

- 杨绪灿
- 杨桂通
- 徐秉业
编 著

粘塑性力学概论

中国铁道出版社

粘 塑 性 力 学 概 论

杨绪灿 杨桂通 徐秉业 编著



中 国 铁 道 出 版 社

1985年·北京

粘塑性力学概论

杨绪灿 杨桂通 徐秉业 编著

中国铁道出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092毫米 $\frac{1}{2}$ 印张：6.875 字数：154千

1985年8月 第1版 第1次印刷

印数：0001—3,500册 定价：1.30元

前 言

人们在工程实践中发现，在受力状态下，固体材料的变形都不同程度地随时间而变化。这种变形与时间的相关性，通常称作材料的粘性性质。在有些情况下，物体在弹性变形阶段就有明显的粘性性质；有时在塑性阶段才显示这种粘性性质。我们将前一种情况称作材料的粘弹塑性性质，后者称为弹粘塑性性质。本书重点介绍粘塑性问题，即物体在塑性阶段同时有粘性性质的力学问题。在一些聚合物、土壤、非金属材料力学问题中，当弹性变形很小而在塑性阶段有明显粘性变形时，就应当采用这种粘塑性模型来分析。此外，对于大多数金属材料的力学问题，当变形速度很高时，也具有明显的粘性性质。因而无论对于金属材料或是非金属材料，静力学或动力学问题，都有必要采用粘塑性模型，这就是粘塑性力学的工程背景。应当说，粘塑性力学在工程问题的许多领域是有重要实际意义的。

粘塑性力学尚处在一个初期的发展阶段，我们希望通过本书向读者介绍有关粘塑性问题的最基本概念和一些简单的应用问题。以期为进一步研究粘塑性力学问题打下一个初步的基础。

本书的全稿曾由太原工业大学张善元同志校核整修，为此耗去他许多宝贵时光和精力，谨致衷心谢意。

杨绪灿 杨桂通 徐秉业

1984年4月



内 容 简 介

本书介绍同时考虑材料的塑性和粘性的粘塑性力学的基本概念及其简单的应用，以期为读者深入研究粘塑性力学问题打下初步的基础。本书叙述简明清晰、浅显易懂，可供有关力学专业的工程技术人员及高等院校师生学习参考。

目 录

第一章 预备知识	1
§ 1.1 固体材料的力学特性	1
§ 1.2 应力与应变	13
§ 1.3 弹性、粘性和粘弹性	27
§ 1.4 塑性及粘塑性	45
第二章 粘塑性力学的本构方程	50
§ 2.1 塑性屈服条件	50
§ 2.2 塑性本构关系	55
§ 2.3 强化条件	60
§ 2.4 简单应力状态下的粘塑性本构关系	63
§ 2.5 波任纳(P. Perzyna)粘塑性本构方程	71
§ 2.6 土壤的粘塑性本构方程	82
§ 2.7 考虑温度变化的粘塑性本构方程	84
第三章 最简单的粘塑性问题	88
§ 3.1 一维粘塑性流	88
§ 3.2 单自由度粘塑性系统的运动	91
§ 3.3 整球壳的运动	96
第四章 粘塑性梁的动力分析	99
§ 4.1 概述	99
§ 4.2 悬臂梁	101
§ 4.3 半无限长杆	105
第五章 圆板的轴对称粘塑性弯曲	108
§ 5.1 圆板的基本方程和物理关系	108

§ 5.2	简支圆板的刚塑性解	113
§ 5.3	粘塑性简支圆板的普拉格(W. Prager)解	117
§ 5.4	粘塑性简支圆板的普拉斯(H. J. Plass)解	121
§ 5.5	幂函数 $\Phi(\mathcal{F})$ 及密赛斯屈服条件的解	124
§ 5.6	粘塑性圆板的动力解	132
第六章	厚壁球壳的粘塑性分析	140
§ 6.1	基本方程和弹塑性静力分析	140
§ 6.2	粘塑性厚壁球壳的准静力分析	146
§ 6.3	粘塑性厚壁球壳的动力分析	154
第七章	应力波	168
§ 7.1	一般概念	168
§ 7.2	特征线法	172
§ 7.3	弹性波	178
§ 7.4	粘弹性波	181
§ 7.5	一维粘塑性应力波	187
§ 7.6	拉普拉斯变换法	192
§ 7.7	用拉氏变换法解粘塑性应力波的传播	197
§ 7.8	受撞击柱体的变形	205
参考文献		209

