产品创新管理

——产品开发设计的功能成本分析

胡树华 著

科学出版社

2000年全国硕士研究生入学考试复习指导丛书

数　学 模拟试题与试卷

（理工类）

主编　李正元

编者　刘西垣　周民强　林源渠

　　　周建莹　尤承业　娄元仁

高等教育出版社

(京)112号

图书在版编目(CIP)数据

数学模拟试题与试卷:理工类/李正元主编. —北京:高等教育出版社,1999.5
(2000年全国硕士研究生入学考试复习指导丛书)
ISBN 7-04-007646-2

Ⅰ.数… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-试题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第18537号

责任编辑 吴 向 **封面设计** 顾 斌 **特约编辑** 征道生 **责任印制** 宋克学

2000年全国硕士研究生入学考试复习指导丛书——数学·模拟试题与试卷(理工类)
李正元 主编

出版发行	高等教育出版社		
社 址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电 话	010-64054588	传 真	010-64014048
	021-62587650		021-62551530
网 址	http://www.hep.edu.cn		
印 刷	北京印刷二厂		
开 本	787×1092 1/16	版 次	1999年5月第1版
印 张	32	印 次	1999年5月第1次印刷
字 数	780 000	定 价	31.00元

第一部分　高等数学

第一章　函　数

练　习

研究下列函数的定义域，值域，奇偶性，周期性和有界性：

1. $y = |x|$.　　2. $y = \sqrt{x(4-x)}$.

3. $y = \cos^2 x + 2$.　　4. $y = |\sin x| + |\cos x|$.

证明下列函数在各自的定义域中是无界的.

5. $y = |2x - 1|$.　　6. $y = x\tan x$.

求下列分段函数 $f(x)$，$g(x)$的复合函数 $f[f(x)]$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$，$g[g(x)]$.

7. $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

8. $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ x+1, & x \geqslant 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 1 - x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$

求下列函数的反函数：

9. $y = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.　　10. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

11. $y = \begin{cases} 1 + x, & x \leqslant 0, \\ e^x, & x > 0. \end{cases}$　　12. $y = \begin{cases} x, & x < 1, \\ x^2, & 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ 2^x, & x > 4. \end{cases}$

13. $y = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 3 - x, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

求函数使其满足下列给定的关系式：

14. 设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1 + x^2}\ (x > 0)$，求 $f(x)$.

15. 设 $f\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}\ (x > 0)$，求 $f(x)$.

16. 设 $f\left(x + y, \dfrac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$，求 $f(x, y)$.

17. $z = x - y + f(x + y)$，已知当 $y = 0$ 时 $z = x^2$，求 f 及 z.

解　答

1. $D = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$，$Z = \{y \mid y \geqslant 0\}$，偶函数，非周期，无界.

2. $D=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$, $Z=\{y|0\leqslant y\leqslant 2\}$，非奇非偶，非周期，有界.

3. $D=\{x|-\infty<x<+\infty\}$, $Z=\{y|2\leqslant y\leqslant 3\}$，偶函数，周期是 π，有界.

4. $D=\{x|-\infty<x<+\infty\}$, $Z=\{y|1\leqslant y\leqslant \sqrt{2}\}$，偶函数，周期是$\frac{\pi}{2}$，有界.

5. 对 $\forall M>0$，取 $x_M=\frac{M}{2}+1$ 即可保证 $|2x_M-1|\geqslant 2x_M-1=M+1>M$.

6. 对 $\forall M\geqslant 2$，取 $x_M=[M]\pi+\frac{\pi}{4}$ 即可保证 $|x_M\tan x_M|=x_M>M$. 事实上，当 $n\leqslant M<n+1$ $(n=2,3,\cdots)$ 时，$x_M=n\pi+\frac{\pi}{4}>n+1>M$.

