概率、随机变量与随机过程

〔美〕A. 帕普力斯 著
谢国瑞等 译
吴乙申等 校

高等教育出版社

概率、随机变量与随机过程

〔美〕A. 帕普力斯　著

谢国瑞　宣月华　陈邦海
徐自新　丁和官　邱炜源　吴乙申　译

吴乙申　谢国瑞　校

高等教育出版社

内容提要

本书是为工程、物理及应用数学学生写的一本概率论和随机过程的重要导论性著作. 书中系统而清晰地处理了概率论的基本概念，并有一半以上的篇幅论述应用科学工作者非常关心的随机过程理论. 原书是 McGraw-Hill 系统科学丛书中的一本.

全书分成互有联系而又相对独立的两个部分. 第一部分讲概率与随机变量，内容可作为大学概率论课程的参考教材. 第二部分介绍随机过程，主要供熟悉概率论的读者(包括大学生及工程技术人员)进一步深造之用，要求读者具备一些线性系统理论、傅里叶变换及一般工程等学生应了解的知识.

责任编辑：鲍 洴

概率、随机变量与随机过程

〔美〕A. 帕普力斯 著

谢国瑞 宣月华 陈邦海 徐自新 丁和官 邱炜源 吴乙申 译

吴乙申 谢国瑞 校

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
河北香河印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 21.25 字数 511,000
1983 年[illegible]月第1版 1984年12月第1次印刷
印数 00,001—10.35[illegible]

书号 13[illegible]0858 定价 4.45 元

序

我在几年前就得出了这样的结论，即概率论不再应该只是作为统计学或噪声、或任何其它学科的附带内容来处理，而应该作为一门独立的课程，包括在所有工程师和物理学家的基础训练中．之后，我曾为讲授这一课程作了一些考虑，下面是我早先笔记的摘录，大家可以从中了解到我在计划本书时的一些指导思想．

“在物理学的因果观中成长起来的大多数学生都感到这一学科不可靠、模糊、难懂．这种困难的长期持续，是由于基本原理之不适当的定义，因而，在假设与逻辑结论之间经常发生混淆．要扫除概念上的含混不清，就只有用公理化的办法来发展理论．人们会说，这一方法需要用到测度论，会把这一科目变成理论数学的一个分支，会迫使学生对他的直观产生怀疑而又无其它可以信任的途径可循．但我却不是这样想的．我深信，在应用中需要的大多数概念，能够用简单的数学来解释清楚．概率论如同任何其它的理论一样，应该被看作是一座概念的建筑物，而它的结论应该基于逻辑而不是依靠直观．当然，它的各种不同的概念是应该同物理世界相联系的，但其联系实践的部分应该同理论的演绎部分区分开来．这样，直观性可以加强，而又不牺牲逻辑严密性．

“在作为入门课程介绍的概率论初步和当今应用中需要的一些复杂概念之间，明显地缺乏衔接．怎样能使一个只具有骰子和扑克的概率知识的普通学生理解预测理论或调和分析呢？讲应用的书籍，对基础题材至多只作一些简短的讨论，它们的目的并不是通过应用来巩固学生对基本概念的理解；相反，却详尽地讨论一些

专门的课题.

“随机变量、变换、期望值、条件密度、特征函数等是不可能仅仅接触一下就掌握的. 这些概念必须给予清晰的定义,并且必须要用足够详尽的说明来一个一个地加以发挥. 各种专门的题材应当是用来说明理论的,而叙述的方式必须集中在它的概率内容上,并尽量减少其它描述性材料. 只有这样,才能使学生既经济而又正确地学会各种不同的应用.”

我认识到,为了要讲授一门令人信服的课程(这门课程提供的不只是些结论,而是一个连贯的理论),我需要重新考虑的不仅是怎样展开各个专门的论题,而且还包括许多结果的证明及基本原理引入的方法.

“这个理论在形式上必须是数学的(演绎的),但没有数学上的普遍性或严密性. 概率的哲学意义应当进行一定的讨论. 这对于清除围绕着概率的神秘感,说服学生需要一个公理化的方法,并明确区分假设与逻辑结论之间的不同是完全必要的. 公理化的基础应该不只是一个附录,而要贯穿在整个理论之中.”

