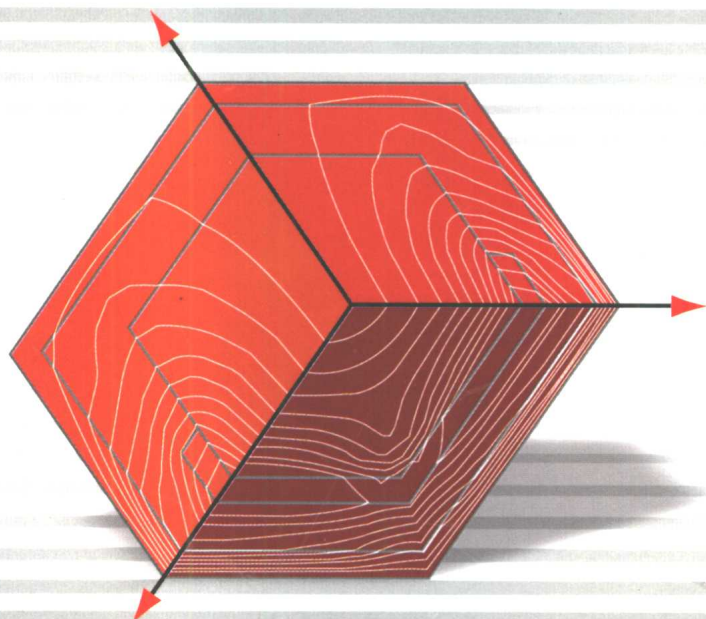


机械工业出版社高水平著作出版基金资助项目

三维涡流场的有限元分析

谢德馨 姚纓英 编著
白保东 李锦彪



机械工业出版社
China Machine Press

机械工业出版社高水平著作出版基金资助项目

三维涡流场的有限元分析

谢德馨 姚纓英 编著
白保东 李锦彪
汤蕴璆 主审



机械工业出版社

本书系统、简要地阐述了电工设备中的电磁场——涡流场的基本理论与有限元分析方法。

全书共7章,内容主要包括:三维正弦涡流场和瞬态涡流场的有限元解法;铁磁材料中涡流场计算的特点和处理方法;大型稀疏代数方程组的解法;有限元网格的自动生成和电磁场分析结果的后处理等问题。书中附有若干计算实例,每章后面附有参考文献,书末还附有求解大型稀疏代数方程组的ICCG法源程序。

本书中的部分内容,特别是表面阻抗法的有限元模型,三维瞬态涡流场的求解,牛顿-拉夫逊法在解复非线性代数方程组中的应用,将ICCG法用于求解大型工程问题的经验,二、三维网格的自动生成及三维场图示等内容,收入了电磁场有限元分析的新进展,也反映了作者近年来的研究成果。

本书可供高等工科院校电气工程学科的研究生、教师和从事电工设备设计及运行维护工作的工程技术人员阅读、参考。

图书在版编目(CIP)数据

三维涡流场的有限元分析/谢德馨等编著. —北京:机械工业出版社, 2001.3

ISBN 7-111-08704-6

I. 三... II. 谢... III. 三维—涡旋流动—场(力学)—有限元分析 IV. 0351.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第02733号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码 100037)

责任编辑:卢若薇 版式设计:霍永明 责任校对:李秋荣

封面设计:姚毅 责任印制:路琳

北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2001年3月第1版·第1次印刷

850mm×1168mm¹/₃₂·7.25印张·193千字

0 001—1 500册

定价:18.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换
本社购书热线电话(010) 68993821、68326677-2527

前 言

计算电磁学(Computational Electromagnetics)是经典电磁学的发展,它以计算机为工具研究工程中的电磁学问题。近30年来,计算电磁学已经发展成为一门综合性的学科。它涉及电磁场理论、数值分析方法、计算机图示学、优化方法和计算机软件工程等诸多方面,它的研究范围也不断扩大——从二维场到三维场,从稳态场到瞬态场直至微波电磁场,以及从正问题到逆问题。目前,计算电磁学广泛应用于工程技术中涉及电磁理论的许多领域。涡流场特指求解区域中含有导电材料的似稳电磁场。涡流场的数值计算已成为电机、变压器等电工设备设计和运行中不可缺少的计算工具。

