HZ BOOKS
华章教育

考研数学题库

（提高篇）

# 微积分习题集

严守权　编著

数学

机械工业出版社
China Machine Press

考研数学题库

# 微积分习题集

（提高篇）

严守权　编著

机械工业出版社
China Machine Press

**图书在版编目(CIP)数据**

微积分习题集(提高篇)/严守权编著.－北京:机械工业出版社,2002.4
(考研数学题库)
ISBN 7-111-10198-7

Ⅰ.微…　Ⅱ.严…　Ⅲ.微积分-研究生-入学考试-习题　Ⅳ.0172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 023542 号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037)
责任编辑:马海宽
北京忠信诚胶印厂印刷·新华书店北京发行所发行
2002 年 4 月第 1 版第 1 次印刷
787mm×1092mm　1/16·25.25 印张

定　价:37.00 元

# 出 版 前 言

由机械工业出版社华章教育会同北京大学数学学院等几所高校的名师策划、出版的考试数学系列丛书“考研题库”、“考研历年真题详解与考点分析”、“本科生题库”、“考研复习指导与典型例题分析”等共16本将陆续面世。这是为了帮助在校生和有志于攻读硕士学位的广大考生全面、系统地复习有关课程的内容，了解考研的最新信息而编写的一套题量较大、题型齐全、覆盖面广、难度及认知层次分布合理的系列丛书。本书的总体设计是在北京大学著名的命题专家指导下，根据教育部最新制定的“全国硕士研究生入学考试数学大纲”的有关要求，并结合作者多年来参加有关考试的命题、阅卷及辅导的经验而进行的。

**本套丛书作者阵容强大**

作者皆为北京大学、中国人民大学、北京理工大学、北方交通大学等多年从事数学基础教学以及参加过全国各地考研辅导的名师，具有丰富的教学经验，多次被评为各级优秀教师。他们所编写的教材、辅导书和讲授的课程在各校及历年参加研究生入学考试的考生中都有相当大的影响。

**本套丛书体系明晰、内容精练**

在“考研题库”中，包括《高等数学习题集(提高篇)》、《微积分习题集(提高篇)》、《线性代数习题集(提高篇)》、《概率论与数理统计习题集(提高篇)》四本。该系列题型丰富、数量充足、解析精辟，体现了作者们的专业素质，您不妨看看、练练。

在“考研历年真题详解与考点分析”中，也分为高等数学、微积分、线性代数、概率论与数理统计四本。该系列汇集考研的历年真题并有考点分析，使考生看后能紧密结合实战，安排复习详略。特色之处是没有按年代顺序，而是分门别类娓娓道来。

“复习指导与典型例题分析”同样分为四本。该系列注重基本概念、基本技能，是考试大纲的教材而非教学大纲的教材，为考生节省了时间。

“本科生题库”包括《高等数学习题集(基础篇)》、《微积分习题集(基础篇)》、《线性代数习题集(基础篇)》、《概率论与数理统计习题集(基础篇)》。该系列紧密结合教材，是本科生掌握基础知识、提高应用技巧的最佳工具书。

为了使学生通过一定数量题目的练习，便掌握解题方法与精髓，本书所选的题目打破过去习题集的形式，将题目分为填空题、多项选择题、解答题和证明题。

本系列丛书适合文、理科各个专业，特别是参加全国硕士研究生入学考试、自学考试及其他各类考试的需要，也适合各高等院校及成人高等专科教育各个专业教学辅导的需要。

我们相信，本系列丛书的出版，必将有助于广大在校生和有志于攻读硕士学位的考生开拓

思路,更好地理解和掌握有关的基本概念和基本的解题方法,培养逻辑推理能力及运用所学知识分析、解决实际问题的能力,并使得自己在这个过程中不断增强对考试的适应能力和通过考试的自信心,以便考出好成绩。

本系列丛书的出版要感谢为丛书提供资料的名师们,感谢他们付出的辛勤劳动。同时,欢迎广大师生就书中的问题提出不同见解。

**机械工业出版社华章教育**

2002年3月

# 目 录

# 第一章　函数、极限、连续

## 一、考研内容简介

函数的概念及表示法;函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性;反函数、复合函数、隐函数、分段函数;基本初等函数的性质及其图形;初等函数.