第一章 预 备 知 识

在建立固体力学的理论时，无论是线性的或非线性的，都需要进行三个方面的研究，并用数学的形式表示出相关的规律，这就是：

- (1) 只与物体形状变化相关的几何或运动学的关系；
- (2) 物体平衡或运动状态的动力学方程；
- (3) 介质或材料的状态方程，即表现材料力学特性的本构关系。

前两者，均未涉及物体材料的力学特性，它们对一切连续介质的宏观运动都是适用的。但是，仅有它们还不足以描述所讨论材料的实际性能和建立固体力学中任一分支学科的理论，这在材料力学、弹性力学和塑性力学等门学科中都已表现得十分清楚。对于本书所要讨论的粘塑性理论来说，自然也是一样。因此，这第三方面的研究，即合理地建立材料的本构关系，便具有特别重要的意义，是我们讨论的重点问题之一。

本章的论述，主要是为学习粘塑性理论提供基本的预备知识。

§ 1.1 固体材料的力学特性

对介质的运动规律，其中包括固体的变形、流动和破坏规律的研究和认识，总是和试验分不开的。后面将会看到，对复杂应力状态下材料力学性能的描述，大都来源于简单应力状态的试验中所观察到的现象和结果，而这也正是本节所

要论述的主要内容。但应说明，在这里重要的不是重复叙述实验工作本身及其数值结果，而在于说明材料的变形条件和力学特征。

1.1.1 常温准静载下的应力-应变曲线

试验的一般条件是：应变率的量级为 $10^{-3}/\text{sec}$ 或更低，温度范围为 $20 \sim 30^\circ\text{C}$ ，试件标距内的截面上应为均匀单轴拉伸应力。

试验的结果，表示为拉伸应力-应变(σ - ϵ)曲线如图1.1中所示。在此， σ 与 ϵ 分别为工程应力与应变。图1.1(a)所示为铝、铜和冷轧钢等类材料的应力-应变曲线，它们从弹性到塑性变形之间，没有明显的屈服点，而是逐渐过渡的。对这类材料，通常以有0.2%的塑性应变时的应力作为屈服极限。图1.1(b)所示为退火低碳钢的应力-应变曲线，当弹性变形达到某一临界值时，即开始屈服而发生塑性变形。与A点所对应的应力为 σ_{s1} ，称为上屈服点。与B点所对应的应力为 σ_{s2} ，称为下屈服点。当应变达到C点时，材料对外载或

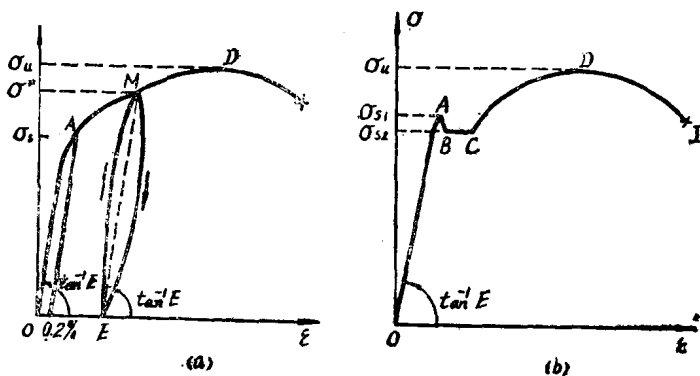


图 1.1

变形的抗力增强，而出现强化现象。实际上，在屈服变形阶段 BC 上应力是波动的，但可近似地看作与 ε 轴平行。而由 A 到 B 点的过渡变化，则是不稳定的，故应取 σ_{s2} 为这类材料的屈服极限。

我们将主要考察弹性和塑性变形这两个阶段的特性。实验表明，在充分近似的程度内可得如下结论。

(1) 弹性变形 应力应变关系为一直线 (OA)，一维应力状态下的这种线性关系，称为虎克定律，表示为：

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.1)$$

弹性变形是可逆的。在弹性变形阶段，在标距长度内，各截面的变形都完全相同，均质各向同性和均匀变形假设均成立，杨氏模量 E 和泊松比值 ν 是标志材料弹性变形特性的两个独立常数。