在似稳电磁场的计算中,三维涡流分析被认为最为复杂和繁琐,但许多工程问题的解决又很难避开三维涡流场的计算。本书试图由浅入深地介绍三维涡流场的理论和它的有限元计算方法,为强电专业领域开展研究工作做些基础准备,也供从事电工设备设计和运行维护工作的工程师和研究人员参考,使他们了解电磁学的语言,便于学会电磁场分析的商用软件,理解场的图示,能够说明数值计算结果并把它们体现在设计过程中。

为便于从事三维涡流分析的读者自己动手编制计算机程序或深入理解计算机理,本书第2章给出了三种基本等参元的离散化表达式,并提供了用于检验计算方法正确性的实际算例(TEAM Workshop 问题7、问题10和问题21)。

三维电磁场有限元分析的关键问题之一,是大型稀疏对称代数方程组的求解。本书在附录中给出了求解实系数方程组的一种预处理共轭梯度法计算机程序,该程序经过少量修改即可适用于求解复系数方程组。这一程序已经过本书作者多年计算实践的检

验，表明具有较好的通用性。

本书融入了作者及沈阳工业大学工程电磁场研究室近十余年的科研成果。在这些研究工作中，博士研究生曾林锁副教授、王金铭副教授，博士研究生闫秀恪、硕士研究生栾茹、张艳丽和曾建斌老师作出了很多成绩，在此表示衷心的感谢。

本书由哈尔滨理工大学汤蕴璆教授主审。他仔细审阅了全稿，改正了手稿中的一些不妥之处，并对内容安排提出了宝贵意见，在此致以深切的谢意。

本书的出版得到了机械工业出版社出版基金的资助，本书所包含的研究工作得到了辽宁省科学技术委员会两项自然科学基金的资助，在此一并表示感谢。

由于作者水平有限，书中可能还有不少缺点错误，恳请读者批评指正。

谢德馨

2000年10月

目 录

前言

第 1 章 基本理论	1
1.1 概述: 计算电磁学的发展历史与现状	1
1.1.1 发展历史的简单回顾	1
1.1.2 当前概况	2
1.1.3 计算电磁学未来的展望	4
1.1.4 有限元法在计算电磁学发展中的地位	5
1.2 电磁场控制方程的表述	6
1.2.1 电磁场的基本方程	6
1.2.2 三维涡流分析的特点	8
1.2.3 三维涡流场控制方程的表述	11
1.3 涡流场分析数学模型的建立, 唯一性问题	14
1.3.1 求解区域的定义	14
1.3.2 用场矢量表示的定解问题	15
1.3.3 矢量磁位与标量电位, A, ϕ - A 法数学模型的导出	16
1.3.4 标量电位的作用	22
1.3.5 矢量电位与标量磁位, T, ψ - ψ 法	25
1.4 边界条件	29
1.4.1 不同媒质分界面上的边界条件	29
1.4.2 场域边界条件	30
参考文献	34
第 2 章 有限元法的实施	36
2.1 基于变分原理的有限元法	36
2.1.1 古典变分法简介	36
2.1.2 变分有限元法	43
2.2 伽辽金有限元法	46
2.2.1 伽辽金有限元法简介	46

2.2.2 函数的分片展开与单元插值基函数的构成	47
2.2.3 三维正弦电磁场有限元离散化方程的建立	56
2.3 计算实例: 线性正弦稳态涡流问题 (TEAM Workshop 问题 7)	76
参考文献	79
第 3 章 三维瞬态涡流场	81
3.1 时步法	81
3.1.1 基本方程	81
3.1.2 时间离散	82
3.1.3 非线性磁参数的处理	87
3.2 状态空间法	88
3.2.1 基本方程	88
3.2.2 计算步骤	92
3.3 计算实例: 非线性瞬态涡流问题 (TEAM Workshop 问题 10)	92
参考文献	97
第 4 章 铁磁材料中的涡流场	99
4.1 铁磁材料中涡流场计算的特点	99
4.2 各向异性问题	101
4.2.1 结构各向异性	101
4.2.2 材料各向异性	102
4.3 正弦激励下非线性电磁场的磁导率	107
4.3.1 问题的复杂性	107
4.3.2 有效磁导率的计算	108
4.4 表面阻抗法	110
4.4.1 一维表面阻抗条件的导出	111
4.4.2 对一维表面阻抗条件的修正	112
4.4.3 饱和工作状态时的表面阻抗	115
4.4.4 表面阻抗法的有限元模型	117
4.5 计算实例: 铁磁材料中的涡流与磁场 (TEAM Workshop 问题 21)	121
参考文献	125
第 5 章 有限元离散化方程组解法的若干问题	129