数列极限与函数极限的定义及其性质;函数的左极限和右极限;无穷小和无穷大的概念及关系,无穷小的性质及无穷小的比较;极限四则运算;极限存在的两个准则(单调有界准则和夹逼准则);两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

函数连续与间断的概念;初等函数的连续性;闭区间上连续函数的性质.

## 二、习　题

**(一) 填空题**

1. 已知 $f(\mathrm{e}^x-1)=x^2+1$,则 $f(x)$ 的定义域为________.

2. 已知 $f(x)=\sin x, f[\varphi(x)]=1-x^2$,则 $\varphi(x)=$ ________.其定义域为________.

3. 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}, f[\varphi(x)]=1-x$,且 $\varphi(x)\geqslant 0$,则 $\varphi(x)=$ ________,其定义域为________.

4. 已知 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{1+x^4}$,则 $f(x)=$ ________.

5. 设 $f(x^2+1)=x^4+5x^2+3$,则 $f(x^2-1)=$ ________.

6. 设 $f(x)=\frac{ax}{2x+3}$,且 $f(f(x))=x$,则 $a=$ ________.

7. 设 $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|), g(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x<0,\\ x^2 & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $f(g(x))=$ ________, $g(f(x))$

$=$ ________.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ 2x-1, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 1,\\ \ln(1+x), & x>1,\end{cases}$ 则 $f(g(x))=$ ________. $g(f(x))=$ ________. $f(x)\cdot g(x)=$ ________.

9. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,且 $f(x+2)=f(x)$.若当 $-1\leqslant x<1$ 时,$f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<1,\end{cases}$ 则当 $2\leqslant x<4$ 时,$f(x)=$ ________.

10. 设 $f(x)$ 满足等式 $f\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)=2f(x)+x$,则 $f(x)=$ ________.

11. 设 $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=af(x)+\dfrac{1}{x^2+1}(a^2\neq 1)$,则 $f(x)=$ ________.

12. 设 $f(x)$ 对一切正值 $x,y$,恒有 $f(xy)=f(x)+f(y)$,则 $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=$ ________, $f\left(\dfrac{y}{x}\right)=$ ________.

13. 函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 与函数 $y=g(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称,则 $g(x)=$ ________.

14. 设 $a>0$,常数,则 $\varphi(t)=\max\limits_{-\infty<x<+\infty}\left\{xt-\dfrac{1}{2}ax^2\right\}=$ ________.

15. 设函数 $f(x)=mx^2+(m-1)x+(m-1)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恒正,则 $m$ 取值范围为________.

16. 已知函数 $f(x)=\dfrac{3}{2}ax^2+(4-a)x$ 在区间 $(0,1]$ 上恒为正,则 $a$ 的取值范围为________.

17. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & 1<x\leqslant 3,\end{cases}$ 则其反函数的定义域为________.

18. 函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x+2)$ 的单调减区间为________.

19. 函数 $y=\sqrt{\dfrac{4x+3}{x-3}}$ 的值域为________.

20. 函数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\cos t|\,dt$ 的值域为________.

21. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sin x}{x^3}, & x<0,\\ (1+ax)^{\frac{1}{x}}-\dfrac{\ln(1+2x)}{e^{2x}-1}, & x>0,\end{cases}$ 在 $x\to 0$ 时极限存在,则 $a=$

________.

22. 已知 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^k}=c\neq 0$，则 $k=$________，$c=$________. 又知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^k}=c\neq 0$，则 $k=$________，$c=$________.

23. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n+\dfrac{1\,054}{n}\right)^{1\,054}}{n^m-(n-1)^m}=c\neq 0$，则 $m=$________，$c=$________.

24. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \tan x\arctan t^2\,\mathrm{d}t}{x^k}=c\neq 0$，则 $k=$________，$c=$________.

25. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^\alpha}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t=c\neq 0$，则 $\alpha=$________，$c=$________.

26. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_b^{1-\frac{1}{x}}\arctan t\,\mathrm{d}t}{ax+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=c\neq 0$，则 $a=$________，$b=$________，$c=$________.

27. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}[(x^5+7x^4-12)^\alpha-x]=c\neq 0$，则 $\alpha=$________，$c=$________.

28. 设 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 为等价无穷小，则 $a=$________.

29. 设极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to\infty}3xf(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(4f(x)+5)$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}xf(x)=$________.

30. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{\ln(1+x)}=100$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________.

31. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x^2)+x^2f(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+f(x)}{x}=$________.

32. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+6}{x^2}=$________.

33. 当 $x\to+\infty$ 时，若 $f(x)=\dfrac{px^2-2}{x+1}-3qx+5$ 为无穷大量，则 $p,q$ 满足条件________；若 $f(x)$ 为无穷小量，则 $p,q$ 满足条件________.

34. 设常数 $\alpha>0,\beta>0$，则当 $x\to+\infty$ 时，无穷小量 $\dfrac{1}{x^\alpha},\dfrac{1}{\ln^\beta x},\mathrm{e}^{-x}$，从左到右，从低阶到高阶的顺序依次排列为________.

35. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x^3}+\dfrac{a}{x^2}+b\right)=1$，则 $a=$________，$b=$________.

36. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{b}{x^5}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)=c\neq 0$，则 $a=$________，$b=$________，$c=$

________.

37. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{ax}=\int_{-\infty}^{a}te^{t}dt$,则常数 $a=$ ________.

38. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^{x}=\int_{a}^{+\infty}4x^{2}e^{-2x}dx$,则常数 $a=$ ________.

39. 设曲线 $y=f(x)=x^{n}$ 在点(1,1)处的切线与 $x$ 轴的交点为 $(\xi_n,0)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$ ________.

40. 设 $f(t)=e^{t}$,且 $\int_{0}^{x}f(t)dt=xf(ux)$,则 $\lim\limits_{x\to 0}u=$ ________.

41. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$,则 $c=$ ________.

42. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{0}^{1}\dfrac{x^{n}}{1+x}dx=$ ________.

43. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{n}^{n+p}\dfrac{\sin x}{x}dx=$ ________, $p>0$.

44. 设 $f(x)=e^{\sin(2x-3)\pi}$,则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2x)-f(x+1)}{x-1}=$ ________.

45. 设 $f(x)$ 可导恒正,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{a}\right)}{f(a)}\right]^{n}=$ ________.

46. 已知 $f(0)=1, f'(0)=2$,则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

47. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x^{2}+1)\cdots(x^{n}+1)}{[(nx)^{n}+1]^{\frac{n+1}{2}}}=$ ________.

48. $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{xt+1}{xt+2}\right)^{t}=$ ________.

49. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n}}{1+x^{n}}=$ ________.

50. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^{2}+5}{5x+3}\cdot\sin\dfrac{2x^{2}-1}{x^{3}}=$ ________.

51. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x^{2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ________.

52. 已知 $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1-2x^{2}}{1+x^{2}}\right)^{\cot^{2}x}, & 0<|x|<\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ 2x-a, & \text{其他}\end{cases}$ 在 $x=0$ 连续,则 $a=$ ________.

53. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x \sin t^3 \mathrm{d}t}{x^k}, & x\neq 0, a\neq 0 \\ a, & x=0,\end{cases}$ 为连续函数，则 $k$ 与 $a$ 满足条件为________.

54. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $x\neq 0$ 时，$f(x)=(\cos x)^{x^{-2}}$，则 $f(0)=$________.

55. 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & x<0, \\ a, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}b, & x<0, \\ x+3, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 且 $f(x)+g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$________，$b=$________.