7. $\because$ $f(x)>0\Leftrightarrow f(x)=1\Leftrightarrow x>0$; $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$; $f(x)<0\Leftrightarrow f(x)=-1\Leftrightarrow x<0$,

$\therefore$ $f[f(x)]=f(x)$.

$\because$ $g(x)=\frac{1}{x}>0\Leftrightarrow x>0$; $g(x)=\frac{1}{x}<0\Leftrightarrow x<0$; 而 $g(x)\neq 0$,

$\therefore$ $f[g(x)]=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

$$g[f(x)]=\frac{1}{f(x)}=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

$$g[g(x)]=\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x,\ x\neq 0.$$

8. $\because$ $f(x)\geqslant 1$,

$\therefore$ $f[f(x)]=f(x)+1=\begin{cases}2, & x<0,\\ x+2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

$$g[f(x)]=1-f^2(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ -2x-x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

$\because$ $g(x)<0\Leftrightarrow\begin{cases}1-x^2<0,\\ x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow x>1$,

$\therefore$ $f[g(x)]=\begin{cases}1, & g(x)<0,\\ g(x)+1, & g(x)\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}1, & x>1,\\ 2, & x<0,\\ 2-x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$

$$g[g(x)]=\begin{cases}1, & g(x)<0,\\ 1-g^2(x), & g(x)\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}1, & x>1,\\ 0, & x<0,\\ 1-(1-x^2)^2, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

9. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, $-\infty<x<+\infty$.

10. $y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $-1<x<1$.

11. 函数在 $(-\infty,+\infty)$ 单调增加，因而存在反函数

$$y=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 1,\\ \ln x, & x>1.\end{cases}$$

12. 函数在 $(-\infty,+\infty)$ 单调增加，因而存在反函数

$$y=\begin{cases}x, & x<1,\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16,\\ \log_2 x, & x>16.\end{cases}$$

13. 虽然函数在[1，2]不是单调函数，但不同的 x 对应的函数值 y 不相同，因而存在反函数

$$y=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 3-x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

注意，这个例子表明非单调函数也可能存在反函数；另外这个函数的反函数与原来的函数有相同的解析式.

14. $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}=\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\ (x>0)$.

15. $\because f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\ (x>0)$，

$\therefore f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

16. 将所给条件写成 $f\left(u+v,\dfrac{v}{u}\right)=u^2-v^2$，并令 $u+v=x$，$\dfrac{v}{u}=y$，可解得 $u=\dfrac{x}{1+y}$，$v=\dfrac{xy}{1+y}$，从而

$$f(x,y)=\left(\frac{x}{1+y}\right)^2-\left(\frac{xy}{1+y}\right)^2=x^2\cdot\frac{(1-y)}{(1+y)^2},\ y+1\neq 0.$$

17. 由题设得

$$z=x+f(x)=x^2,$$

从而 $f(x)=x^2-x$，代入即得

$$z=(x+y)^2-2y.$$

第二章　函数的极限与连续

§1　极限的概念与性质

练习 1.1

理解极限的定义.

1.（1999 年）“对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$”是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的(　　).

(A) 充分条件但非必要条件.　　(B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分又非必要条件.

2.“存在正整数 N，对任意给定的 $\varepsilon>0$，当 $n>N$ 时恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$”是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的(　　).

(A) 充分条件但非必要条件.　　(B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分又非必要条件.

3.“$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $0<x-a<\delta$ 时总有 $|f(x)-A|<M\varepsilon$”是 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 的(　　)，其中 M 为某常数.

(A) 充分必要条件.　　(B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分条件但非必要条件.　　(D) 既非充分又非必要条件.

解　答

1. (C). 在数列极限的 ε-N 定义中，任给 $\varepsilon > 0$ 的实质是 ε 为任意小的正数，这里任意给定的 $\varepsilon \in (0, 1)$ 与 2ε 仍保留这一特性.