5.1 求解线性方程组的方法分类	129
5.2 预处理共轭梯度法	130
5.2.1 共轭梯度法简介	130
5.2.2 预处理共轭梯度法	135
5.2.3 ICCG 法应用中的几个问题	138
5.3 牛顿-拉夫逊法在求解非线性代数方程组中的应用	140
5.3.1 牛顿-拉夫逊法简介	140
5.3.2 牛顿-拉夫逊法在静磁场有限元分析中的迭代格式	142
5.3.3 用牛顿-拉夫逊法求解正弦涡流场复系数非线性 代数方程组	146
参考文献	151
第 6 章 有限元网格的自动生成	153
6.1 概述: 有限元分析的瓶颈问题——网格自动生成技术	153
6.2 实体造型技术中形体表示的几种常用模式	155
6.3 二维与三维有限元网格生成方法的分类	157
6.3.1 自动与半自动网格生成方法的综合分类	157
6.3.2 几种流行的全自动网格生成方法	159
6.4 网格自适应细分与后验误差估计	163
6.4.1 互补变分法	164
6.4.2 局部误差分析法	166
6.5 网格生成方法举例	168
6.5.1 用拓扑分解法生成三角形网格	168
6.5.2 基于正四面体八叉树法的三维网格自动生成	175
参考文献	182
第 7 章 有限元分析的后处理	185
7.1 局部与总体电磁量的计算	185
7.2 力与力矩的计算: 经典理论与有限元法的结合	190
7.2.1 麦克斯韦应力法	191
7.2.2 虚功原理	194
7.2.3 计算实例	198
7.3 三维涡流场场矢量的图示	200
7.3.1 标量场与矢量场的图形显示	200
7.3.2 场矢量的点图标表示	201

7.3.3 磁场的场线表示	207
参考文献	212
附录	
求解稀疏对称方程组的 ICCG 法源程序	214
附 A 程序说明	214
附 A.1 程序功能与结构	214
附 A.2 存储方式与主要符号说明	215
附 B 程序	217
附 B.1 主程序单元	217
附 B.2 模块	223
附 B.3 数据模块	223
附 B.4 输出结果 (算例)	224

第 1 章 基 本 理 论

1.1 概述：计算电磁学的发展历史与现状

1.1.1 发展历史的简单回顾

电磁学是经典物理学的一个分支，主要研究源（电荷、电流）与场（电场、磁场）的相互联系、相互作用的规律。计算电磁学(Computational Electromagnetics)是经典电磁学的发展与应用，它以计算机为工具，研究工程中的电磁学问题。

电磁理论的研究具有悠久的历史。静磁学方面最早的应用——指南针的发明，可以追溯到 4600 年以前的中国。在静电学方面，摩擦起电现象是在 2600 年前的希腊发现的。电磁理论的迅速发展是近 300 年的事，欧洲的工业革命首先促进了这一发展。人们从静电、静磁开始，认识了动电（电流）与磁场的关系，认识了电磁波。100 多年前，麦克斯韦总结了前人的研究成果，建立了电磁场理论（其著作《Treatise on Electricity and Magnetism》成书于 1873 年）。其后，赫兹用实验证明了这一理论的正确性。从理论框架上看，麦克斯韦方程组加上洛伦兹力的计算公式，合起来构成了静止及低速运动媒质中电动力学的基础，概括了发电机、电动机和其它电磁装置的工作原理，也概括了电磁波的发射、传播和接收的原理。至此，电磁学已发展成为经典物理学的较完善的分支。但是，麦克斯韦方程组的实际应用并不容易。在计算机技术发展以前，工程问题的解决依赖于解析法或场化为路的简化方法，这些方法在电工产品的设计中曾起了重要的历史作用。例如，在电机设计中常常假设气隙是均匀的，定、转子开槽对气隙磁场的影响用一个大于 1 的系数来考虑，看作气隙长度的等效增加。这一系数称为卡特系数，是在较多的简化假设下应用许瓦兹-克利斯多夫变换^[1]求出的。此外，定、转子比漏磁导的计算^[2]，同

