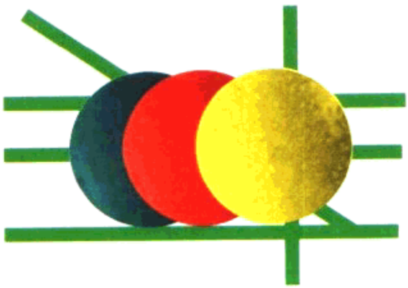
名师解惑丛书



直线和圆

刘长春　编著

山东教育出版社

再版说明

“名师解惑丛书”出版发行以来,以其新颖的编写体例和缜密的知识阐述,深受广大读者青睐,曾连续多次重印.

近几年来,基础教育正发生深刻的改革:“科教兴国”战略深入人心,素质教育全面推进,与此同时,以“普通高等学校招生全国统一考试试卷”为主要载体,所反映出的高考招生改革信息和发展趋势,迫切需要广大教师和莘莘学子以新的视角和思维,关注并投身到这场改革之中.

有鉴于此,我们对“名师解惑丛书”进行了全面修订.此次修订将依然保持被广大读者认同的,每一册书为一个专题讲座的模式,围绕“如何学”,“如何建立知识间的联系”,“如何学以致用”等,帮助广大学生读者解决在学习知识和考试答卷过程中可能遇到的疑难问题.更重要的是,最新修订的“名师解惑丛书”在如何培养学生的创新精神和创造能力,联系现代科学技术及其在日常生产生活中的应用方面,做了较大的充实和修订……

丛书的编写者和出版者相信,您正在翻阅的这本书,将有助于您目前的学习.

作 者 的 话

直线和圆是中学平面解析几何的基础内容，是进一步学习其它内容的基础，在日常生活和经济管理中有着广泛的应用．用解析法研究几何问题是从初等数学过渡到高等数学的阶梯，是数形结合的有力工具．

对直线和圆的研究，处处渗透了数形结合、函数与方程、分类讨论、化归与转化等基本数学思想，并与其它数学分支有着密切的联系．因此，该部分内容在中学数学中占有重要地位．

本书对直线和圆这一内容，立足教材，拓展加深，揭示内在规律，指导思想方法，解决学习之“惑”，以期提高读者的数学能力．本书的主要特点是：

1．对学生容易出错和忽略的问题进行点拨和剖析，帮助他们建立正确的解题思路．

2．特别注意对思维过程的分析．注重揭示概念的内涵与外延，分析知识的内在联系．重视对解题思路的分析，揭示规律，

注重导评.

3. 对典型例题,注重探求多解与拓广,引导学生题后反思,以培养学生的求异思维和创新能力.

4. 强化数学思想、数学方法的渗透和运用,引导学生自觉运用数学思想、方法分析问题和解决问题.

本书对于学生学好直线和圆这一部分内容,解决与之有关的疑难问题,是难得的良师益友.但限于编者的水平,错误、缺点在所难免,敬请读者批评、指正.

2000 年 9 月

作者简介　刘长春,1960 年生,大学本科学历,中学特级教师,现任沂源一中副校长,曾荣获"淄博市专业技术拔尖人才"、"山东省优秀教师"等荣誉称号.曾设计并主持"数学变式教学"的教改实验,其成果获全国一等奖,并被教育部师范司确定为全国中学数学教师继续教育培训教材;曾先后在省级以上刊物发表论文 30 余篇,其中《实施变式教学,提高课堂效益、减轻学生负担》等 8 篇论文被人民大学复印报刊《中学数学教学》全文转载;出版专著 3 种,其中《高考试题分析与数学学习》获全国首届教育图书奖三等奖.