56. 设函数 $g(x)$ 在点 $x=0$ 可导，$g(0)=1$，则若函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0, \\ a, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，$a$ 应取值________.

57. 设函数 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，$g(0)=0$，$g'(0)=b$，且

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)+a\tan x}{x}, & x\neq 0, \\ A, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 连续，则常数 $A=$________.

58. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}}$ 的连续区间为________.

59. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{xt-2}{xt-1}\right)^t$ 有间断点________，曲线 $y=f(x)$ 有渐近线________.

60. 要使方程 $3x^2+(m-5)x+m^2-m-2=0$ 的两个实根分别满足条件 $0<x_1<1$，$1<x_2<2$，则常数 $m$ 的取值范围是________.

61. 已知方程 $x^3+(2m-3)x+m^2-m=0$ 有三个相异实根，分别介于 $(-\infty,0)$，$(0,1)$，$(1,+\infty)$ 内，则常数 $m$ 满足的条件是________.

**(二) 选择题**

1. 下列函数对中，两函数相等的是(　　).

A. $y=x$ 与 $y=\sin(\arcsin x)$；

B. $y=\arctan x^2$ 与 $y=\arctan\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$；

C. $y=\int_0^{x^2}\dfrac{\sin t}{2t}\mathrm{d}t$ 与 $y=\int_0^x\dfrac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t$；

D. $y=x+\sqrt{1+x^2}$ 与 $g(x)$，其中 $g(x)$ 由等式 $g\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$ 确定.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=(\quad)$.

A. 0;　　B. 1;

C. $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & x>1;\end{cases}$　　D. $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ 2x, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -2x, & x<0,\end{cases}$ 则 $x\leqslant 0$ 时, $f[g(x)]=(\quad)$.

A. $2x$;　　B. $x^2$;　　C. $4x^2$;　　D. $-4x^2$.

4. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为偶函数, 且 $F(x)=\int_0^x(x-2t)f(-t)\mathrm{d}t$, 则 $F(x)$ 是(　　).

A. 偶函数;　　B. 奇函数且为偶函数;

C. 奇函数;　　D. 非奇函数也非偶函数.

5. 设 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导, 关于 $y$ 轴对称, 且当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$, $f''(x)>0$, 则 $x<0$ 时, 有(　　).

A. $f'(x)>0, f''(x)>0$;　　B. $f'(x)>0, f''(x)<0$;

C. $f'(x)<0, f''(x)>0$;　　D. $f'(x)<0, f''(x)<0$.

6. 设 $y=f(x)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上连续可导, 且 $f(x)=-f(-x)$, 于是有(　　).

A. 若 $f'(x_0)=a$, 则 $f'(-x_0)=-a$;

B. 若 $f(x_0)$ 为极大值, 则 $f(-x_0)$ 也为极大值;

C. 若 $(x_0,f(x_0))$ 为拐点, 则 $(-x_0,f(-x_0))$ 也为拐点;

D. $\int_{-a}^{a}f(x^2)\mathrm{d}x^2\neq 0$.

7. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增, 可导, 则(　　)也在 $(-\infty,+\infty)$ 单调增.

A. $f(g(-x))$;　　B. $f(x)g(x)$;　　C. $f^3(x)$;　　D. $\dfrac{1}{f(-x)}$.

8. 设 $f(x)=x\tan x\cdot \mathrm{e}^{\sin x}$, 则 $f(x)$ 是(　　).

A. 偶函数;　　B. 无界函数;　　C. 周期函数;　　D. 单调函数.

9. 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x-x, & -\pi\leqslant x<0,\\ \cos x+x, & 0\leqslant x\leqslant \pi,\end{cases}$ 在定义域内 $f(x)$ 为(　　).

A. 无界函数;　　B. 偶函数;　　C. 单调函数;　　D. 周期函数.

10. 设 $f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$, 则 $f(x)$ 是(　　).

A. 周期函数;　　B. 单调函数;

C. 非偶非奇函数;　　D. 有界函数.

11. 已知函数 $y = f(x)$ 在$[a,b]$上存在反函数 $x = \varphi(y)$，则(　　).