【评注】 事实上有

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\exists\ N$, 当 $n \geqslant N$ 时恒有

$$|x_n - a| \leqslant M\varepsilon.$$

其中 ε_0, M 为某给定的正数.

可按定义写出证明.

设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ ($\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ N$, 当 $n > N$ 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$) $\Rightarrow \forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, 对 $M\varepsilon$, $\exists\ N'$ 当 $n > N'$ 时恒有 $|x_n - a| < M\varepsilon \Rightarrow n \geqslant N = N' + 1$ 时恒有 $|x_n - a| \leqslant M\varepsilon$.

设对 $\forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\exists\ N$, 当 $n \geqslant N$ 时恒有 $|x_n - a| \leqslant M\varepsilon \Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0$, 若 $\frac{1}{2M}\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, 则 $\exists\ N$, 当 $n \geqslant N$ 时恒有 $|x_n - a| \leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon$. 若 $\frac{1}{2M}\varepsilon \geqslant \varepsilon_0$, 可取 $\varepsilon_1 > 0$ 使得 $\frac{\varepsilon}{2M} \geqslant \varepsilon_0 > \frac{\varepsilon_1}{2M}$, 则 $\exists\ N$, 当 $n \geqslant N$ 时恒有 $|x_n - a| \leqslant M \cdot \frac{\varepsilon_1}{2M} < \varepsilon_1 < \varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

2. (A). 若 $\exists$ 正整数 N, 对 $\forall\ \varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$. 则 $n > N$ 时 $x_n = a$(即从 $N + 1$ 项开始是常数数列).

若不然，$\exists\ n_0 > N$, $x_{n_0} \neq a$. 令 $\varepsilon_0 = |x_{n_0} - a|$, 则 $\varepsilon_0 > 0$, 按假设条件，对 $\forall\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, 又有

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

这便矛盾了.

对常数数列 $x_n = a$ $(n > N)$, 显然有 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

【评注】 在数列极限定义中，"$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ N$, 当 $n > N$ 时……"，这里表明 N 通常与 ε 有关. 若改为"$\exists\ N$, 对 $\forall\ \varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时有 $|x_n - a| < \varepsilon$"，这里 N 是与 ε 无关的.

3. (B). $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$ 的等价定义是：$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$, 当 $0 < x - a < \delta$ 时总有 $|f(x) - A| < M\varepsilon$, 其中 M 为某正的常数.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Rightarrow \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A \Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$, 当 $0 < x - a < \delta$ 时总有 $|f(x) - A| < M\varepsilon$.

显然，$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A \nRightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

练习 1.2

判断下列结论是否正确，并证明你的判断.

1. 若 $x_n < y_n$ $(n > N)$, 又存在极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = B$, 则

$$A < B.$$

2. 设 $f(x)$ 定义在 (a, b), 又 $c \in (a, b)$, 存在极限 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 有界.

3. 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, 则 $\exists\ \delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时 $\frac{1}{f(x)}$ 有界.

解　答

1. 不正确. 这时只能保证 $A \leqslant B$, 不能保证 $A < B$.

例如，$x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{2}{n}$, 则

$$x_n < y_n.$$

但
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 0.$$

【评注】 对不等式 $x_n < y_n \ (n > N)$ 两边取极限时，除保不等号外还要带上等号，即
$$\lim_{n\to+\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

2. 不正确. 这时只能保证：$\exists\, c$ 的一个空心邻域 $v_0(c,\delta)$，$f(x)$ 在 $v_0(c,\delta)$ 有界，不能保证 $f(x)$ 在 (a,b) 有界. 例如
$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad (a,b) = (0,1).$$
取 $c \in (0,1)$，则
$$\lim_{x\to c} f(x) = \frac{1}{c}.$$
但 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 无界.

3. 正确. 因 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)} = 0$，由存在极限的函数的局部有界性 $\Rightarrow \exists\, \delta > 0$，当 $0 < |x-a| < \delta$ 时 $\dfrac{1}{f(x)}$ 有界.

