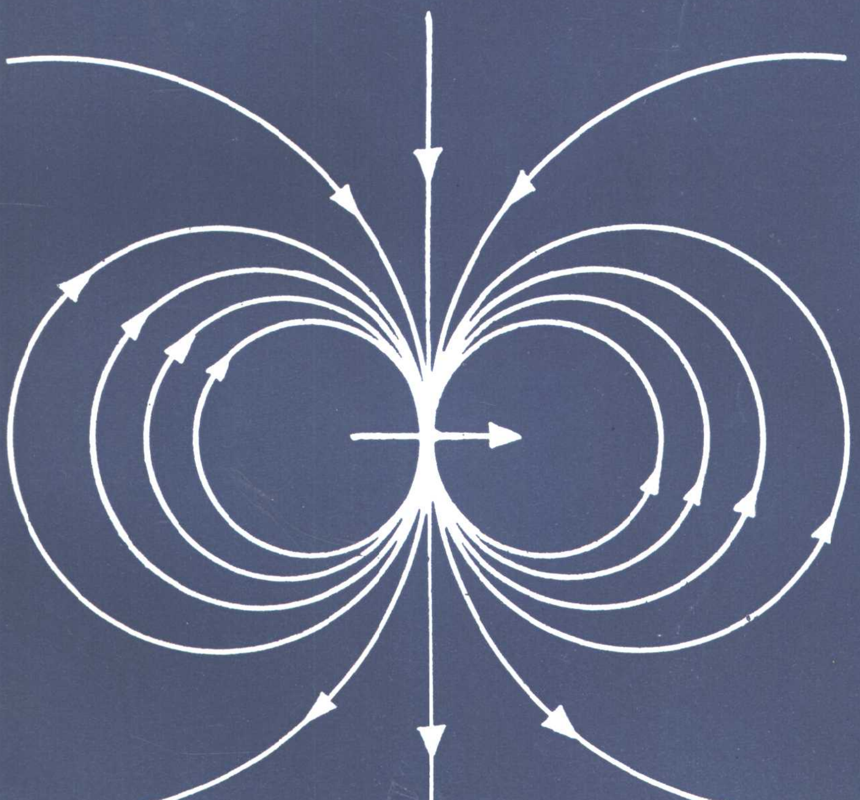
流体力学习题解

余志豪 蒋全荣



气象出版社

流体力学习题解

余志豪　蒋全荣　编著

气象出版社

内 容 简 介

本习题解从国内外有关流体力学书籍中，遴选汇编了三百个有代表意义的习题。它与余志豪、王彦昌所编著的《流体力学》(气象出版社 1982 年版)在内容上是互为配套的，也分为十一章不同的题目。书中每一个习题都有较为详细的解题过程，有利于流体力学教学和自学之用。

本习题解可供气象学各专业以及邻近学科的广大业务、科研和教学人员参考，尤其可作为高等院校有关大气科学专业流体力学习题课的参考教材，也可作为自学读者的辅助参考读物。

流体力学习题解

余志豪
蒋全荣 编著

责任编辑：陆 勇

气象出版社出版

（北京西郊白石桥路46号）

商务印书馆上海印刷厂常熟分厂排版

北京市宏飞印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 全国各地新华书店经售

开本：850×1168 1/32 印张：11.5 字数：295 千字

1988 年 6 月第一版 1988 年 6 月第一次印刷

印数：1—3,500 定价：2.30 元

ISBN 7-5029-0084-5

O·0003(课)

编写说明

本习题解是为了配合余志豪、王彦昌所编著的《流体力学》(气象出版社 1982 年版)一书的使用而编写的。

在高等院校的气象学系科中，流体力学是一门重要的基础课，因而要求能在基本概念、基本方程和基础理论方面给予较多的介绍。在施教过程中，就亟待有一套适合的习题，来训练学生分析问题和解决问题的能力，深化巩固所学基本概念及基础理论。在以往二十多年的教学工作中，我们已经积累了一套与课程相配合的习题。但是，随着各门学科及流体力学理论自身的发展，加上《流体力学》一书的问世，原有的习题显然亦应随之更新。所以，本习题集的三百个习题中，约有三分之二的内容是新近遴选汇编的。习题中除少数为作者改编外绝大多数取自国内外的有关流体力学书籍(详见参考书目)。其中部分习题已在南京大学气象学系的流体力学课程中使用了两次，收到了良好的效果。本习题集将是为学习《流体力学》的读者提供的一本有益的辅助读物。