(2) 屈服极限 σ_s 是弹性变形终止和开始塑性变形的明确标志。自此，光亮的试件表面开始变暗，直到 D 点，随着变形的继续发展，应力值单调地增加，表现出稳定的塑性变形阶段。与 D 点对应的应力 σ_s 称为强度极限。此时，受拉伸性材料的试件，开始出现“颈缩”现象。试件由均匀变形而转向颈缩内的局部变形，截面迅速减小，发展到 I 点时便发生断裂。从 D 点到 I 点的塑性变形是非稳定的，应力状态已不是单轴应力。因此，一般工程应用上所谓塑性变形，指的是从屈服到强度极限这一段，其应力与应变之间的关系为 $\sigma = g(\varepsilon)$ ，是非线性函数。这一特点和塑性变形的不可逆性，是塑性与弹性变形之间的根本区别。

(3) 强化 在稳定的塑性变形阶段，材料对外载的抗力一般会随着变形的发展而增加，需要继续加载才能进一步产生塑性变形，这种现象称为材料的“应变强化”或“应变硬化”。测量经过塑性变形后的材料的硬度，就可发现，它

们是与应力-应变曲线上的纵坐标成比例而增大的。

(4) 加载与卸载 如试件在塑性状态的 M 点(图1.1(a))时,开始卸载,则变形将近似地按线性弹性规律沿与 OA 平行的直线 ME 进行,直至完全卸载($\sigma=0$),试件内有永久变形 ε^p 存在。若从 E 点开始重新加载时,试验表明应力-应变关系将近似地沿直线 EM 发展,至 M 点而又发生屈服。如图1.1(a)所示。就材料的变形历史而言,它与初始屈服不同,称为后继屈服。这种情况对于稳定的塑性变形阶段上任一点都适用。由此可见,材料的弹性常数,不会因塑性变形和强化的作用而改变,而且弹塑性变形时的总应变为弹性应变和塑性应变之和,即

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (1.2)$$

这里 ε^e 和 ε^p 分别表示弹性与塑性应变。不难看出,对于应变增量也有类似的关系,即

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (1.3)$$

同时,还应看到,在任何后继屈服点处,均有继续加载或卸载这两种可能的状态发生。因此,屈服准则和加载卸载条件的建立,对塑性理论的建立有着很重要的意义。

由于加载和卸载过程的存在及其本质上的差异,应力与应变之间的关系不是由现时值唯一确定的。如在图1.2中,对给定的应力 σ' ,可以有应变 ε' 、 ε'' 或 ε''' 等与其相对应,因此必须考虑以往的变形过程,即加载的路径或历史。这是塑性变形与弹性变形之间的又一重要差别。

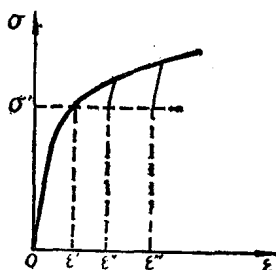


图 1.2

(5) 稳定与非稳定材料

考虑如图1.3中的应力-应变关系曲线。位于CD段上的 M_1 点，当有应力增量 $d\sigma > 0$ 时，因材料的强化相应的应变增量 $d\varepsilon > 0$ ，于是有功 $d\sigma \cdot d\varepsilon > 0$ ，如图中 M_1M_2N 的阴影部分所示。

以后称具有这种性能的材料是稳定的。但在强度极限以外的DI部分上，因 $d\sigma < 0$ ， $d\varepsilon > 0$ ，从而 $d\sigma \cdot d\varepsilon < 0$ ，称这种性能的材料为非稳定的。显然，在上屈服点，材料也是非稳定的。