名师解惑丛书

《集合与函数》

《数列　极限　数学归纳法》

《平面三角》

《平面向量》

《不等式》

《直线和圆》

《圆锥曲线》

《线　面　体》

《概率与统计》

《微积分初步》

《复数》

《物体的平衡》

《物体的运动》

《牛顿运动定律》

《守恒定律》

《振动和波》

《气体的性质》

《电场和磁场》

《电路》

《电磁感应》

《氧化还原反应》

《电解质溶液》

《物质的量》

《物质结构与元素周期律》

《非金属元素及其化合物》

《金属元素及其化合物》

《化学反应速率与化学平衡》

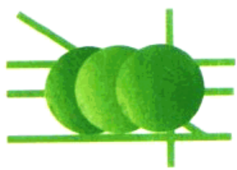
《烃及烃的衍生物》

名师解惑丛书

直线和圆

山东教育出版社

名师解惑丛书



策划\孙永大

责任编辑\霍　亮

装帧设计\革　丽\戚晓东

ISBN 7-5328-2697-X

9 787532 826971 >

ISBN 7-5328-2697-X/G·2475

定价：6.30 元

目　录

引　子

直线和圆是解析几何的基础内容.对这部分内容的学习要求是:掌握有向线段定比分点坐标公式,熟练运用两点间的距离公式和中点坐标公式;理解直线斜率的概念,掌握过两点的直线的斜率公式,熟练掌握直线方程的点斜式,掌握直线方程的斜截式、两点式、截距式、参数式以及直线方程的一般式,能根据条件求出直线的方程;掌握两条直线平行与垂直的条件,能根据直线的方程判定两条直线的位置关系,会求两条直线的夹角和交点,掌握点到直线的距离公式.会确定二元一次不等式表示的区域,掌握线性规划的概念和方法,能够解决简单的线性规划问题和实际应用问题;掌握直角坐标系中的曲线与方程的关系和轨迹的概念,能够根据条件,选择适当的直角坐标系求曲线的方程,并画出方程所表示的曲线;掌握圆的标准方程、一般方

程和参数方程,并能用之解决有关问题;了解用坐标法研究几何问题的思想,初步掌握利用方程研究曲线性质的方法.

解析几何是用代数观点研究几何问题,集中反映了数与形的转换,因而它是数形结合的典范;解析几何用方程表示图形,并与函数紧密联系在一起,因而它又集中体现了函数与方程的思想;在解析几何有关问题的研究中,由于方程的局限性及图形的可变性,常常用到分类讨论,因而它又是训练分类讨论思想的有效素材;解析几何所研究的主要问题就是数与形的转化,各种方程形式的转化,因而它又很好地体现了化归与转化的思想.综上所述,在学习直线和圆这部分内容时,必须注意训练和掌握四大基本数学思想:数形结合的思想、函数与方程的思想、分类讨论的思想、化归与转化的思想.同时,要注意掌握具体体现数学思想的数学基本方法,如消元法、换元法、配方法、待定系数法、参数法等,并把它们作为解题的手段,熟练运用于解题过程.

学习数学的根本目的在于发展数学能力.数学能力的培养与考查,在很大程度上是通过解题来实现的.具体体现为:能否从题目的条件和结论中获得确切信息;能否从记忆系统中提取与题目的信息相关的信息;对从双方提取的信息能否进行有机的组合;对组合能否条理化地整理形成解题的行动序列;在实施解题序列过程中,推理与运算能否顺利完成.上述体现,具体地融化了数学学科的四大能力——逻辑思维能力,运算能力,空间想像能力和分析问题与解决问题的能力.基于直线和圆这一内容的特点,它很好地体现了数学学科的四大能力.因此,在学习这部分内容时,要以数学知识为载体,

培养和发展自己的数学能力，同时，要发挥数学能力的效应指导解题，从而加速解决数学问题的进程.

在直线和圆的具体学习过程中，一要透彻理解基本概念，熟练掌握基本公式及其几何意义，并注意应用于解决问题.二要注意数形结合，作题时，先画一个草图，以帮助寻求解决思路.三要注意题后反思，每作完一个题，要反思一下，是如何作出来的，用到了哪些知识，有什么规律和技巧，还有没有更好的解法；要注意进行题目变式：在题设条件不变的情况下，还能否得到新的结论？改变一下题设条件又会如何？能推广到一般形式吗？进行题后反思，既可以将知识举一反三，融会贯通，又可培养求异思维，发展创新能力，请读者给予足够重视.四要注意知识积累，对知识不断加以总结、归纳，最终形成完整的知识结构.