对于一本好的习题集而言，其选题是否得当和解题是否明确等方面的要求是较高的，限于编者的学识水平及解题能力，书中谬误和欠妥之处在所难免，恳请读者指正。

本习题集编写过程中，得到了气象系流体力学教学小组同志们以及系、室领导的支持、鼓励和帮助，石宗祥同志绘制了插图，在此一并致谢。

编　者

一九八五年元旦于南京大学

目　　录

第一章 基础概念

1.1 何谓流点和空间点?并说明把流体作为连续介质处理的必要与可能。

解 空间点是固定不动的，表示空间中一个点的几何位置，因而它是个几何点。而流点是从作为连续介质流体中取出的既大(包含着大量的分子)又小(与运动范围相比)的流体微团，由于它的体积极小，我们可以把它作为一个几何点来处理，但它是可以不断运动着的，并具有一定的物理量，因此流点是个物理点。某一空间点，在某一瞬间为某一流点所占据，而在另一瞬间又为另一流点所占据，即在连续的时间过程中，同一空间点先后由不同的流点所占据和经过。

由于采用了连续介质的假说，流体质点是连续分布的，相应地其各种物理量也是连续分布的，从而构成了各种物理量场，故把流体作为连续介质处理的必要性就在于在不失问题本质的情况下，能用数学分析的工具来较简便地描述和解决流体力学问题。而其可能性就在于在实际流体中，这种“既大又小”的流点是确实可选定的。

1.2 试回答：(1) 欧拉法和拉格朗日方法中变量 x, y, z 的差异。(2)用欧拉观点写出下列情况密度的数学表达式：(a)均质流体，(b)无辐散流体，(c)定常运动。

解 (1) 在欧拉法中：

$$\vec{V}=\vec{V}(x, y, z, t)$$

x, y, z 与时间 t 是互为独立的自变量，即前者为空间点坐标，而在拉格朗日法中

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

显然，x, y, z 则是时间 t 的函数，它表示流点位置在 t 时间的坐标。

(2) 在欧拉观点中：

(a) 对于均质流体，各点的密度都相同，即

$$\rho(x, y, z) = \text{常数} \qquad \text{(答)}$$

(b) 若流体是无辐散的，那末对空间任一点来说，其流体通量应为零，即

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} = 0 \qquad \text{(答)}$$

(3) 在定常运动中，任何流体物理量都不随时间发生变化，故有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \text{(答)}$$

1.3 已知速度场：

(1) $\begin{cases} u = -\omega y \\ v = \omega x \end{cases}$ (ω 为常数)

(2) $\begin{cases} u = mt \\ v = nt \end{cases}$ (m, n 为常数)

求加速度并说明之。

解 因为加速度是指某一流体质点在单位时间内的速度变化，故有

(1) $$\begin{cases} a_x = \dfrac{du}{dt} = v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\omega^2 x \\ a_y = \dfrac{dv}{dt} = u\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\omega^2 y \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

即当流点作等速圆周运动时，它具有向心加速度 $\sqrt{x^2+y^2}\,\omega^2$，而切向加速度为零。

我们可看到，尽管该流场为一定常流场，所有各个空间位置的流体速度和流向不随时间变化，但并不意味着这时流体就没有加速度，流场的非均匀性可以产生加速度。

(2)
$$\begin{cases} a_x = \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial v}{\partial t} = m \\ a_y = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = n \end{cases}$$
(答)

即当流点运动时，速度的方向虽然不变，但速率却不断变化，其加速度的大小等于$\sqrt{m^2+n^2}$。

我们又可看到，尽管该流场是均匀的，在同一时刻，所有各个空间位置的流体速度是相同的，但也不意味着这时流体就没有加速度，流场的非定常性也可以产生加速度。

总之，我们可得到以下的一个重要结论：流体质点的加速度可以划分为由于流场的非均匀性所引起的平流加速度(或称变位加速度)和由于流场的非定常性所引起的局部加速度两部分。

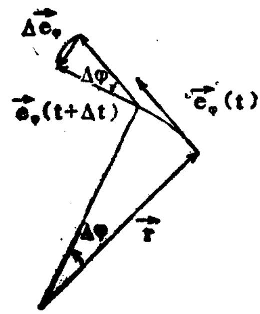


图 1.1

1.4 (图 1.1)一质点沿着曲线
$$\vec{r} = r\cos\varphi\vec{i} + r\sin\varphi\vec{j}$$
运动，其中 r, φ 都是时间 t 的函数，试求：