“随机变量必须定义成以实验结果(而不是实直线上的点)的抽象集合为定义域的函数. 只有这样,才能回避无限维空间,并使推广到随机过程得以简化.”

“在论述随机过程时,用平均作定义的不充分性和引入基础空间的重要性是最明显不过了. 时间平均必须作为随机积分引入,它们与过程统计参数之间的关系,必须建立在遍历性的形式之中.”

“从当前的需要来看,特别强调二阶矩和谱(利用了学生熟悉的系统和变换方法)是完全有理由的.”

“一个非常重要的论题——均方估计(预测和滤波)需要从根本上重新考虑. 如果把它从积分方程或变分法的细节中解脱出

来，而作为正交性原理(线性回归)的一个应用来介绍，简单地用随机变量的语言加以解释，那末它是很容易理解的。”

“为了保持概念的系统性，我们必须牺牲为了说明一般理论而引入的各种专题之间的连贯性。”

这些思想构成了我曾经在布鲁克林理工学院讲授的一门课程的骨架．在同学们的鼓励下，我决定把它写成一本书．应该指出，我并不把我的工作看成是对一个完整理论的纯客观叙述，而宁愿是作为对一群特定的学生解释这个理论本质的一种艰难的尝试．这本书既不是为把它当作手册、指南用的学生所写，也不是为少数拔尖的学生(他们能够用高等的数学教科书来学这门课)写的．写作本书是为大多数工程师与物理学家着想的．他们具有足够的理解能力，也能跟得上逻辑的推理，但限于他们的数学基础，所以把像杜勃这样的书当作入门读物是太困难了．

虽然我在这里包括进了许多有用的结果(其中有一些是新的)，但我希望对本书的评价将不是按照其完整与否，而是按照它对材料的组织和讲解得是否清晰．在这里，我乐意地期待着批评和解释我的想法．一些读者将会发现，许多重要定理的证明缺乏严密性．我要强调指出，这绝非出于疏忽，而是经过深思熟虑的：在一些事例中，我只给出似是而非的论证．我完全清楚“一个证明或者是个证明或者就不是个证明”．然而，在作出一个严密的证明之前，应当先把新的概念解释清楚，并对结论的正确性作肤浅的说明．我感到，对本书的目的而言，重点应该放在解释、简易、和经济上．我希望，这一做法给你带来的不只是一门有用的知识，而且也是一种深入研究这一饶有兴味的学科的动力．

虽然我曾力图对涉及到的每一个论题都发挥我个人的观点，但我清楚地认识到，我有许多东西是来自其他作者的．特别，J. L. 杜勃的“随机过程”和 A. 弗兰斯-拉披尔及 R. 福铁脱的“随机函

数论"两书①，对我计划随机过程的各章有很大的影响.

最后，我要愉快地向以下提到的各位表示诚挚的谢意. 对 M. 施瓦尔兹感谢他的鼓励和宝贵的评论，对 R. 皮克霍茨感谢他的许多意见和建设性的提议，以及对所有我的同事和学生. 感谢他们指引并鼓励我去实现这个值得费力的计划.

A. 帕普力斯

① J. L. Doob: "Stochastic Processes", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1953. A. Blanc-Lapierre and R. Fortet: "Théorie des Functions Aléatoires", Masson et Cie, Paris, 1953.

目　录

第一部分

概率与随机变量

第 1 章　概率的意义

科学理论都是只对概念，而不是对现实进行讨论的．所有理论性的结果都是从某些公理通过演绎逻辑推导出来的．在物理科学中，理论的陈述在某种有用的意义下符合于现实世界，不管这意味什么．然而，这种符合只是近似的，所有理论性结论的物理验证则基于某种形式的归纳推理．

学生对所谓确定性现象中的概念世界（模型）和物理世界的区别是容易接受的，但在概率性描述中，他对这两个世界却常混淆不清．他被告知，宇宙按确定性规律发展，这些规律精确地规定了宇宙的未来，只是由于我们的无知，才需要概率性的描述．这种从根本上对概率的正确性所持的怀疑，只有通过对概率的意义作出了正确的解释才能予以克服．

