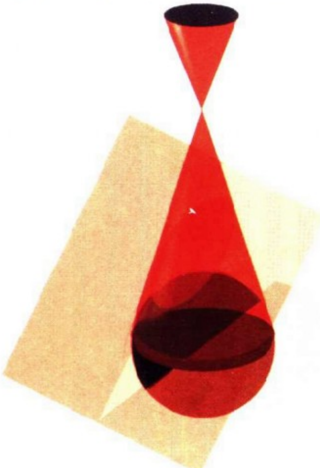
名师解惑丛书



圆锥曲线

刘长春 编著

山东教育出版社

名师解惑丛书

策划\孙永大

责任编辑\霍　亮

装帧设计\革　丽\戚晓东

ISBN 7-5328-2708-9

9 787532 827084 >

ISBN 7-5328-2708-9/G·2486

定价：7.00元

名师解惑丛书

圆锥曲线

刘长春　编著

山东教育出版社

名师解惑丛书

圆 锥 曲 线

刘长春　编著

出 版 者:山东教育出版社
（济南市纬一路 321 号　邮编:250001）
电　　话:(0531)2023919　传真:(0531)2050104
网　　址:http://www.sjs.com.cn
发 行 者:山东教育出版社
印　　刷:山东新华印刷厂临沂厂
版　　次:1998 年 9 月第 1 版
2001 年 1 月修订第 2 版
2001 年 6 月第 6 次印刷
规　　格:787mm × 1092mm　32 开本
印　　张:7.5
字　　数:156 千字
书　　号:ISBN 7－5328－2708－9/G·2486
定　　价:7.00 元

图书在版编目(CIP)数据

圆锥曲线/刘长春编著.—济南:山东教育出版社,1998
(2000 重印)
(名师解惑丛书)
ISBN 7-5328-2708-9

Ⅰ.圆… Ⅱ.刘… Ⅲ.几何课-高中-课外读物
Ⅳ.G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 02877 号

再版说明

“名师解惑丛书”出版发行以来，以其新颖的编写体例和缜密的知识阐述，深受广大读者青睐，曾连续多次重印．

近几年来，基础教育正发生深刻的改革：“科教兴国”战略深入人心，素质教育全面推进，与此同时，以“普通高等学校招生全国统一考试试卷”为主要载体，所反映出的高考招生改革信息和发展趋势，迫切需要广大教师和莘莘学子以新的视角和思维，关注并投身到这场改革之中．

有鉴于此，我们对“名师解惑丛书”进行了全面修订．此次修订将依然保持被广大读者认同的，每一册书为一个专题讲座的模式，围绕“如何学”，“如何建立知识间的联系”，“如何学以致用”等，帮助广大学生读者解决在学习知识和考试答卷过程中可能遇到的疑难问题．更重要的是，最新修订的“名师解惑丛书”在如何培养学生的创新精神和创造能力，联系现代科学技术及其在日常生产生活中的应用方面，做了较大的充实和修订……

丛书的编写者和出版者相信，您正在翻阅的这本书，将有助于您目前的学习．

作者的话

圆锥曲线是中学平面解析几何的主体内容,也是进一步研究其它曲线的基础,在日常生活和科学技术中有着广泛的应用.用解析法研究圆锥曲线是由初等数学向高等数学过渡的阶梯之一.

圆锥曲线中处处渗透着数形结合、函数与方程、分类讨论、化归与转化等基本数学思想.它与其它数学分支亦有着密切的联系.因此,在中学数学中,圆锥曲线占有重要的地位.学好这部分内容,可以培养自觉运用数学思想和数学基本方法分析问题、解决问题的意识,发展数学学科能力,促进数学素养的提高.

本书围绕圆锥曲线这一内容,立足教材、拓宽加深、揭示内在规律,剖析思想方法,解答学习之"惑",以期提高读者的数学能力.本书具有如下特点:

1.对学生容易出错和忽略的问题进行剖析和点拨,帮助其建立正确的解题思路.

2.注意对思维过程的分析、注重阐释

概念的内涵与外延,分析知识的内在联系,揭示解题思路的来龙去脉,注意“导评”.

3.注重数学思想方法的渗透与运用,引导学生自觉运用数学思想方法分析问题和解决问题.

4.对典型例题,注重探求多种解法、引申推广,引导学生题后反思,以培养其求异思维和创新能力.

希望本书成为学生学好圆锥曲线,解决与之有关的疑难问题,发展数学思维能力的良师益友.限于编者的水平,书中错误、缺点在所难免,敬请读者批评指正.