练习 1.3

单项选择.

1. 下列命题中正确的一个是(　　).

(A) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \Rightarrow \exists\, \delta > 0$，当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时有 $f(x) \geqslant g(x)$.

(B) 若 $\exists\, \delta > 0$，使得当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

(C) 若 $\exists\, \delta > 0$，使得当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

(D) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \Rightarrow \exists\, \delta > 0$，当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > g(x)$.

2. (1990 年)　设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 某邻域连续且 $f(0) = 0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x} = 2$，则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处(　　).

(A) 不可导.　　　　(B) 可导且 $f'(0) \neq 0$.

(C) 有极大值.　　　(D) 有极小值.

3. (1996 年)　设 $f(x)$ 处处可导，则(　　)成立.

(A) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(B) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$.

(D) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$.

解　答

1. (D). (D)正是极限的不等式性质中所述的结论. (A)的错误在于，由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不能判断 x_0 附近 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系；由(B)的条件只能得 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. 在(C)中没假设极限存在.

2. 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{1-\cos x}=2>0$，由极限的不等式性质，$\exists\ \delta>0$，当 $0<|x-0|<\delta$ 时

$$\frac{f(x)-f(0)}{1-\cos x}>0,$$

即 $f(x)-f(0)>0\Rightarrow$(D) 成立.

3. 想一想几何图形，曲线伸向无穷远，它的切线斜率不一定趋于∞. 如 $f(x)=x$，则

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty,\ \lim_{x\to\pm\infty} f'(x)=1.$$

于是(C)，(D)不对.

斜率是负的，其函数值未必是负的，如 $f(x)=x^2$，则

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty.$$

于是(B)不对.

因此只可能(A)正确.

【评注】 作为选择填空题，解 2 中的思考过程可以选得正确的结论. 若要证明结论(A)，首先就要用到极限的不等式性质. 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty\Rightarrow\exists\ X>0$，当 $x\geqslant X$ 时 $f'(x)>1\Rightarrow f(x)=f(X)+f'(\xi)(x-X)$ $(x>X,\xi\in(X,x))\Rightarrow f(x)\geqslant f(X)+(x-X)\ (x>X)\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

§2 极限的存在与不存在问题

练习 2.1

证明下列数列$\{x_n\}$是收敛的：

1. $x_n=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$.

2. $x_n=\dfrac{1}{3+1}+\dfrac{1}{3^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{3^n+1}$.

3. $x_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$.

4. $x_n=\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\ (n=2,3,\cdots)$.

解　答

1. x_n 中的每个乘积因子均是正的且小于 $1\Rightarrow x_n>0$，$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1-\dfrac{1}{2^{n+1}}<1\Rightarrow x_n$ 单调下降有下界$\Rightarrow x_n$ 收敛.

2.
$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{3^{n+1}+1}>0,$$

$$x_n<\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^n}<\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow x_n$ 单调上升有上界$\Rightarrow x_n$ 收敛.

3. **【证法 1】** 显然 x_n 不是单调的. 但若考虑它的偶数项组成的数列

$$x_{2n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right),$$

其中每个括号内的数均大于零⇒

$$x_{2n+2}-x_{2n}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}>0$$

⇒x_{2n}单调上升，又

$$x_{2n}=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}\right)-\frac{1}{2n}<1.$$

因此，x_{2n}单调上升有上界⇒x_{2n}收敛.记 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n}=a$.

再考察 x_{2n+1}：$x_{2n+1}=x_{2n}+\dfrac{1}{2n+1}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n+1}=a$. 因此，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$.

【证法 2】 x_n 是交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 的部分和数列：$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{1}{k}=x_n$. 显然，$\dfrac{1}{n}$单调下降趋于零，由莱布尼茨法则 ⇒ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 收敛 ⇒$S_n=x_n$ 收敛.