步发电机磁极极面形状（这一形状在一定条件下可保证气隙磁场按正弦分布）的计算^[3]等等，都是解析法应用的范例。但是，大量的工程问题包含了复杂的几何、物理参数，对此，解析法或简单的场化路方法是无能为力的。

最近 30 多年来，电子计算机技术的迅速发展促进了计算电磁学的前进。作为计算电磁学的主要部分，电磁场数值分析的理论与方法得到了较充分的研究。已经发展起来的数值分析方法可以分成积分方程法和微分方程法两大类。积分方程法还可再分为体积分方程法和边界元法；微分方程法主要包括有限差分法和有限元法。有限元法是目前应用最广泛的一种数值算法，最初是在力学领域提出并发展起来的。把有限元法首先用于电工设备电磁场计算的是 Winslow^[4]，他用有限元法分析了加速器磁铁的饱和效应。Silvester 和 Chari^[5]则提出了电机内电磁场问题的第一个通用非线性变分表述。自此以后，有限元法在各种电工问题中得到了广泛应用，与此有关的研究文章不胜枚举。其中，70 年代 Anderson^[6]对变压器漏磁场的研究，奥田（Okuda）^[7]等人对汽轮发电机端部磁场的研究，80 年代 Nakata^[8]等人对电磁材料特性的数值模拟和实验研究，Morisue^[9]、Biro^[10]等人对规范问题的新见解，都是富有开创性的成果。

1.1.2 当前概况

目前，计算电磁学已发展成为一门综合性的学科，它涉及电磁场理论、数值分析、优化方法、计算机软件工程等多个方面，所求解的问题深入到工业生产的各领域。数千篇研究论文发表在国际性的学术会议和刊物上。COMPUMAG（Computing Electromagnetic Fields）Conference 是这一学科最重要的世界性会议，从 1976 年至 1997 年，这一会议共举行了 11 次，大约 2000 篇论文参加了交流。从交流论文中反映出的计算电磁学已经取得的成就和尚待解决的问题如下：

1) 有限元法（FEM）的二维、三维解已经有了很大发展，包括对稳态、时变场问题和非线性问题、运动媒质问题的处理，对

规范问题的正确理解等等。用有限元法解决工程问题的论文所占的比例最大。目前，三维涡流场分析仍然是最受重视的问题之一。

2) 边界元法 (BEM) 可以用来分析二维、三维问题，但边界元与有限元相比较，哪一种方法更有前途，仍没有定论。

3) 用棱边元 (Edge Element) 方式构造 FEM 和 BEM 的基函数，是对传统节点元的革新，对于描述场的变化和连续性提供了有效的物理框架。

4) 提出了用于有限元的其它泛函，其中包含了能量的上界解和下界解以及构成方法。

5) 所研究场域外部问题的处理有多种方法，特别是 Kelvin 变换（用于与 FEM 结合）已被广泛采用。

6) 网格的自动形成和误差分析已经取得了很大进展，但是自适应三维网格的生成还有待于大力研究。

7) 电磁场分析的逆问题和优化问题发展很快，几种随机化的总体优化方法正在平行研究，但是尚未形成通用性强、易于操作的高效能方法。

8) 软件的操作与运行环境已经有了长足的进步，开发出了一批电磁场分析的商品软件，其中包括用以计算三维恒定电、磁场和涡流场及其后处理的功能，在实际工作中给设计工程师带来了很大的方便。

9) 利用计算电磁学的工具已能够进行电磁设备的有效设计，避免制造昂贵的样机，能够研究许多传统方法不能解决的问题，因而这一工具在许多工业领域得到了日益广泛的应用。

10) TEAM (Testing of Electromagnetic Analysis Method) Workshops 的有组织的学术活动是计算电磁学积极发展的标志之一。数值计算的结果是大量的数据，对于三维工程问题，数据量常超过几十兆。如何从计算结果来检验计算方法和相应计算机软件的正确性，这个问题本身就构成值得研究的课题。计算电磁学的研究者们提出了一个又一个实验模型并给出详细的测试数

据, 分别模拟某一类工程问题, 经 TEAM Workshop 的国际学术组织确认后, 作为检验和比较各种算法计算精度的模型题目, 称为 TEAM Workshop 问题。至 2000 年 7 月, 已经确认了 30 个这类问题。