A. $y = f(x)$ 在$[a,b]$上单调；

B. $y = f(x)$ 与 $x = \varphi(y)$ 关于直线 $y = x$ 对称；

C. $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处和 $x = \varphi(y)$ 在 $y = f(x_0)$ 处有相同的可导性；

D. 对给定 $y_0 \in Z_f$，方程 $f(x) = y_0$ 有惟一解.

12. 满足关系 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f^{-1}(x)}$ 的函数 $f(x)$ 为(　　).

A. $-x+1$；　B. $x^3$；　C. $-\frac{1}{x}+1$；　D. $\frac{2x+1}{x-1}$.

13. 设 $y = f(x)$ 与 $y = \varphi(x)$ 互为反函数，且均在$(-\infty, +\infty)$上存在二阶导数，若 $f'(x) > 0, f''(x) < 0$，则有(　　).

A. $g'(x) > 0, g''(x) < 0$；　B. $g'(x) > 0, g''(x) > 0$；

C. $g'(x) < 0, g''(x) > 0$；　D. $g'(x) < 0, g''(x) < 0$.

14. 设 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 互为反函数，$f(x) = -f(-x)$，且均在$(-\infty, +\infty)$上存在二阶导数，于是(　　).

A. 若 $x > 0, f''(x) > 0$，则 $x < 0$ 时，$f''(x) < 0$；

B. 若 $x > 0, f''(x) > 0$，则 $x < 0$ 时，$f''(x) > 0$；

C. 若 $f''(x) > 0$，则 $g''(x) > 0$；

D. 若 $f''(x) > 0$，则 $g''(x) < 0$.

15. 设 $\delta > 0$，函数 $f(x)$ 在$(a-\delta, a)$和$(a, a+\delta)$内有定义，如果下列条件(　　)成立，则极限 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 存在.

A. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = A(\neq \infty)$，$x$ 为有理数；

B. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$，$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ 均存在，且 $f(x)$ 在 $x = a$ 有定义；

C. $f(x)$ 在$(a-\delta, a)$，$(a, a+\delta)$上可导；

D. $A$ 为某个常数，$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(a+x) - A}{\sqrt[3]{x}}$ 存在.

16. 设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 可导，$\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x_0+t) + f(x_0+3t)}{t} =$ (　　).

A. $f'(x_0)$；　B. $-2f'(x_0)$；　C. $\infty$；　D. 不能确定.

17. 若对任意实数范围总有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x \to \infty}(g(x) - \varphi(x)) = 0$，则 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) =$ (　　).

A. 存在且为零；　B. 存在但不一定为零；

C. 一定不存在；　D. 不一定存在.

18. 已知当 $x \to \infty$ 时，$f(x) + g(x)$ 收敛，则在 $x \to \infty$ 时，也必有(　　).

A. $f(x),g(x)$ 同时收敛;
B. $f(x),g(x)$ 同时发散;
C. $f(x),g(x)$ 不一定同时收敛或发散;
D. 若 $f(x)$ 发散, $g(x)$ 也必发散.

19. 设数列 $x_n, y_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$,则有(    ).
A. 若 $x_n$ 发散,则 $y_n$ 必收敛;
B. 若 $x_n$ 无界,则 $y_n$ 必有界;
C. 若 $x_n$ 无界,则 $y_n$ 必为无穷小量;
D. 若$\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小量,则 $y_n$ 也必为无穷小量.

20. 下列结论中正确的是(    ).
A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = A$,则必有 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$;
B. 任意两个无穷小均可比较大小;
C. 若 $\alpha$ 为无穷小量,则$\dfrac{1}{\alpha}$ 必为无穷大量;
D. 有界变量乘无穷大量未必为无穷大量.

21. 设 $f(x) = \int_0^{1-\cos x} \sin t^2 \mathrm{d}t, g(x) = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^6}{6}$,则 $x \to 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的(    )无穷小.
A. 低阶; B. 高阶; C. 等价; D. 同阶但非等价.