4. 显然 x_n 单调上升，因为 $x_n>0$ 且

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=1+\frac{1}{(n+1)^2}>1.$$

证明 x_n 的有界性遇到了困难，但我们知道：

$$y_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right),$$

显然是正的，单调有界的⇒

$$x_ny_n=\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1-\frac{1}{3^4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^4}\right)<1,$$

$$x_n<\frac{1}{y_n}.$$

若 y_n 有正的下界即得 x_n 有界.

事实上，

$$y_n=\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\cdots\cdot\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{1\times3}{2^2}\cdot\frac{2\times4}{3^2}\cdot\frac{3\times5}{4^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n}\to\frac{1}{2}\ (n\to+\infty)$$

⇒y_n 单调下降有极限 $\dfrac{1}{2}$⇒$y_n>\dfrac{1}{2}$.

因此 $x_n<2$，x_n 单调上升有上界，x_n 是收敛的.

练习 2.2

对下列函数 $f(x)$，极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$是否存在？

1. $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}$.　　　　2. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$.

3. $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\cdot\arctan\dfrac{1}{x}$.　　　　4. $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x^2}$.

解　答

1. 考察左右极限 $f(0+)$ 与 $f(0-)$.

$$\lim_{x\to0+}f(x)\xlongequal{t=e^{\frac{1}{x}}}\lim_{t\to+\infty}\frac{t+1}{t-1}=1,\ \lim_{x\to0-}f(x)\xlongequal{t=e^{\frac{1}{x}}}\lim_{t\to0}\frac{t+1}{t-1}=-1$$

$\Rightarrow$
$$\lim_{x\to0+}f(x)\neq\lim_{x\to0-}f(x)\Rightarrow\lim_{x\to0}f(x)\text{ 不存在.}$$

2. 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\to0\ (n\to+\infty)\Rightarrow$

$$\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x_n^2}\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2=+\infty$$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.

注:若再取 $y_n=\dfrac{1}{2n\pi}$,则

$$\lim_{n\to+\infty}f(y_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{y_n^2}\sin\frac{1}{y_n}=0.$$

因此 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 空心邻域是无界的,但 $x\to0$ 时它不是无穷大量.

3.
$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\cdot\lim_{x\to0+}\arctan\frac{1}{x}=1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\lim_{x\to0-}\arctan\frac{1}{x}=-1\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$
$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ 存在
$$\lim_{x\to0}f(x)=\frac{\pi}{2}.$$

4. 题 2 中已证:$x^2\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 空心邻域是无界的,又 $\sin\dfrac{1}{x^2}$是有界的$\Rightarrow x^2\sin\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x^2}$ 在 $x=0$ 空心邻域是无界的$\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x^2}\right)$ 不存在.

§3　无穷小量和它的阶

练习 3.1

比较无穷小量的阶.

1. (1989 年)　当 $x\to0$ 时 2^x+3^x-2 与 x 相比是(　　)的无穷小量.

(A) 等价.　　(B) 同阶非等价.　　(C) 高阶.　　(D) 低阶.

2. (1997 年)　当 $x\to0$ 时 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t$ 是 $g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$ 的(　　)无穷小量.

(A) 低阶.　　(B) 高阶.　　(C) 等价.　　(D) 同阶非等价.

3. （1997 年） 设 $f(x)$，$g(x)$在 $x=0$ 某邻域连续且 $x\to 0$ 时 $f(x)$是 $\varphi(x)$的高阶无穷小，则 $x\to 0$ 时 $\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t$ 是 $\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t$ 的（　　）无穷小.

（A）低阶.　　　　（B）高阶.

（C）同阶非等价.　　　　（D）等价.

解　答

【分析】 这是几道比较无穷小阶的题目，比较无穷小量 $f(x)$，$g(x)$的阶，就是求$\frac{0}{0}$型极限 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$，看它是属于：0；∞；$0<l<+\infty$，$l\neq 1$；$l=1$ 中的哪一种情形，求$\frac{0}{0}$型极限常用洛必达法则. 求变限积分的导数时要用变限积分求导法.