(1) 速度$\vec{V}$在矢径方向及其垂直方向的分量V_r和V_φ。

(2) 加速度在同样方向上的分量。

解 由附录题 2 知，任一矢量的导数$\dfrac{d\vec{A}}{dt}$可分解为两个矢量，其中一个分矢量平行于$\vec{A}$，另一个分矢量与$\vec{A}$垂直。

(1) $$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d|\vec{r}|}{dt}\vec{e}_r + |\vec{r}|\cdot k\vec{e}_\varphi = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$$

故
$$V_r = \frac{dr}{dt} \qquad V_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt}$$
(答)

(2) $$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d^2r}{dt^2}\vec{e}_r+\frac{dr}{dt}\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

$$+\frac{d}{dt}\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)\vec{e}_\varphi+r\frac{d\varphi}{dt}\times\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$$

$$=\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\vec{e}_r$$

$$+\left(2\frac{dr}{dt}\times\frac{d\varphi}{dt}+r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)\vec{e}_\varphi$$

故 $$\begin{cases}a_r=\dfrac{d^2r}{dt^2}-r\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2\\ a_\varphi=2\dfrac{dr}{dt}\times\dfrac{d\varphi}{dt}+r\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}\end{cases}$$ （答）

1.5 设某日北京气温为10度，南京与它相距约1000公里，气温为15度，而北京向南京的气流速度为12米/秒。若在流动过程中空气温度不变，试问南京当天的气温下降几度？又若空气向南流动过程中，由于气团的变性，温度升高2.5度/天，则南京的温度变化又如何？

解 已知 $\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)T$

若流动过程中空气温度保持不变，即 $\frac{dT}{dt}=0$，则

$$\frac{\partial T}{\partial t}=-(\vec{V}\cdot\nabla)T$$

$$=-12\times\frac{10^{-3}}{\frac{1}{24\times60\times60}}\cdot\frac{15-10}{1000}\simeq-5.2(\text{度/天})\quad(\text{答})$$

南京的气温下降5.2度/天。

又若由于气团的变性，空气温度升高2.5度/天，即

$$\frac{dT}{dt}=2.5\ \text{度/天},$$

那末

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{dT}{dt}-(\vec{V}\cdot\nabla)T=2.5-5.2=-2.7(\text{度/天})\quad(\text{答})$$

南京气温下降 2.7 度/天。

1.6 若已知温度场 $T=At^2/(x^2+y^2+z^2)$，现有一流体质点以 $u=xt$，$v=yt$，$w=zt$ 运动。试求该流体质点的温度随时间的变化。设该流点在 $t=0$ 时的位置为 $x=a$，$y=b$，$z=c$，式中 A 为常数。

解 **方法一**

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)T$$

$$=\frac{2At}{x^2+y^2+z^2}-\frac{2At^3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$=\frac{2At(1-t^2)}{x^2+y^2+z^2}$$

由于 $\frac{dx}{dt}=u=xt$，求积分且根据初始位置确定积分常数后，得

$$x=ae^{\frac{1}{2}t^2}$$

同理有

$$y=be^{\frac{1}{2}t^2}$$

$$z=ce^{\frac{1}{2}t^2}$$

将它们代入 $\frac{dT}{dt}$ 的表达式中，则

$$\frac{dT}{dt}=\frac{2At(1-t^2)}{(a^2+b^2+c^2)e^{t^2}} \qquad \text{(答)}$$

方法二 以拉格朗日变量来表示温度场 T，有

$$T=\frac{At^2}{(a^2+b^2+c^2)e^{t^2}}$$

该流点的温度变化为

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{2At(1-t^2)}{(a^2+b^2+c^2)e^{t^2}} \qquad \text{(答)}$$

1.7 半径为 R 的圆柱体以匀速 U 在流体中作直线运动，圆柱体与水平面相垂直。已知流体相对于运动圆柱体的速度分布为：

$$\begin{cases} (V_r)_r = U\cos\theta\left(1-\dfrac{R^2}{r^2}\right) \\ (V_r)_\theta = -U\sin\theta\left(1+\dfrac{R^2}{r^2}\right) \end{cases}$$

试计算：(1) $(a) r=R,\ \theta=0$；$(b) r=R,\ \theta=\dfrac{\pi}{2}$；$(c) r=R,\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$三点上流体相对于地面的运动速度。(2) 上述三点处流点的加速度。