1.1.3 计算电磁学未来的展望

下面引用 Trowbridge 在关于 COMPUMAG 前十次会议的总结文章^[11]中的一段话来说明对计算电磁学今后发展的估价: “关于未来, 可能是乐观的。很多年来, 要让工业界的管理人员和工程设计人员相信 ‘计算电磁学的工具很有用’ 并不是很容易的。其原因部分是由于技术上的局限性——这一工具的使用确实存在问题, 但这也是一种正在变化的计算机世界中的文化现象。由于软件技术的新发展, 这一局限性正在消失。但最重要的变化来源于对年轻一代技术人员计算机能力的期望。” 我国的情况也是这样, 80、90 年代培养出来的大学生、研究生为工业界注入了新鲜的血液, 计算电磁学的进一步快速发展是可以预见的。

对于 “2000 年的难点”, 文献 [11] 列出下面 10 个方面可供参考:

- 1) 三维电磁分析, 其中包含物体的运动, 并行处理和耦合问题;
- 2) 非线性介质中波的传播, 微分与积分方程的混合方法;
- 3) 总体优化方法 (多目标, 非线性约束);
- 4) 知识数据库和智能设计系统的集成, 以便构造适当的工业设计环境;
- 5) 各种几何建模方式, 布尔算子和自适应网格;
- 6) 对铁磁物质磁滞特性 (包括局部磁滞回环) 的模拟;
- 7) 参数提取 (Parameter Extraction), 电网与电磁设备的耦合, 电机的瞬态运动和系统分析, 成为研究新设备的基本部分;
- 8) 电磁场与相关学科 (热, 力, 流体) 的结合;
- 9) 利用图形与彩色进行三维场的显示;
- 10) 为上述研究服务的可行的国际数据标准的研究。

文献 [12] 也提出了几个值得关注的研究方向, 包括半解析数值方法, 离散形式的约束方程, 非线性电磁场, 以及寻找建立数值方法的其它途径等。

电磁场数值计算方法的发展已经有 30 多年的历史, 数值计算本身的优势和弱点也已比较充分地显示出来。就学科而言, 电磁场数值分析介于基础学科和工程应用学科之间, 目前这一学科已逐步走向总结的阶段。许多研究者都在作深入思考, 并寻找新的突破点。

1.1.4 有限元法在计算电磁学发展中的地位

在电磁场数值分析中, 有限差分法先于有限元法得到应用。有限差分法的特点是直接求场的基本方程和定解条件的近似解。其基本步骤是, 首先将求解区域分成等距或不等距的矩形网格(二维)或立方形网格(三维), 然后在网格的结点上用差分方程近似微分方程, 形成离散化的差分方程组并求解之。当采用较多结点时, 近似解的精度可以得到改善。有限差分法有它自己的优势, 目前在流体力学的数值计算领域仍占支配地位。但有限差分法的规则网格不能满意地模拟几何形状复杂的问题, 而电工设备中的电磁场却往往正是以包含复杂的几何形状和不同材料的物理参数为特征, 因此有限差分法在电磁场分析中的应用逐渐被有限元法替代。

有限元法的出现, 是数值分析方法研究领域内的重大突破性进展。与其它数值方法相比较, 有限元法的突出优点是:

1) 有限元网格具有很大的灵活性, 可以根据一定的条件构造不同类型的单元, 在一个求解场域中可以使用同一类型单元, 也可将不同类型单元组合起来使用, 同一类型单元又可以具有不同的形状。因此, 有限元网格可以很方便地模拟不同形状的边界面和交界面。

2) 有限元法得出的离散化方程组具有稀疏对称的系数矩阵, 使方程组的求解得以简化, 计算机存储量和计算时间也相应地大大减少。

3) 边界条件的处理容易并入有限元数学模型, 便于编写通用的计算机程序。

后面我们将会看到, 以上优点与有限元法的基本思想——应用形状简单的单元集成形状复杂的场域、分片构造近似函数和单元上的插值基函数等等密切相关。这些特点使有限元法成为目前多学科领域中应用最广泛的一种数值计算方法。在电磁场分析方面, 有限元法也占据了主流地位。不过, 有限元法能够精细描述真实物理场结构的优点带来的问题是网格自动生成的任务繁重, 第7章将专门讨论这一问题。

1.2 电磁场控制方程的表述

本节将说明三维涡流场计算的特点。为了内容上的完整性, 先说明电磁场的基本方程, 然后介绍二维分析与三维分析在理论和计算方法上的不同。本书以下章节的讨论主要基于有限元法。

