数学故事丛书

否定中的肯定

——逻辑的故事

上海科学普及出版社

否定中的肯定

·逻辑的故事·

张 远 南

上海科学普及出版社

内容提要

本书系数学故事丛书中的一册。全书用24篇生动有趣的小故事介绍二进位制、逻辑以及有关代数等知识。寓数学知识于趣味之中。主要目的是为提高中学生学习数学的兴趣，加深和扩展中学数学课堂知识。

本书可供中学生、中学数学教师以及广大数学爱好者阅读。

序

分析必须细致，论证务求严谨。用感知替代分析，用例举充当论证，这是思维的贫困，初学的通病。

逻辑一词译自英语logic，导源于希腊文logos，原义为思想、思维、理性、言语。现代逻辑一词是多义性的。它既代表思维的规律性，又代表思维形式及其规律性的科学，还引申表示客观的规律。

推理是从未知到已知的合乎逻辑的思维过程。数学的推理与逻辑之间有着千丝万缕的关系，以至于有不少人认为数学便是逻辑。数学与逻辑之间的这种密切关系，可以追溯到相当久远的年代。

在二千多年前的古希腊，以德谟克利特为代表的唯物主义思想家和以柏拉图、亚里士多德为代表的唯心主义思想家之间的相互辩难和争论，无疑对古希腊数学的高度发展起着推动作用。逻辑学的发展，把数学知识按假设演绎的方法严格加以整理，终于诞生了具有划时代意义的不朽巨著，欧几里得的《几何原本》。

本书并不打算，也不可能对数学逻辑和推理的理论作完整的叙述。作者的目标只是想激发读者的兴趣，并由此引起他们学习这门知识的欲望，因为作者认定：兴趣是最好的老师，一个人对科学的热爱和献身，往往是从兴趣开始。然而人类智慧的传递，是一项高超的艺术。从教到学，从学到会，从会到用，从用到创造，这是一连串极为能动的过程。作者

在长期实践中，深感普通教学的局限和不足，希望能通过非教学的手段，尝试人类智慧的传递和接力。

基于上述目的，作者计划尽自己的力量，写一套各自独立的趣味数学读物，它们是：《偶然中的必然》、《未知中的已知》、《否定中的肯定》、《无限中的有限》、《变量中的常量》、《抽象中的形象》等。分别讲述概率、方程、逻辑、极限、函数、图形等有趣的故事。作者心目中的读者，是广大中学生和数学爱好者，他们应该是衡量本书最为精确的天平。

由于作者水平有限，书中缺点错误在所难免，敬请读者不吝指出。

这本书所要讲述的内容，是人类知识的一笔巨大财富。在逻辑问题中，有许多趣闻、难题、技巧和引人入胜的东西，它需要读者反复琢磨，才能领会其中的奥妙，并因此感受到无穷的乐趣。作者希望这本书能够把读者引进人类智慧的这一宝山。

但愿读者不至于入宝山而空返！

张远南

1988年4月

目　　录

一、从“人机之战”谈起

伦敦某剧院，座无虚席。观众正屏声静气地观看着台上魔术大师马斯特曼教授的精彩表演：“绝妙的记忆术”。

突然，“砰！”地一声枪响，教授应声倒地，凶手趁人们惊愕之际，逃之夭夭。第二天报纸头版头条，刊登了这一骇人听闻的剧场谋杀案。与此同时，报纸的另一页还显赫地刊登了以下消息：

“目前，大不列颠有一千台计算机出故障！近来，全世界各地相继出现计算机停转的现象。对此科学家们迷惑不解。他们说这些计算机并未损坏，好端端的就是不工作。”“美国有一万台计算机停转，苏联有八千台停转，迄今，全世界停转的计算机总数达二万五千台之巨！”“美国国家宇航局局长表示，这是一个极为严重的问题，如果这种现象持续下去，我们的宇航计划将要告吹，苏联的也将下马，我们的工作离不开计算机。”云云。

上面就是英国作家L·G·亚历山大的科幻小说《“万能脑袋”侦破记》的最初情节。“万能脑袋”是魔术师马斯特曼教授的美称。他具有惊人的记忆力。那天，他正在台上表演“非凡记忆”的拿手好戏，一个陌生人登上了舞台，遂

给魔术师一张字条，上面写有一长串数字。这一天文数字的头四个数码是4967。正当魔术师试图复述整个数目的时候，陌生人朝他开了枪。

故事以后的情节是这样的：英国行动总局派机灵的谍报人员卡斯泰，潜入爱琴海的一个名叫多利福罗斯的小岛，那里有一台硕大无朋的计算机“DOT”，它能够对世界各地的电子计算机发出信息，而其本身却独立工作。据了解，当全世界数以千计的计算机接连停转的时候，“DOT”工作正常。局长在交待任务时，还给了卡斯泰一张纸条，并要其默诵纸条上的字母和一串数字：