1. 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{x\to 0}\frac{(2^x+3^x-2)'}{x'}=\lim_{x\to 0}(2^x\ln 2+3^x\ln 3)=\ln 6,$$

故选(B).

2. 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t\right)'}{\left(\frac{x^5}{5}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)^2\sin x}{5x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{5x^4}\cdot\sin x=0.$$

其中

$$\sin(1-\cos x)^2\sim(1-\cos x)^2\quad(x\to 0),$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,$$

故选(B).

3. 因

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t}{\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\sin x}{\varphi(x)x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0\times 1=0.$$

故选(B).

注：当 $x\to x_0$ 时比较无穷小量 $f(x)$与 $g(x)$的阶，等价于比较 $f^*(x)$与 $g^*(x)$的阶，其中

$$f(x)\sim f^*(x),\ g(x)\sim g^*(x)\quad(x\to x_0).$$

练习 3.2

确定无穷小量的阶与比较无穷小量的阶.

1. 当 $x\to 0$ 时，下列无穷小中：

$\ln(1+\sin x)$，$x-\sin x$，$x\tan x$，$\dfrac{x^6}{1-\sqrt{\cos x^2}}$，$\dfrac{1}{\ln|x|}$（　　　　）是 x 的一阶无穷小；（　　　　）是 x 的二阶无穷小；（　　　　）是 x^2 的高阶无穷小.

2. 设 $\alpha>0$，$\beta>0$ 为任意正数，当 $x\to+\infty$ 时，将无穷小量：$\frac{1}{x^\alpha}$，$\frac{1}{\ln^\beta x}$，e^{-x}按从低阶到高阶的顺序排列.

解 答

1. (1) $\ln(1+\sin x) \sim \sin x \sim x \quad (x \to 0)$

$\Rightarrow x \to 0$ 时，$\ln(1+\sin x)$ 是 x 的一阶无穷小.

(2) 因 $x \to 0$ 时

$$(x-\sin x)' = 1-\cos x \to 0,\ (1-\cos x)' = \sin x \to 0,\ (\sin x)' = \cos x \to 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

$\Rightarrow$ $x \to 0$ 时 $\sin x - x$ 是 x 的三阶无穷小.

或用泰勒公式

$$x - \sin x = x - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \quad (x \to 0)$$

$\Rightarrow$ $x \to 0$ 时 $x - \sin x$ 是 x 的三阶无穷小.

(3) 因 $\tan x \sim x$ 是 x 的一阶无穷小 $\Rightarrow x\tan x$ 是 x 的二阶无穷小.

(4) $1 - \sqrt{\cos x^2} = \dfrac{1}{1+\sqrt{\cos x^2}}(1-\cos x^2) \sim \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}(x^2)^2$

$\Rightarrow 1 - \sqrt{\cos x^2}$ 是 x 的 4 阶无穷小 $\Rightarrow \dfrac{x^6}{1-\sqrt{\cos x^2}}$ 是 x 的 $(6-4=2)$ 2 阶无穷小.

(5) 考察

$$\lim_{x\to 0} x\ln|x| = \lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{\ln|x|}} = 0$$

$\Rightarrow$ $x \to 0$ 时 x 是比 $\dfrac{1}{\ln|x|}$ 高阶的无穷小量.

因此，$x \to 0$ 时，

$\ln(1+\sin x)$ 是 x 的 1 阶无穷小；$x\tan x$，$\dfrac{x^6}{1-\sqrt{\cos x^2}}$ 是 x 的 2 阶无穷小；$x - \sin x$ 是 x^2 的高阶无穷小.