1.2.1 电磁场的基本方程

电磁场是一种特殊的物质形态, 麦克斯韦方程组描述了电磁场的宏观性质。作为复习, 下面列出静止媒质中麦克斯韦方程组的微分形式(式(1-1)~式(1-4))和积分形式(式(1-5)~式(1-8)):

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1-4)$$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} \quad (1-5)$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (1-6)$$

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_v \rho dv = q \quad (1-7)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (1-8)$$

其中,

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1-9)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1-10)$$

在电源以外区域

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1-11)$$

$\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{J}$ 、 ρ 、 q 、 ϵ 、 μ 、 σ 分别为磁场强度、磁感应强度 (或称磁通密度)、电位移、电场强度、电流密度、电荷密度、电荷量、介电常数、磁导率和电导率。在式 (1-5) 和式 (1-6) 中, l 为闭合曲线, S 为以 l 为边界的曲面; 在式 (1-7) 和式 (1-8) 中, S 为封闭曲面, V 为 S 所包围的体积。上述方程适用于一般的时变电磁场。需要指出的是, 在电磁性能关系式 (1-9) ~ 式 (1-11) 中, 材料的性质均设为各向同性, 因此 ϵ 、 μ 、 σ 均为标量。

电磁场理论有两个分支。一个是高频电磁场, 研究从无线电频率到光频的电磁波传播问题, 相应于这一分支的场方程就是上述的式 (1-1) ~ 式 (1-8)。另一分支是似稳电磁场。似稳电磁场研究频率较低、满足似稳条件的问题。在似稳场中, 场源随时间的变化足够慢, 使相应电磁波的波长大大地大于所研究区域的几何尺寸, 因而场点 (亦即观察点) 的场强几乎瞬时地跟随场源的变化而变化, 不像高频电磁场中场点场强的变化滞后于场源的变化。电工设备中的电磁场多属于似稳电磁场。对于似稳电磁场, 麦克斯韦方程式 (1-1) 和式 (1-5) 中的位移电流密度 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 与传导电流密度相比较可以忽略不计。换句话说, 在研究似稳电磁场问题时, 只考虑磁场变化所产生的电场 (由方程 (1-2)), 不考虑电场变化所产生的磁场。求解区域中含有导电材料的似稳电磁场又称为涡流场。涡流场分析的理论与方法正是本书所关注的课题。此外, 静电场、恒定电流场和静磁场可看作变化频率为零的似稳场, 都是一般时变电磁场的特例, 这些特例对应的方程可以很容易地

从式(1-1)~式(1-8)推出。在解决实际问题时,如果直接求解麦克斯韦方程组往往并不方便,通常需要引入不同的电磁位,建立以电位和(或)磁位为未知函数的偏微分方程,这将在后面详述。

1.2.2 三维涡流分析的特点

与二维分析相比较,三维涡流分析具有不同的特点,现在分述如下。

1. 控制方程的表述呈现多样性

求解电工设备中电磁场问题的目的,是在给定激励源和求解区域结构的条件下求出电磁场的空间分布和时间变化,为此需要计算一个有关的偏微分方程定解问题,这一定解问题的数学表述包括:

- 1) 在求解区域内成立的电磁场控制方程。
- 2) 在区域边界上恰当给定的边界条件。
- 3) 对于瞬态问题,还应包括区域内各点待求场量的初始值。

为了列出控制方程,首先应当确定方程中的待求未知函数。麦克斯韦方程组是电磁场性质的一般描述,但如果直接用这一方程组作为控制方程,由于第一和第二方程均为矢量方程(一个矢量方程包含三个标量方程),并且分别含有不同的场矢量从而需要联立求解,因此在数值计算中将会造成未知量过多,代数方程组过于庞大的状况。为了减少未知数的个数从而减少计算规模,通常可以引入辅助计算的函数——电位和(或)磁位作为控制方程中的未知函数。对于二维分析,应用位函数列出的方程形式比较简单,而三维计算时情况则要复杂得多。

首先考察二维情况。当所研究区域内的源电流方向是沿某一固定方向(一般取为直角坐标的 z 轴方向),且区域内的几何、物理参数沿该方向均无变化时,问题就可简化为平行平面场,此时选用矢量磁位作为未知函数计算磁场与涡流问题最为方便。由于磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的无散性,即

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

可以定义一个新的矢量函数 $\mathbf{A}$, 令