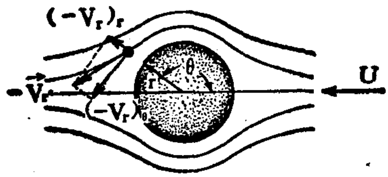


图 1.2a

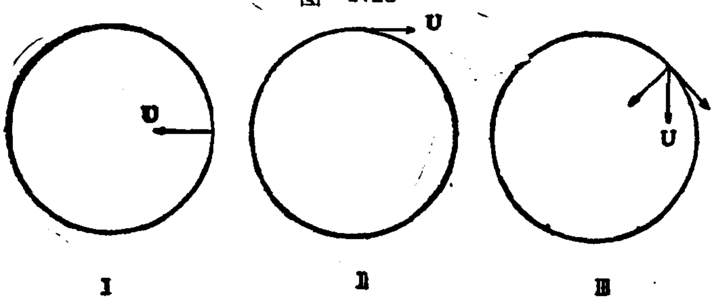


图 1.2b

解 (1)据题意，流体相对于圆柱体的运动是一两维流动，且与 z 无关。换句话说，在圆柱体的不同横截面上(即不同的高度平面上)，流体的速度分布是完全相同的(如图 1.2a)，又已知圆柱体相对于地面的速度为 $\vec{U}$。由普通物理知，流体相对于地面的速度 $\vec{V}$ 应等于流体相对于运动圆柱体的速度 $\vec{V}_r$ 与圆柱体相对于地面的速度 $\vec{U}$ 之和，即

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{U}$$

或写成分量形式

$$\begin{cases} V_r = U\cos\theta\left(1-\dfrac{R^2}{r^2}\right) - U\cos\theta = -U\cos\theta\dfrac{R^2}{r^2} \\ V_\theta = -U\sin\theta\left(1+\dfrac{R^2}{r^2}\right) + U\sin\theta = -U\sin\theta\dfrac{R^2}{r^2} \end{cases}$$

根据上式则不难求得：

(a) 当 $\begin{matrix} r=R \\ \theta=0 \end{matrix}$ 时 $\begin{cases} v_r = -U \\ v_\theta = 0 \end{cases}$ （如图 1.2bI） （答）

(b) 当 $\begin{matrix} r=R \\ \theta=\dfrac{\pi}{2} \end{matrix}$ 时 $\begin{cases} v_r = 0 \\ v_\theta = -U \end{cases}$ （如图 1.2bII） （答）

(c) 当 $\begin{matrix} r=R \\ \theta=\dfrac{\pi}{4} \end{matrix}$ 时 $\begin{cases} v_r = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}U \\ v_\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}U \end{cases}$

或 $|\vec{V}| = U$ （如图 1.2bIII） （答）

(2) 因 $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{U}$，又 U 为常数。故据力学的相对性原理，在不同的惯性系统中，同一流点的加速度应是相同的，即当牵连速度 $\vec{U}$ 为常矢量时，相对加速度与绝对加速度相等

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{V}_r + \vec{U}) = \frac{d\vec{V}_r}{dt} = \vec{a}_r$$

在本题中，$\vec{a}_r$ 在柱坐标中可写成

$$\begin{cases} (a_r)_r = (V_r)_r\dfrac{\partial (V_r)_r}{\partial r} + \dfrac{(V_r)_\theta}{r}\dfrac{\partial (V_r)_r}{\partial \theta} - \dfrac{(V_r)_\theta^2}{r} \\ (a_r)_\theta = (V_r)_r\dfrac{\partial (V_r)_\theta}{\partial r} + \dfrac{(V_r)_\theta}{r}\dfrac{\partial (V_r)_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{(V_r)_r(V_r)_\theta}{r} \end{cases}$$

将流体相对于运动圆柱体的速度分布代入上式，则可算得

(a) $\begin{cases} (a_r)_r = 0 \\ (a_r)_\theta = 0 \end{cases}$ 或 $|\vec{a}_r| = 0$ （答）

(b) $\begin{cases} (a_r)_r = -\dfrac{4U^2}{R} \\ (a_r)_\theta = 0 \end{cases}$ 或 $|\vec{a}_r| = \dfrac{4U^2}{R}$， （答）