22. 设 $f(x),\varphi(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域连续,且当 $x \to 0$ 时, $f(x)$ 是比 $\varphi(x)$ 高阶的无穷小,则当 $x \to 0$ 时, $\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$ 是$\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t$ 的(    )无穷小.
A. 低阶; B. 高阶; C. 等价; D. 同阶但不等价.

23. $x \to 0$ 时, $(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶无穷小,且 $x\sin x^n$ 是比 $\mathrm{e}^{x^2}-1$ 高阶的无穷小,则正整数 $n$ 等于(    ).
A. 1; B. 2; C. 3; D. 4.

24. 已知 $x \to 1$ 时, $(2x)^x - 2 \sim a(x-1) + b(x-1)^2$,则(    ).
A. $a = 2\ln 2 + 2, b = 1$; B. $a = 0, b = \ln 2 + 1$;
C. $a = 2\ln 2 + 2, b$ 为任意实数; D. $a = 0, b$ 为任意实数.

25. 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 + \arctan x^k)^{\frac{1}{\mathrm{e}^{(\tan x)^n}-1}} = 1$,且 $k, n$ 为正整数,则有(    ).
A. $k > n$; B. $k = n$; C. $k < n$; D. $k, n$ 为任意正整数.

26. 设 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a\tan x + b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x) + d[(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - 1]} = 2, a^2 + c^2 \neq 0$,则有(    ).

A. $a+4c-2d=0$, $b$ 为任意实数;

B. $a+4c=0$, $b,d$ 为任意实数;

C. $b-2d=0$, $a,c$ 为任意实数;

D. $2a+b+8c-d=0$.

27. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\sin x+b(1-\cos x)}{c\ln(1+x)^{-2}+d(1-e^{-x^2})}=2$, $a^2+c^2\neq 0$, 则有(　　).

A. $a+4c-2d=0$, $b$ 为任意实数;

B. $a+4c=0$, $b,d$ 为任意实数;

C. $b-2d=0$, $a,c$ 为任意实数;

D. $a=0$, $b-2c+d=0$.

28. 当 $x\to 0$ 时, $e^{\tan x}-e^{x}$ 与 $x^n$ 是同阶无穷小, 则 $n=$(　　).

A. 1;　　B. 2;　　C. 3;　　D. 4.

29. 设 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, 则常数 $a,b$ 满足(　　).

A. $a<0,b<0$;　　B. $a>0,b>0$;

C. $a\leqslant 0,b>0$;　　D. $a\geqslant 0,b<0$.

30. 若 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x+\sin\frac{1}{x}}{\ln x+f(x)}=1$, 则 $f(x)=$(　　).

A. $\ln x$;　　B. $e^{\frac{1}{x}}$;　　C. $\tan x$;　　D. $\dfrac{1}{x}$.

31. 若 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}=-\dfrac{1}{16}$, 则 $f(x)=$(　　).

A. $x+1$;　　B. $x+5$;　　C. $\sqrt{x+13}$;　　D. $\sqrt{x+6}$.

32. 设数列通项为 $x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{1}{n}, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 则当 $n\to\infty$ 时, $x_n$ 是(　　).

A. 无穷大;　　B. 无穷小;　　C. 有界变量;　　D. 无界变量.

33. 设 $F(x)=\dfrac{x^2}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 其中 $f(x)$ 为连续函数, 则 $\lim\limits_{x\to a}F(x)=$(　　).

A. $a^2$;　　B. $a^2f(a)$;　　C. 0;　　D. 不存在.

34. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\right)^n=$(　　).

A. 0;　　B. $e^2$;　　C. $e^{-1}$;　　D. $e^{-2}$.

35. 极限(　　) = 0.

A. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x^2}}$;　　B. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x^2}}$;

C. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x^3}}$;　　D. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x^3}}$.

36. 下列函数在其定义域内不连续的是(　　).