在以下的讨论中，我们试图说明概率论也是一门演绎的科学，因而必须用公理化的办法来展开．当然，它的分析结果与现实世界之符合是不精确的，也是不可能被“证明”的，但这并不是概率结果独具的特点，而是一切科学结论的特征．

1-1．前　　言

概率论处理同时或先后出现的大量现象的各种平均：如电子发射、电话呼唤、雷达检测、质量控制、系统故障、赌博游戏、统计力学、湍流、噪声、出生和死亡率、遗传．

已经观察到，在这些或那些领域内，某种平均随着观察次数的增加而趋近于一个常数值．并且即使平均是按照试验以前就规定好的任一子序列来进行计算，它的极限值仍将保持不变．例如在

抛掷硬币的游戏中，出现正面的百分率会趋近于0.5或其它某个常数，但如按每第四个抛掷结果所形成的子序列进行计算，则所得平均值仍然相同.

概率论的目的，是要通过对各种事件指定概率，以描述和预测这种平均. 在一个明确规定了的实验 $\mathfrak{S}$ 中，事件 $\mathscr{A}$ 的概率 $P(\mathscr{A})$ 应解释如下:

若将这个实验重复 n 次而事件 $\mathscr{A}$ 出现了 n_A 次，则若 n 足够大，就可以高度肯定事件 $\mathscr{A}$ 出现的相对频率接近于 $P(\mathscr{A})$

$$P(\mathscr{A})\approx\frac{n_A}{n} \tag{1-1}$$

显然，这个解释是不明确的，但是已不可能再作本质上的改进. 例如，人们可以赋予高度肯定一词以概率内容来修饰这一解释，但这种修饰只能推迟却不能避免以下的事实: 即概率论如同其它任何物理理论一样，只能按不精确的语言和物理现象发生联系. 然而，这一理论是一门从明确规定的公理经过逻辑发展得到的精确学科，而且当用来解决实际问题时是起作用的.

对物理现象的任何概率性研究中，必须区分下列三个步骤:

第一步(物理的). 通过不精确也不可能成为精确的手续，确定某些事件 $\mathscr{A}$ 的概率 $P(\mathscr{A})$(概率数据).

这一步可根据(1-1)来做: 令 $P(\mathscr{A})$ 等于由实验确定的比值 $\frac{n_A}{n}$(相对频率方法). 例如，若把一个不匀称的骰子滚动 1000 次，5 出现了 203 次则出现 5 的概率就等于 0.2. 在某些情况下，$P(\mathscr{A})$ 可由纯粹的推理而毋须通过实验来先验地求出(即将讨论的古典方法). 若给定了一颗匀称的骰子，则由于它是对称的'理由'，可得出现 5 的概率等于 $\frac{1}{6}$.

第二步(概念性的). 假设概率满足某些公理，我们可从一些

事件 $\mathscr{A}$ 的概率 $P(\mathscr{A})$ 通过演绎推理来确定另外一些事件 $\mathscr{B}$ 的概率 $P(\mathscr{B})$.

例如,在滚动一颗匀称的骰子时,可以推得出现"偶数点"这一事件的概率等于 $\frac{3}{6}$. 我们可作如下的论述:

$$若\quad P(1)=P(2)=\cdots=P(6)=\frac{1}{6}\quad 则\quad P(偶数)=\frac{3}{6}$$

第三步(物理的). 我们利用第二步中确定的数字 $P(\mathscr{B})$ 来对物理现象作出预测.

这一步也是不明确的,而且也可以根据(1-1)来完成. 例如,滚动一颗匀称的骰子 1000 次,我们可以预期其中大约一半次数会出现偶数点.

概率的理论只涉及到第二步; 亦即它告诉我们怎样从某些假定为已知的概率来推算其它的概率. 人们也许会说此类推算无异于同义反复,因为结果已包含在假设之中了. 事实上,在这个意义下卫星运动的复杂方程也是包含于牛顿定律之中的, 可是没有人就据此来否定力学科学的价值.

在解决一个问题的时候, 我们不能过分强调要分清这三个步骤. 但学生必须把假设的或由不精确的推理确定的数据同由逻辑推理所获得的结果区分开来.