(c) $\begin{cases}(a_r)_r = -\dfrac{2U^2}{R} \\ (a_r)_\theta = \dfrac{2U^2}{R}\end{cases}$ 或 $|\vec{a}_r| = \dfrac{2\sqrt{2}\,U^2}{R}$ （答）

1.8 流体运动由拉格朗日变数表达为$\begin{cases}x = ae^t \\ y = be^{-t} \\ z = c\end{cases}$；

(1) 证明当 $t=0$ 时，质点的初始位置为(a, b, c)。

(2) 当 $t=1$ 秒时，位于$(e, 1/e, 1)$及$(1, 1, 1)$的流体质点，其初始位置位于何处？

(3) 初始位置为$(0, 0, 0)$及$(1, 1, 1)$的流体质点，其以后各时刻将以怎样的速度和加速度运动？

(4) 求出轨迹曲线，并绘图表之。

(5) 求出欧拉变数，并绘流线图形。

解 (1) 当 $t=0$ 时 $x=ae^0=a$ $y=be^0=b$ $z=c$ （证毕）

(2) 据题意

$$\begin{cases}e = ae^1 \\ \dfrac{1}{e} = be^{-1} \\ 1 = c\end{cases} \quad 即有 \quad \begin{cases}a=1 \\ b=1 \\ c=1\end{cases}$$

故 $t=1$ 时，位于$\left(e, \dfrac{1}{e}, 1\right)$的流体质点，其初始位置在 $(1, 1, 1)$处。

又

$$\begin{cases}1 = ae^1 \\ 1 = be^{-1} \\ 1 = c\end{cases} \quad 则 \quad \begin{cases}a = \dfrac{1}{e} \\ b = e \\ c = 1\end{cases} \qquad （答）$$

所以，$t=1$ 时，位于$(1, 1, 1)$的流体质点，其初始位置则在$\left(\dfrac{1}{e}, e, 1\right)$的地方。

(3)
$$\begin{cases} u=\dfrac{\partial x}{\partial t}=ae^t \\ v=\dfrac{\partial y}{\partial t}=-be^{-t} \\ w=\dfrac{\partial z}{\partial t}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_x=\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}=ae^t \\ a_y=\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=be^{-t} \\ a_z=\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}=0 \end{cases}$$

将 $a=0$, $b=0$, $c=0$ 代入上两式，得

$$\begin{cases} u=0 \\ v=0 \\ w=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_x=0 \\ a_y=0 \\ a_z=0 \end{cases}$$ (答)

显然，初始位置在(0, 0, 0)的流点静止不动。

再将 $a=1$, $b=1$, $c=1$ 代入，可得

$$\begin{cases} u=e^t \\ v=-e^{-t} \\ w=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_x=e^t \\ a_y=e^{-t} \\ a_z=0 \end{cases}$$ (答)

故初始位置在(1, 1, 1)的流点开始先向着“第四象限”流动。由于 v 分量的不断减小，流点渐渐沿着 x 轴的正向作加速运动。

(4) 由
$$\begin{cases} x=ae^t \\ y=be^{-t} \\ z=c \end{cases}$$

消去参数 t，得 $\begin{cases} xy=ab \\ z=c \end{cases}$ (答)

故如图 1.3 所示，其轨迹为 $z=c$ 平面上的一双曲线族，即为鞍形流场。

(5)
$$\begin{cases} u=\dfrac{\partial x}{\partial t}=ae^t \\ v=\dfrac{\partial y}{\partial t}=-be^{-t} \\ w=\dfrac{\partial z}{\partial t}=0 \end{cases}$$

由拉格朗日变数代入上式，则欧拉变数为

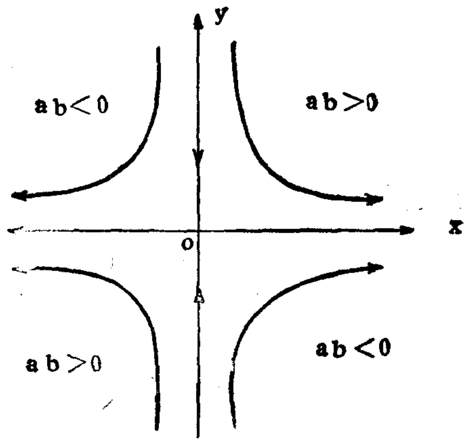


图 1.3

$$\begin{cases} u = x \\ v = -y \\ w = 0 \end{cases} \quad \text{(答)}$$

再由流线微分方程$\begin{cases} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{-y} \\ dz = 0 \end{cases}$ 得流线方程

