有定义域$\{x|x\in\mathscr{R}\}$。

线性函数　$f(x)=mx+b$ 的图象是一条斜率为$m$，$y$轴上截距为$b$的直线。

我们下面要用到的另一个函数是二次函数。