第一和第三步属于统计学的研究对象. 然而, 甚至在统计学中,所有的结果也都是以概率语言给出的,其差别是最后的实验检验应用于概率几乎为 1 的事件. 在这种情形下的相对频率解释取如下的形式:

若一个事件的概率几乎是 1, 则高度肯定此事件在一次试验中将会出现.

即便这样, 对实际的事件怎样去指定概率的困难仍然没有消除. 人们也许不知道怎样去着手处理一个实际问题. 为了确定出

现正面的概率，究竟应该抛掷硬币一百次还是一千次呢？设在抛掷一千次后出现正面次数的平均值稳定于0.48，在这一观察的基础上，可以作出怎样的预测呢？根据什么样的逻辑必然性，人们能够推出在接下去的一千次抛掷中，出现正面的[①]平均数将在0.48左右呢？这个问题只能在某种形式的归纳推理中获得解答．但这种推理方式不仅在概率的论述中使用，而且还在所有从经验引出的结论，甚至在所谓确定性科学中使用．例如，考虑经典力学的发展．由于观察到物体的下落是具有某种规律的，而牛顿定律就在这个观察基础上逐渐形成，并能成功地用以预测未来的事件．如果人们要去‘证明’未来将会按预测的方式发展，那末他必须祈求一个形而上学的原因，诸如‘自然界的规律性’．物理学家把他的结论建筑在归纳推理的基础上，并且满足于他作出的预测的正确性．这一观点还给他以抛弃任一理论的机动性，如果后来的证据和预测发生了明显的矛盾．如果他发现概率地来描述一些现象是有用的话，他就这样做，而没有必要对它作确定性的解释．

作为结束，我们要重申，一个事件$\mathscr{A}$的概率$P(\mathscr{A})$必须理解为对这个事件指定的一个数，如同质量是对物体指定的一个数一样．而在理论的发展过程中，人们不应当为$P(\mathscr{A})$的“物理意义”所困扰．这对一切理论都是同样的．

例如，考虑电路分析．人们假设电阻器是一两端装置，它的电压与电流成正比

$$R=\frac{v(t)}{i(t)} \tag{1-2}$$

但是一个实际的电阻器并不服从(1-2)．它是一个没有明显端钮的复杂的概念，它具有分布的电感和电容；产生热噪声；并且只在某频率范围内和一定的误差限以内，还要加上许多限制条件，才

① “出现正面的”这几个字系译者所加．

能使形如(1-2)的关系式得以成立．但在理论的发展过程中，人们完全可以不管这种不确定性．他可以假定一个电阻器具有满足(1-2)的值 R，再利用一些定律就可以展开电路分析．事实上，如果在这种展开的每一阶段，人们都在惦记着 R 的真实意义，那么可以设想将会引起多大的混乱．

如同电路分析、电磁理论或任何其它科学原理一样，概率论必须采用公理化方法来介绍．当然，这些理论除非能够帮助我们解决实际问题，否则将对物理学毫无价值可言．因此，我们应能对实在的电阻器指定明确的值，即使是近似的数值，或对某些事件赋予概率(第一步)．我们应能对由理论推导的数值赋予物理意义(第三步)．理论化了的概念与物理世界之间的联系是重要的，但必须与每一理论的纯逻辑结构区分开来．

1-2．概率的各种定义

我们将介绍和分析概率的各种定义，并在本章的末尾对其在我们的研究中所起的作用加以评价．

基本上有四种不同的方式定义概率：

A．公理化(测度)

B．相对频率(封·米赛斯)

C．一个先验定义，作为有利数与抉择总数之比(古典的)

D．概率作为一种信念的测度(归纳推理)

A．公理化定义

为了理解这一重要定义，我们需要先引入下列概念①：在一给定的实验中，用 Ω 代表必然事件，即每次试验中都出现的事件．对给定的两事件 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$，用 $\mathscr{A}+\mathscr{B}$ 代表一事件，即当 $\mathscr{A}$ 或 $\mathscr{B}$ 或两者都出现时它就出现．若在一次试验中，其中之一的出现排斥

① 详见第2章．