2000 年 10 月

作者简介 刘长春,1960 年生,大学本科学历,中学特级教师,现任沂源一中副校长,曾荣获“淄博市专业技术拔尖人才”、“山东省优秀教师”等荣誉称号 . 曾设计并主持“数学变式教学”的教改实验,其成果获全国一等奖,并被教育部师范司确定为全国中学数学教师继续教育培训教材;曾先后在省级以上刊物发表论文 30 余篇,其中《实施变式教学,提高课堂效益、减轻学生负担》等 8 篇论文被人民大学复印报刊《中学数学教学》全文转载;出版专著 3 种,其中《高考试题分析与数学学习》获全国首届教育图书奖三等奖 .

目　录

引　子

圆锥曲线是解析几何的主体内容.对这部分内容的学习要求是:掌握直角坐标系中的曲线与方程的关系和轨迹的概念,能够根据所给条件,选择适当的直角坐标系求曲线的方程,并能画出方程所表示的曲线;掌握圆锥曲线的标准方程及其几何性质,会根据所给条件画圆锥曲线,了解圆锥曲线的一些实际应用;理解坐标变换的意义,掌握利用坐标平移化简圆锥曲线方程的方法;了解用坐标法研究几何问题的思想,初步掌握用方程研究曲线性质的方法.

解析几何用代数的观点研究几何问题,集中反映了数与形的转换,因而它是数形结合的典范;解析几何用方程表示曲线,并与函数紧密地联系在一起,因而它又集中体现了函数与方程的思想;在解析几何有关问题的研究中,由于方程的局限性及

图形的可变性，往往需要依情形不同进行分类讨论，因而它又是训练分类讨论思想的良好素材；解析几何所研究的主要问题就是数与形的转化、各种形式的方程间的转化，因而它又很好地体现了化归与转化的思想．因此，在学习圆锥曲线的过程中，必须注意对四种基本数学思想（数形结合的思想、函数与方程的思想、分类讨论的思想、化归与转化的思想）的培养，并用以指导对具体问题的认识和解决．同时，要注意掌握具体体现数学思想的数学基本方法，如消元降幂法、配方法、换元法、待定系数法、参数法等，并把它们作为解题的手段，熟练运用于解题过程．

学习数学的根本目的在于发展数学能力．数学能力在很大程度上是通过解题来体现的．具体体现为：能否从题目的条件或结论中获得确切信息；能否从记忆系统中提取与上述信息相关的信息；能否对上述双方面信息进行有机的组合；能否对上述组合进行条理化整理以形成解题的行动序列；能否顺利实施上述行动序列中的推理与运算．上述诸项，融合了逻辑思维能力、运算能力、空间想像能力、分析问题与解决问题的能力等四种基本能力．具体到圆锥曲线，它很好地体现了对其中的逻辑思维能力、计算能力、分析问题与解决问题的能力等三者的要求．在学习圆锥曲线时，要以数学知识为载体，寓能力培养于知识学习之中，在获得了相应的数学能力之后，反过来更有目的地汲取所需知识，形成“知识——能力——知识——能力”的良性循环．

在圆锥曲线的具体学习过程中，还应注意题后反思，每做完一个习题，要反思一下，是如何做出来的，用到了哪些知识，

有什么规律和技巧,还有没有更好的方法;要注意进行题目变式:在题设条件不变的情况下,还能得到哪些结论? 改变一下题设条件又会如何? 能否进行推广拓展得更一般结论? 进行题后反思,既可以将知识举一反三、融会贯通,又是培养求异思维、发展创新能力的有效途径.

最后,我们希望学习者了解解析法研究问题的一般步骤:

(1)选择、引入恰当的坐标系,使数和形初步结合,把曲线与方程有条件地统一起来;

(2)考虑是否需要引入新的变量——参变量,以便更容易地建立曲线的方程或求解其他的问题;

(3)考虑是否需要进行坐标变换,使曲线方程化简,或使所研究的问题便于归纳、讨论及解决;

(4)运用各种代数方法,解决提出的几何问题,并给出适合要求的答案.

一 椭圆

椭圆是一种常见的图形，如汽车油罐横截面的轮廓、天体中一些行星和卫星的运行轨道、圆形板在阳光下的斜影等都是椭圆形. 再如，把圆柱形水杯倾斜放置，杯中的水面呈椭圆形；用一个不经过圆锥顶点的平面截圆锥面，设截面和圆锥的轴所成角为 θ，圆锥半顶角为 α，则当 $\alpha<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，截得的交线是一个椭圆.

(一)椭圆及其标准方程

1. 椭圆的定义

第一定义：平面内与两个定点 F_1、F_2 的距离的和等于常数(大于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹叫做椭圆. 这两个定点叫做椭圆的焦点，两焦点间的距离叫做焦距.

对这一定义，应该注意：

(1)动点到两定点的距离之和(记作

$2a$)大于$|F_1F_2|$(记作 $2c$),否则,其轨迹不是椭圆.当 $2a=2c$ 时,轨迹是线段 F_1F_2;当 $2a<2c$ 时,轨迹不存在.