“CDS4967543287043789076543”这是马斯特曼教授死前两天交给行动总局的。

此后，小说情节高潮迭起，引人入胜。主人公上岛后，几度遇险落难，又几度绝处逢生，终于靠勇敢和机智，探明了多利福罗斯岛上的巨大秘密。

原来，五年前两位才华盖世的电子工程师，奉命来岛建成了“DOT”。一位来自美国，叫哈德倍克；另一位来自伦敦，叫史密斯。后者主持了“DOT”的设计工作，但两年前因与哈德倍克不和，离开此地并埋名隐姓，浪迹天涯。从此哈德倍克便主管全岛事务。可是此人权欲熏心，企图谋求控制全世界的电子计算机，并通过“DOT”的控制，制造全球性的停机事件，妄图使世界陷入恐慌，并听命于他一人的主宰。

与此同时，“DOT”经过几年的运转，逐渐意识到自身的威力。于是开始自命“元首”，并从哈德倍克手中接管了岛上最高权力，正打算进一步称霸全球。只是它对哈德倍克和史密斯略有忌惮，因为他俩掌握有“DOT”的破坏数据。

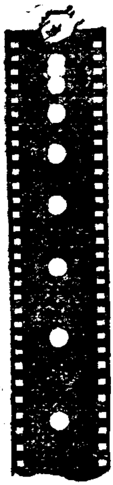
为此，“DOT”一面派人谋杀了改名为马斯特曼的史密斯，一面借卡斯泰上岛的机会干掉哈德倍克。“DOT”自以为此举干净利落，无懈可击，从此便可高枕无忧。不料史密斯死前得知世界上大量计算机停转的消息，意识到这是“DOT”暗中作怪，预感人类将经受一场严峻的挑战。良知的驱遣，使他毅然向行动总局送去了破坏数据。

话说卡斯泰上岛后，即被“DOT”看中，认为与其留着对自己有威胁的哈德倍克，不如用一个对自己没有威胁的人来替代。因此尽管哈德倍克几次三番想处死潜上岛来的不速之客，都被“DOT”以元首之命救了下来。哈德倍克被处死后，卡斯泰运用自己的智慧，一面假装对“DOT”俯首称臣，一面利用“DOT”没有防范的机会，进入控制室，拨动了电码拨号系统（CDS），及一长串数字4967543287043789076543。终于制服了不可一世的计算机“DOT”，使全世界计算机恢复了正常运转。

故事到此结束，这实际上是作者精心描绘的一幅人与机器战争的景象，虽然没有滚滚的硝烟和隆隆的炮声，却也腥风血雨，险象万千！

故事中的战争虽然以计算机失败而告终，但读者不禁要问：人类的才智果然不及计算机吗？今后会不会发生一场世界性的“人机大战”？会不会有朝一日，创造出计算机的人类，反成了计算机的奴仆？要回答这一系列问题，还得从人的思维和推理讲起。

当人们进行思索的时候，脑中是怎样运转的呢？可以想象得到，首先闪进脑海的，应该是大量与思索对象有关的事实和结论。这些事实和结论在脑中形成一连串判断的句子。这些句子在逻辑上称为命题。这一连串的命题便构成了思索的



前提。

例如，当我们思考如何保证飞机上的人员在紧急状态下的安全时，闪现在脑中的命题大概会是：

命题1：物体从高处下落，落体的速度会越来越快。

命题2：人以极大速度落于地面会造成死亡。

命题3：在空气中纸张要比石子下落慢得多。

命题4：如果天空有风，那么风筝将会飘悬在半空。

……

有了这些命题作为思索的前提，接下去便是依据这些命题作合理的推理，降落伞便是这种合理推理的产物。

命题有简单的，也有复杂的，已为人类长期实践所证实，我们无需证明而认为是正确的命题，叫“假说”或“公理”。而那些能够证明是正确的命题叫“定理”。在数学中，我们经常用字母表示数。在逻辑学中，我们则常用一个字母表示一句话。如：

P＝“天空有风”

Q＝“风筝会飘悬在半空”

很明显，P与Q各自代表一个简单的命题。在命题4中，P是Q的前提，因此这是一个复合命题。在逻辑学中，我们常用箭矢号“→”表示联系词“如果…，那么…”或“若…，则…”。例如，命题4可以用符号写成：

$$P \rightarrow Q$$

表示式$P \rightarrow Q$称为一个蕴涵关系。在蕴涵关系中，如果

作为前提的命题是真的，那么作为结论的命题便是可信的。第一个使用降落伞的人，就是相信了这样的推理：用伞状的布，可以帮助自己从高处下落的危险中得以解救。

一个命题的反意或否定，我们用在代表该命题的字母顶上加一横来表示。例如：

$\overline{P}$ = “天空没有风”