$$\begin{cases} xy = c_1 \\ z = c_2 \end{cases} \quad \text{(答)}$$

显然，流线亦为双曲线族（图形同图 1.3）。因为流场与 t 无关，故是定常的。

1.9 流体运动由欧拉变数表为 $u = kx$, $v = ky$, $w = 0$（k 为常数）。

(1) 求出流线方程，并作图表之。

(2) 某一地点各时刻的流速是否相同？某一流点的流速是否不变？

(3) 求出 $t = 0$ 时，通过点(a, b, c)的迹线方程。

解 (1) 积分流线微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{kx}=\dfrac{dy}{ky} \\ dz=0 \end{cases}$$

得流线方程为$\begin{cases} y=c_1x \\ z=c_2 \end{cases}$ （答）

其中 c_1，c_2 为常数。流线为 $z=c_2$ 平面上的通过原点的一族直线。需注意，流线是有方向的，我们可以根据欧拉变数来加以确定。因此，$k<0$ 时为点汇流场（图 1.4a），$k>0$ 时是点源流场（图 1.4b）。

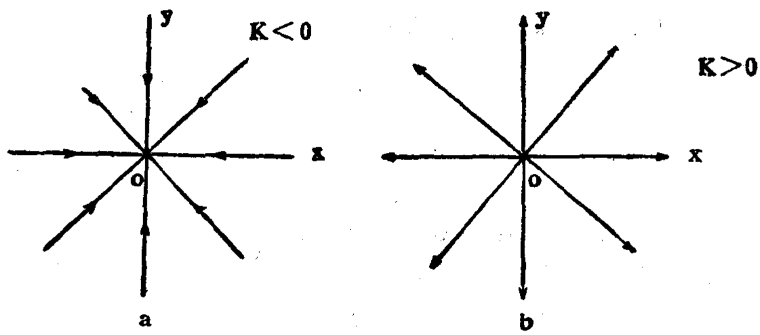


图 1.4

(2) 据题意，速度与时间无关，是一定常流动，故某一地点各时刻的流速相同。而速度与空间位置有关，当某一流点在运动过程中，其位置是随时间而变化的，因此某一流点的流速也要随时间而变。

(3) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=u=kx \\ \dfrac{dy}{dt}=v=ky \\ \dfrac{dz}{dt}=w=0 \end{cases}$$

积分后得 $$\begin{cases} \ln x=kt+c_1 \\ \ln y=kt+c_2 \\ z=c_3 \end{cases}$$

由 $t=0$ 时 $\begin{cases} x=a \\ y=b \\ z=c \end{cases}$ 确定出积分常数 $\begin{cases} c_1=\ln a \\ c_2=\ln b \\ c_3=c \end{cases}$

代回原式，并消去参数 t 后得轨迹方程为

$$\begin{cases} ay=bx \\ z=c \end{cases}$$

它是 $z=c$ 平面上的一通过原点(0, 0)和点(a, b)的直线。　(答)

1.10 推导下述二维流动的流线方程，$u=u_0$，$v=v_0\times\cos(kx-\alpha t)$。式中 u_0，v_0，k 和 α 均为常数，求 $t=0$ 时通过 $x=0$ 和 $y=0$ 的流线和迹线方程。当 k，$\alpha\to 0$ 时，试比较流线和迹线曲线。

解 由流线微分方程

$$\frac{dx}{u_0}=\frac{dy}{v_0\cos(kx-\alpha t)}$$

积分后得

$$y=\frac{v_0}{u_0k}\sin(kx-\alpha t)+c_1$$

将初始位置 $t=0$，$x=0$ 和 $y=0$ 代入上式，求得 $c_1=0$，故在 $t=0$ 时刻通过(0, 0)的流线方程为

$$y=\frac{v_0}{u_0k}\sin(kx-\alpha t)$$　(答)

将迹线微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=u_0 \\ \dfrac{dy}{dt}=v_0\cos(kx-\alpha t) \end{cases}$$

求积分，再据 $t=0$，$x=0$，$y=0$ 可确定出积分常数，得

$$\begin{cases} x=u_0t \\ \dfrac{dy}{dt}=v_0\cos(kx-\alpha t)=v_0\cos[(ku_0-\alpha)t] \\ y=\dfrac{v_0}{ku_0-\alpha}\sin(kx-\alpha t) \end{cases}$$