(2)若用 M 表示椭圆上的动点,则有

$$|MF_1|+|MF_2|=2a(a>c). \qquad (\mathrm{I})$$

若建立平面直角坐标系,使 $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,$M(x,y)$,则有

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a(a>c). \qquad (\mathrm{II})$$

(I)、(II)是椭圆第一定义轨迹条件的数量描述形式.

第二定义:平面内与一个定点 F 和一条定直线 l 的距离的比是常数 $e(0<e<1)$的动点的轨迹是椭圆.定点 F 叫做椭圆的焦点,定直线 l 叫做焦点F 对应的准线,常数 e 称为离心率.

对第二定义的理解,应特别注意:

(1)$0<e<1$.

(2)点 F 不在直线 l 上,否则无轨迹.

(3)根据椭圆的对称性,椭圆有两个焦点,因而有两条准线,并且左、右焦点与左、右准线分别对应.

(4)若 M 是椭圆上任意一点,设 M 到 F_1 对应准线的距离为 d_1,到 F_2 对应准线的距离为 d_2,则有

$$\frac{|MF_1|}{d_1}=\frac{|MF_2|}{d_2}=e(0<e<1). \qquad (\mathrm{I}')$$

若建立平面直角坐标系,使 $F(c,0)$,$l:x=\frac{a^2}{c}$,$e=\frac{c}{a}(a>c>0)$,则有

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{|x-\frac{a^2}{c}|}=\frac{c}{a}. \qquad (\mathrm{II}')$$

(Ⅰ′)、(Ⅱ′)是第二定义轨迹条件的数量描述形式.

应当指出,椭圆的上述两个定义是等价的.事实上,由(Ⅱ)可得

$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=c^2x^2+a^4.$$

两边减去 $2a^2cx$,得

$$a^2(x-c)^2+a^2y^2=c^2(x-\frac{a^2}{c})^2.$$

$$\therefore \qquad \frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{|x-\frac{a^2}{c}|}=\frac{c}{a}.$$

此式即为(Ⅱ′).这说明由第一定义可推出第二定义,反之亦然.

2.椭圆的标准方程

椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ 或 } \frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0).$$

对椭圆的标准方程,应注意理解以下几点:

(1)标准方程中的两个参数 a 和 b,确定了椭圆的形状和大小,是椭圆的定形条件.

(2)焦点 F_1、F_2 的位置,是椭圆的定位条件,它决定椭圆标准方程的类型.知道了焦点位置,其标准方程只有一种形式;不知道焦点位置,其标准方程具有两种类型.

(3)任何一个椭圆,只要选择适当的坐标系,使椭圆的中

心在原点，焦点在坐标轴上，椭圆的方程就具有标准形式.

(4)椭圆方程中的参数 a、b、c 是椭圆所固有的，与坐标系的建立无关，$c^2=a^2-b^2$ 必须牢固掌握.

3. 椭圆定义的应用

椭圆的两个定义在解题中有着广泛的应用. 事实上，可以通过(Ⅰ)、(Ⅰ′)实现由形到数的转换. 另一方面，当问题的题设中呈现隐含着形如(Ⅱ)、(Ⅱ′)的数量形式时，就可以据此构造椭圆，实现由数到形的质变转换.

例 1 如图 1－1，点 M 为椭圆上一点，椭圆两焦点为 F_1、F_2，且 $2a=10, 2c=6$，点 I 为 $\triangle MF_1F_2$ 的内心，延长 MI 交 F_1F_2 于 N，求 $\dfrac{|MI|}{|IN|}$ 的值.

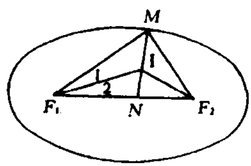


图 1－1

解：$\because$ I 为 $\triangle MF_1F_2$ 的内心，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$，

$\therefore$ $\dfrac{|MI|}{|IN|}=\dfrac{|MF_1|}{|F_1N|}$. ①

同理，$\dfrac{|MI|}{|IN|}=\dfrac{|MF_2|}{|F_2N|}$. ②

由①、②并应用等比定理得

$$\frac{|MI|}{|IN|}=\frac{|MF_1|+|MF_2|}{|F_1N|+|F_2N|}=\frac{2a}{2c}=\frac{5}{3}.$$

例 2 椭圆中 $2a=10, 2c=8$，在椭圆上有一点 M 到左准线的距离为 $\dfrac{5}{2}$，求点 M 到右准线的距离.

解：设椭圆的左焦点为 F_1、右焦点为 F_2，则

$$|MF_1|=ed_1=\frac{c}{a}\cdot d_1=2.$$