A. $f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0,\\ x-1, & x<0;\end{cases}$　　B. $f(x)=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$;

C. $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ x^2-1, & x\geqslant 0;\end{cases}$　　D. $f(x)=x+x^2+x^3+\cdots$, $|x|<1$.

37. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时},\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 则在 $x=0$ 处间断的函数是(　　).

A. $\max\{f(x),g(x)\}$;　　B. $\min\{f(x),g(x)\}$;

C. $f(x)-g(x)$;　　D. $f(x)g(x)$.

38. 设 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某邻域内定义,且 $x_0$ 为其间断点,则在 $x_0$ 处必间断的函数是(　　).

A. $f(x)\sin x$;　B. $f(x)+\sin x$;　C. $f^2(x)$;　D. $|f(x)|$.

39. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续,$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处间断,又 $f(a)\neq 0$,则(　　).

A. $\varphi[f(x)]$ 在 $x=a$ 间断;　　B. $f[\varphi(x)]$ 在 $x=a$ 间断;

C. $\varphi^2[f(x)]$ 在 $x=a$ 间断;　　D. $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在 $x=a$ 间断.

40. "$f(x)$ 在点 $x=a$ 处连续"是函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处连续的(　　)条件.

A. 必要但非充分;　　B. 充分而非必要;

C. 充分且必要;　　D. 即非充分又非必要.

41. 函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x-1}}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处(　　).

A. 右连续;　　B. 左、右皆不连续;

C. 左连续;　　D. 连续.

42. 设 $f(x)$ 是奇函数,且 $f'(0)$ 存在,则 $x=0$ 为函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 的(　　)间断点.

A. 无穷;　B. 可去;　C. 跳跃;　D. 无法确定类型.

43. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ 1-x, & x>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 2,\\ 2(x-1), & 2<x\leqslant 5,\\ x+3, & 5<x,\end{cases}$ 则函数 $f(g(x))$ 在

$(-\infty, +\infty)$ 上有(　　)个间断点.

A. 0;　　B. 1;　　C. 2;　　D. 3.

44. 曲线 $y = e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)(x-1)}$ 有(　　)条渐近线.

A. 1;　　B. 2;　　C. 3;　　D. 4.

45. 曲线 $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x-4}\ln\dfrac{5-x}{3+x}$ 有(　　)条渐近线.

A. 1;　　B. 2;　　C. 3;　　D. 4.

46. 曲线 $y = \dfrac{xe^x}{e^x-1}$ 有(　　)条渐近线.

A. 1;　　B. 2;　　C. 3;　　D. 4.

47. 设 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x<0, \\ x+1, & x\geqslant 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x^2, & x<1, \\ 2x-1, & x\geqslant 1, \end{cases}$ 则下列函数中,(　　)在 $(-\infty, +\infty)$ 上不连续.

A. $f(x)\cdot g(x)$;　　B. $f(x)+g(x)$;

C. $f(g(x))$;　　D. $g(f(x))$.

**(三) 解答题**

1. 求函数 $y = \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ 在 $|x|\geqslant 1$ 时的反函数.

2. 求函数 $y = \sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 的反函数.

3. 已知 $f_1(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$, 对于 $n = 1,2,\cdots$, 定义 $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$; 若 $f_{35}(x) = f_5(x)$, 求 $f_{28}(x)$.

4. 已知函数 $f(x) = f(x+4)$, $f(0) = 0$, 且在 $(-2,2)$ 上有 $f'(x) = |x|$, 求 $f(9)$.

5. 已知 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数, 在 $[0,2)$ 内, $f(x) = x^2$, 求 $f(x)$ 在 $[0,6)$ 内的表达式.

6. 求下列函数的值域:

(1) $y = (x-2)(x-4)(x-6)(x-8)+17$;

(2) $y = \dfrac{5}{2x^2-4x+3}$;

(3) $y = \dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{2}{x-3}$;

(4) $y = \dfrac{\sin x - 2}{\sin x + 3}$.

计算下列极限(7 ~ 13):

7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x-1}+x-1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.