2. 考察

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^\alpha}}{\frac{1}{\ln^\beta x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\beta\ln^{\beta-1}x\cdot\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\beta\ln^{\beta-1}x}{\alpha x^\alpha}$$

$$= \cdots = \lim_{x\to+\infty}\frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-m+1)\ln^{\beta-m}x}{\alpha^m x^\alpha} = 0.$$

其中 $m = [\beta]+1$（$[\beta]$是不超过 β 的最大整数）. 于是

$$\frac{1}{x^\alpha} = o\left(\frac{1}{\ln^\beta x}\right) \quad (x \to +\infty).$$

再考察

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)x^{\alpha-m}}{e^x}$$

$$= 0,\ m = [\alpha] + 1.$$

因此，$x \to +\infty$ 时按从低阶到高阶的顺序排列为

$$\frac{1}{\ln^{\beta} x},\ \frac{1}{x^{\alpha}},\ \mathrm{e}^{-x}.$$

【评注】 上述结论表明：当 $x \to +\infty$ 时，若以 $\frac{1}{x}$ 为基本无穷小，对 $\forall\ \alpha > 0$（不论它多么大），e^{-x} 都比 $\frac{1}{x^{\alpha}}$ 高阶；对 $\forall\ \beta > 0$（不论它多么大），$\forall\ \alpha > 0$（不论它多么小），$\frac{1}{x^{\alpha}}$ 都比 $\frac{1}{\ln^{\beta} x}$ 高阶.

§4 求极限的方法

练习 4.1

求下列极限：

1. $w = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$.　　2. $w = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+x-1} + x + 1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

3. $w = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin x + x^2 \cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.　　4. $w = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$.

5. $w = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\sin x}}{x - \sin x}$.　　6. $w = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1 - \sqrt{\cos x}}{x\left(1 - \cos\sqrt{x}\right)}$.

7. $w = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x - \sin x}{\arctan x - \tan x}$.

8. $w = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{x\sin x}$.

9. $w = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$.　　10. $w = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.

解　答

【分析】 这些极限属于 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型. 求 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限常用的方法有：

1° 通过恒等变形约去(或在取极限的意义下约去)分子、分母中极限为零或∞的因子，然后用极限四则运算法则；

2° 用洛必达法则；

3° 作变量替换与等价无穷小因子替换；

4° 用重要极限公式；

5° 用泰勒公式(若对泰勒公式不熟练，可不用此法).

1. 作恒等变形：分子、分母同乘 $\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}$，得

$$w = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x(1-\cos x)\left(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}\right)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x(1-\cos x)}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}.$$

2. 作恒等变形：分子、分母同除 $-x\ (x<0)$，注意 $-x = \sqrt{x^2} = |x|$，得

$$w=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=\frac{2-1}{1}=1.$$

3. 作恒等变形：分子、分母同除以 x，有

$$w=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{3\frac{\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}}{\frac{\ln(1+x)}{x}}=\frac{3}{2}.$$

【评注 1】 题 1～3 均是作简单恒等变形后消去极限为 0 或∞的因子，或直接相等或等价无穷小取极限后相消，其中还用到两个重要的极限公式.

【评注 2】 题 1～3 均是$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型的极限，有的也可用洛必达法则，但并不简单. 有的则不能用洛必达法则. 如题 3，因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}\right)'}{x'}$$

不存在.

4. 属于$\frac{0}{0}$型. 先用等价无穷小因子替换：

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{x}\quad(x\to\infty).$$

再用洛必达法则，得

$$w=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{arccot}x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}=1.$$

5. 这是$\frac{0}{0}$型的. 从其特点看，不要立即用洛必达法则，先作恒等变形与变量替换，

$$w=\lim_{x\to0}\frac{e^x(1-e^{\sin x-x})}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}e^x\lim_{t\to0}\frac{1-e^{-t}}{t}=1.$$