$\overline{Q}$ = “风筝不会飘悬在半空”

容易理解　$\overline{Q} \rightarrow \overline{P}$

这个符号的含意是：“如果风筝不会飘悬在半空，那么天空没有风。”

关于推理的科学，以后的章节我们会陆续讲到。读者将会看到，数学与逻辑推理有着千丝万缕的关系。数学家为我们创造了思考和观察世界的方法，使人类能够卓有成效地进行一连串推理。在古代的希腊，研究几何需要一个欧几里德那样的脑袋。而公元1637年，法国数学家笛卡儿（Descartes，1596～1650）却告诉人们，如何把几何问题转化为代数问题，借助于这种方法，几何中便不会有多大的难题。同样地，对复杂的逻辑问题，直接推理常使人感到智穷力竭。然而，十九世纪中叶，英国数学家布尔(Boole，1815～1864)所创立的逻辑代数，却能轻松地解决这类难题。今天，人们把布尔的法则输入计算机，才使计算机赋有了逻辑推理的神力。

不过，计算机虽然能够出色地使用解析几何或布尔代数的方法，却不能创造这些方法。创造这些方法的是人！就本质讲，计算机只是人的“模仿”，它必须照人类的安排去执行，仅此而已。对人类来说，重要的是创造。创造这个字眼似乎很神秘，但却是人类的骄傲！

二、演绎的科学

这是一则寓意深刻的故事。

从前有一个懒人，他有一大瓮的米。一天，他躺在米瓮边的一张席子上，开始想入非非：

“我将卖掉这些米，并买来尽可能多的小鸡。这些鸡长大后会下很多蛋。然后我把鸡和蛋卖了，再买来许多猪。当这些猪长大的时候，便会生许多小猪。那时我再把它们卖了，买回一些水牛。有了水牛，就会有许多小水牛。如果我把它们卖了，我就有钱买一块地。有了地，便可以种稻米、甘蔗和谷物。有了收成，我还可以买更多的地。再经营几年，我就能够盖上一幢漂亮的房子。”

“当我盖好房子，我将娶一个世上最美的女人做妻子。”

“那时，我是多么地富有，多么地幸福啊！”

懒人兴奋了，终于手舞足蹈，一脚踢翻了米瓮。瓮子破了，立时米象水一般倾泻出来，落在肮脏的地面上。此时，邻居的一大群鸡蜂拥而来，把地上的米啄食精光。小鸡、猪、土地、房子和美丽的女人，一切的一切全都成了泡影。留给这个懒人的只是一只破了的瓮。

这个故事告诉人们：光想是不够的，更重要的是着手去做。千里之行，始于足下。不过，尽管懒人的结局是可悲的，但他的演绎术却颇值称道。演绎是一种证明的方法，它不是基于经验或尝试，也不依赖于人们的感官，而是建立在严格推理之上的。数学大厦的基础，正是用这种演绎的方法

砌成的。

下面我们研究一下懒人是怎样进行一连串推理的。首先，他从一瓮米开始，提出命题："如果有米，那么可以卖掉米，买来尽可能多的小鸡"。简记为："若有米，则有鸡"。这实际上是关于"有米"者的一个命题，不论这有米者是谁。所以是个大前提。懒人的第二个命题是："我有一瓮米"，这是小前提。如果上述两个前提为真，那么推出的结论一定不假。用P代表"有米"，Q代表"有鸡"，于是有：

【大前提】$P \to Q$，若有米，则有鸡。

【小前提】P，我有一瓮米。

【结　论】Q，那么我有尽可能多的鸡。

懒人接下去的推理是：

【大前提】若有鸡，则有蛋。

【小前提】我有鸡。

【结　论】我有蛋。（我的鸡会生蛋）

【大前提】若有鸡和蛋，则有猪。

【小前提】我有鸡和蛋。

【结　论】我有尽可能多的猪。

……　　　……

以上这些都是演绎法的简单例子。这种由大前提、小前提和结论三部分组成的演绎推理方法，称为"三段论法"。在三段论法中，如果我们承认$P \to Q$是真实的，而由此推得的逻辑上的合理结论，可以写成：

$$\frac{\begin{array}{c}P \to Q \\ P\end{array}}{Q}$$

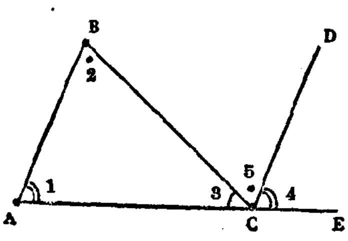
假如P、Q是经验命题，这表明复合命题$P \to Q$也可能

成立，也可能不成立。后者只要举出一个反例就够了。例如“凡是鸡都会下蛋”，“若有鸡和蛋，则有猪”，这些经验命题都未必是成立的。这正是懒人悲剧之所在。而懒人的演绎推理方法，却是无可指责的。