一、直 线

直线，是解析几何要研究的第一种图形，通过对直线的研究，可初步形成曲线与方程的观点.

（一）两个基本公式

两点间的距离公式和线段定比分点坐标公式是研究解析几何基本问题的有力工具，因而这两个公式可视为解析几何的基本公式.尽管教材中把这两个公式放在了向量一章，我们还是首先把它们简要介绍一下.

1. 两点间的距离公式

在平面直角坐标系中，设两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，则 P_1、P_2 两点间的距离公式为

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

特别地，当 $P_1P_2 \parallel x$ 轴或 P_1、P_2 落

在 x 轴上时，$|P_1P_2|=|x_2-x_1|$；

当 $P_1P_2 /\!/ y$ 轴或 P_1、P_2 落在 y 轴上时，$|P_1P_2|=|y_2-y_1|$；

当 P_1 与原点重合时，$|P_1P_2|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$.

例1 已知两点 $A(2,2)$，$B(5,-2)$，试问能否在坐标轴上找到一点 P，使 $\angle APB$ 是直角？

分析：坐标轴有 x 轴、y 轴，因而解答此题应分别讨论.

解：设在 x 轴上存在点 $P(x,0)$，使 $\angle APB=90°$，则由勾股定理，知

$$|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2.$$

$\therefore (x-2)^2+2^2+(x-5)^2+(-2)^2=(5-2)^2+(-2-2)^2$.

化简，得 $x^2-7x+6=0$，

$\therefore$ $x=1$ 或 $x=6$.

$\therefore$ 在 x 轴上存在点 $P(1,0)$ 或 $P(6,0)$，使 $\angle APB$ 为直角.

设在 y 轴上存在点 $P(0,y)$，使 $\angle APB=90°$，则由勾股定理，得

$(0-2)^2+(y-2)^2+(0-5)^2+(y+2)^2=(5-2)^2+(-2-2)^2$.

化简，得 $y^2+6=0$.

因此方程无实数解，所以在 y 轴上不存在点 P，使 $\angle APB$ 为直角.

综上所述，存在两点 P，其坐标分别为 $(1,0)$ 或 $(6,0)$，使 $\angle APB$ 为直角.

例 2 已知△ABC 的三个顶点为 $A(a\sin\theta_1, a\cos\theta_1)$, $B(a\sin\theta_2, a\cos\theta_2)$, $C(a\sin\theta_3, a\cos\theta_3)$ $(a>0)$, 求△ABC 的外心的坐标.

解: 由题意, $|OA|=\sqrt{a^2\sin^2\theta_1+a^2\cos^2\theta_1}=a$,

同理 $|OB|=|OC|=a$.

∴△ABC 的外接圆是以原点为圆心的圆,故其外心为原点 $O(0,0)$.

[**导评**]解答本题的关键在于应用 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,经观察发现三点 A、B、C 到原点的距离相等,故从"验证"入手,得上述解法.

2. 线段的定比分点坐标公式

设 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$,分点 $P(x, y)$ 分有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比为 λ,则分点 P 的坐标是

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}(\lambda\neq-1).$$

(1)特别地,当点 P 为线段 P_1P_2 的中点时,$\lambda=1$,从而得线段的中点坐标公式:

$$x_P=\frac{x_1+x_2}{2}, y_P=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

(2)由定比分点坐标公式易得△ABC 的重心坐标公式(假定 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $G(x, y)$):

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

(3)要注意对线段的分点坐标公式、中点坐标公式的灵活运用,特别要学会用方程的观点来看待分点公式.