6. 先作恒等变形与等价无穷小因子替换：

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\ 1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}x\quad(x\to0).$$

$$w=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}.$$

7. 直接用洛必达法，

$$w=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\cos x}{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\cos^2x}}=\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{(1+x^2)\cos^2x}{\cos^2x-(1+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+x^2)\cos^2x}{\sqrt{1-x^2}}\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}\cos x}{\cos^2x-(1+x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}\sin x+\frac{x\cos x}{\sqrt{1-x^2}}}{-2\sin x\cos x-2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}\frac{\sin x}{x}+\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x\frac{\sin x}{x}+1}$$

$$=-\frac{1}{2}\times\frac{2}{2}=-\frac{1}{2}.$$

8. 先作恒等变形与等价无穷小因子替换：

$$w=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[(1+x^2)^2-x^2]}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^4}{x^2}=1,$$

其中 $\ln(1+x^2+x^4)\sim x^2+x^4$.

【评注】 从题 4～7 的求解中看到，在用洛必达法则求 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 的极限时，要注意作恒等变形和等价无穷小因子替换，以简化计算.

9. **【解法 1】** 直接用洛必达法则得

$$w=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(\sin x+\cos x)-1-2x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x\cos x-2}{6x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}(e^x\cos x-e^x\sin x)=\frac{1}{3}.$$

【解法 2】 用泰勒公式求解.

$$e^x\sin x=\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)$$

$$=x+x^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3)=x+x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\Rightarrow\qquad w=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

10. 看成 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的，通过变量替换又化成 $\frac{0}{0}$ 型：

$$w=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2te^{t^2}}=0.$$

【评注 1】 在题 10 中，若把所求极限看成 $\frac{0}{0}$ 型，便有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

易见等式右端的极限变得更复杂了. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型未定式，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$ 便是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式. 因此在求它的极限时，将它看成 $\frac{0}{0}$ 型用洛必达法好呢？还是看成 $\frac{\infty}{\infty}$ 型用洛必达法则？有时需要考虑这个问题，当然这是视情况而定.

【评注 2】 类似于题 10 的方法可证：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k}=0.$$

练习 4.2

求下列极限：

1. $w=\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.　　2. $w=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}}\right)$，$(a,b>0)$.

3. $w=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.　　4. $w=\lim\limits_{x\to1-0}\sqrt{1-x^2}\cot\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

5. (1996 年)　$w=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

解　答

【分析】 这是几道求 $0\cdot\infty$ 或 $\infty-\infty$ 型的极限，按通常的方法：化成 $\dfrac{0}{0}$ 型的，再用洛必达法则. 在求解的过程中要注意作恒等变形和等价无穷小因子替换以简化计算.

1. 属于 $0\cdot\infty$ 型，可化为 $\dfrac{0}{0}$ 型.

$$w=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\cot\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}\csc^2\frac{\pi x}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

也可化为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，则

$$w=\lim_{x\to1}\frac{\tan\frac{\pi x}{2}}{\frac{1}{1-x}}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{2}x}\cdot\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{(1-x)^2}}=\frac{\pi}{2}\lim_{x\to1}\frac{(1-x)^2}{\cos^2\frac{\pi}{2}x}$$

$$\xlongequal{x-1=t}\lim_{t\to0}\frac{\left(\frac{\pi}{2}t\right)^2}{\sin^2\frac{\pi}{2}t}\,\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

前一种方法更简单些.

2. 属于 $\infty\cdot0$ 型，可化为 $\dfrac{0}{0}$ 型.

$$w=\lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0}\frac{a^t-b^t}{t}=\lim_{t\to0}(a^t\ln a-b^t\ln b)=\ln\frac{a}{b}.$$

本题化为 $\dfrac{0}{0}$ 型是自然的，若化为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 的

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\left(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}}\right)^{-1}},$$

再用洛必达法则就繁了.

3. 属于 $\infty-\infty$ 型，先化成 $\dfrac{0}{0}$ 型.

$$w=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^2\sin^2x}.$$

作等价无穷小因子替换与恒等变形得

$$w=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}=2\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$