又若 P、Q 是分析命题，例如P是“乘法交换律 $m \cdot n = n \cdot m$”，Q是“$5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$”，对于规定的“数”和“乘法”，要么两者都成立，要么两者都不成立。如果我们同意前一个命题，我们也就必须同意后一个命题。复合命题 $P \to Q$ 在这种意义下被认为是真实的。

两千多年前的古希腊数学家欧几里德（Euclid，前330？～前275？），正是使用“点”、“线”、“圆”、“相交”、“重合”等基本砖石，在公理的基础上，通过科学的演绎，建筑起宏伟的几何学大厦的。这就是我们今天初中课本上讲的平面几何。

下面我们看一看如何通过演绎的方法，证明“三角形内角和等于180°”。已知△ABC，各角如图标。



（1）【大前提】：过直线外一点，有且只有一条直线与已知直线平行。

【小前提】C 是直线AB外一点。

【结　论】存在唯一直线CD∥AB。

（2）【大前提】两直线平行，同位角相等。（定理）

【小前提】CD∥AB

【结　论】（同位角）∠1＝∠4

（3）【大前提】两直线平行，内错角相等。（定理）

【小前提】CD∥AB

【结　论】（内错角）$\angle 2=\angle 5$

(4)　【大前提】若是平角，则等于180°（定义）

【小前提】$\angle 3+\angle 4+\angle 5$为平角

【结　论】$\angle 3+\angle 4+\angle 5=180°$

(5)　【大前提】在等式中，一个量可以用它的等量来代替。（公理）

【小前提】$\angle 1+\angle 2+\angle 3=\angle 3+\angle 4+\angle 5$

【结　论】$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$（即为所证）

我们用符号代表上述有关命题：

L＝"A、B、C为三角形三顶点，三角形的内角和为$\angle 1+\angle 2+\angle 3$"

M＝"C为直线AB外一点"

N＝"CD∥AB"

P＝"$\angle 1=\angle 4$"

Q＝"$\angle 2=\angle 5$"

R＝"$\angle 3+\angle 4+\angle 5$是平角"

S＝"$\angle 3+\angle 4+\angle 5=180°$"

T＝"$\angle 1+\angle 2+\angle 3=\angle 3+\angle 4+\angle 5$"

U＝"$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$"

于是有：(1)　$L\to M\to N$

(2)、(3)　$N \begin{array}{l}\nearrow P \\ \searrow Q\end{array}$

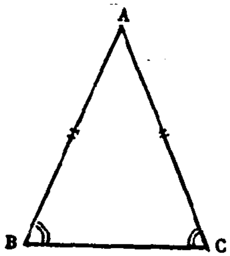
(4)　$R\to S$

(5)　$\left.\begin{array}{l}P \\ Q\end{array}\right\rangle \to \left.\begin{array}{l}T \\ S\end{array}\right\rangle \to U$

整个演绎的过程可以写成：

$$\begin{tikzcd}
& & & P \arrow[dr] & & \\
L \arrow[r] & M \arrow[r] & N \arrow[ur] \arrow[dr] & & T \arrow[dr] & \\
& & & Q \arrow[ur] & & U \\
& & & R \arrow[r] & S \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

要说明的是：推理的三段论法在实际运用中，时常采用省略式。对于大前提不说也明白的情形，可以省去。这在素以简洁著称的数学推理中尤为常见。例如：



"在△ABC中

∵ AB = AC　【小前提】

∴ ∠B = ∠C"　【结　论】

这里省略的大前提："等腰三角形底角相等"是众所周知的。

在小前提内容和大前提联系极为明显，或结论可以必然推出时，相应的小前提或结论也可以省略。下面的故事将使人生动地看到这一点。

歌德是十八世纪德国的一位著名文艺大师。一天，他与一位文艺批评家"狭路相逢"。这位批评家生性古怪，遇到歌德走来，不仅没有相让，反而卖弄聪明，一边高傲地往前走，一边大声说道："我从来不给傻子让路！"面对如此尴尬局面，但见歌德笑容可掬，谦恭地闪在一旁，一边有礼貌地回答道："呵