例 3 已知 $P_1(-3,-6)$，$P_2(3,0)$，延长 P_2P_1 到 P，使得 $|P_1P|=\frac{2}{3}|P_1P_2|$，求点 P 的坐标.

分析 1: 如图 1－1，考虑以 P 为分点，可直接应用分点坐标公式，这时只需求出分比 $\lambda(\lambda<0)$ 即可.

解法 1:

$\because |P_1P|=\frac{2}{3}|P_1P_2|$,

$$\therefore |PP_2|=|PP_1|+|P_1P_2|=|PP_1|+\frac{3}{2}|PP_1|=\frac{5}{2}|PP_1|.$$

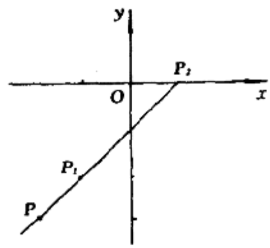


图 1－1

$$\therefore \frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\frac{2}{5}.$$

$\because$ 点 P 是有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 的外分点,

$$\therefore \lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=-\frac{2}{5}.$$

$$\therefore \begin{cases} x=\dfrac{-3-\frac{2}{5}\times 3}{1-\frac{2}{5}}=7, \\[2ex] y=\dfrac{-6-\frac{2}{5}\times 0}{1-\frac{2}{5}}=-10. \end{cases}$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-7,-10)$.

分析 2: 如图 1－1，点 P_1 可以看作是有向线段 $\overline{PP_2}$ 的内

分点，这时 $\lambda=\dfrac{PP_1}{P_1P_2}>0$，只要求出 λ，就可由分点坐标公式间接地求出 $P(x,y)$.

解法 2： $\because |P_1P|=\dfrac{2}{3}|P_1P_2|$，

$\therefore$ 点 P_1 分 $\overline{PP_2}$ 所成的比 $\lambda=\dfrac{PP_1}{P_1P_2}=\dfrac{2}{3}$.

设 $P(x,y)$，由分点坐标公式，得

$$\begin{cases} -3=\dfrac{x+\dfrac{2}{3}\times 3}{1+\dfrac{2}{3}}, \\ -6=\dfrac{y+\dfrac{2}{3}\times 0}{1+\dfrac{2}{3}}. \end{cases}$$

解之，得 $\begin{cases} x=-7, \\ y=-10. \end{cases}$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-7,-10)$.

[**导评**]解法 1 是顺着题意来解的. 而解法 2 则运用了“分点”的相对性，把分点公式看作方程，用方程的观点处理问题，从而使得解法更灵活、简捷. 请读者注意体会这种解题策略.

例 4　已知两点 $A(3,-4)$，$B(-9,2)$，在直线 AB 上求一点 P，使得 $2|AP|=|AB|$.

解： 由 $2|AP|=|AB|$，得

$$\frac{|AP|}{|AB|}=\frac{|PA|}{|AB|}=\frac{1}{2}.$$

$\therefore$ 点 A 分 $\overline{PB}$ 所成的比 $\lambda=\dfrac{PA}{AB}=\pm\dfrac{1}{2}$.

当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，有

$$\begin{cases} 3=\dfrac{x_P+\frac{1}{2}\times(-9)}{1+\frac{1}{2}}, \\ -4=\dfrac{y_P+\frac{1}{2}\times 2}{1+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

解之，得 $\begin{cases} x_P=9, \\ y_P=-7. \end{cases}$

$\therefore$ 点 P 的坐标是 $(9,-7)$.

当 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ 时，有

$$\begin{cases} 3=\dfrac{x_P-\frac{1}{2}\times(-9)}{1-\frac{1}{2}}, \\ -4=\dfrac{y_P-\frac{1}{2}\times 2}{1-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

解之，得 $\begin{cases} x_P=-3, \\ y_P=-1. \end{cases}$

$\therefore$ 点 P 的坐标是 $(-3,-1)$.

综上所述，点 P 的坐标是 $(9,-7)$ 或 $(-3,-1)$.