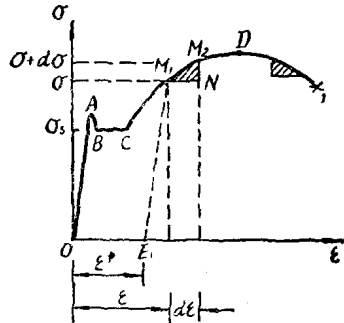


图 1.3

还可进一步包括加载和卸载过程在内来考察材料的稳定性。设在外力的作用下，材料的现有应力状态为 σ^0 ，现以此作为考察的起点，第一步加载到屈服点B，其应力为 σ （见图1.4）；第二步继续加载到 $\sigma + d\sigma$ 到C点， $d\sigma$ 为无限小的应力增量，与此相对应的塑性应变为 $d\varepsilon^p$ ；最后，由C卸载到D点，回复到起始应力 σ^0 。在此循环中，有塑性功

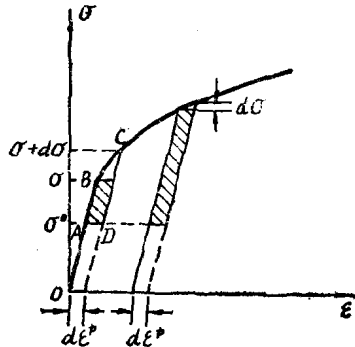


图 1.4

量，与此相对应的塑性应变为 $d\varepsilon^p$ ；最后，由C卸载到D点，回复到起始应力 σ^0 。在此循环中，有塑性功

$$(\sigma - \sigma^0)d\varepsilon^p > 0, \quad d\sigma d\varepsilon^p > 0 \quad (1.4)$$

如图1.4中的面积ABCD，容易看出，(1.4)式的关系，在后继屈服阶段也是成立的。这种根据有强化性质材料的单向拉伸实验结果所得出的定义和关系，在建立复杂应力状态下

的弹塑性变形理论中，得到了应用和推广，并称之为卓柯(D.C.Drucker)公式。

(6) 强化模量 由于具有应变强化性质的材料，其应力-应变曲线是凹向 ε 轴的，因此，其斜率为

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} < E \quad (1.5)$$

称为强化模量，为 ε 的单调减函数，其最小值为零(在强度极限时)。

(7) 各向均匀压缩 Bridgman对材料在各向均匀压缩下的性能作了大量的系统的实验研究，提供了可靠的结果。事实表明，绝大多数的固体材料在很高的静水压力作用下也不致发生塑性变形或破坏(多孔介质的情况除外)，而且体积应变很小，属于弹性变形。基于这种事实，人们有理由认为，金属的塑性变形是由剪应力的作用所引起的，与各向均匀压力无关，从而有

$$\varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p + \varepsilon_3^p = 0 \quad (1.6)$$

(8) 鲍辛格(J.Bauschinger)效应 除了铸铁、混凝土等材料之外，一般如软钢之类的金属材料，其拉伸和压缩时的屈服极限是相等的，如图1.5中的A和A'点所示。可是，当材料在受拉伸超过屈服点而达到B点时，再卸载到O'点，然后进行应力符号相反的压缩加载而达到并超过屈服点时，则得曲线O'B'C'。此时压缩屈服极限值为 $\sigma'_b < \sigma_s$ 。可见这时屈服极限是降低而不是提高了，

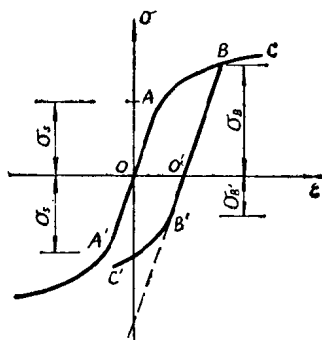


图 1.5

故是弱化而不是强化。这是由于拉伸强化所产生的对立效果。这种反向加载的弱化现象称为鲍辛格效应。它在确定材料的后继状态时是一个需要注意的重要问题。

(9) 应力-应变曲线的简化模型 实际的实验曲线的非线性性质, 对于复杂问题的分析带来极大的困难, 为了便于分析, 又能反映问题的主要特征, 则需要对实验曲线作一些简化处理, 一般常近似地用一条或几条直线段来逼近它。以下介绍几种常见的简化模型。

(I) 理想弹塑性模型 [图1.6(a)], 对于强化率较低的材料, 或变形范围在屈服平台之内时, 均可忽略应变强化的影响, 而视为无强化的弹塑性材料。

(II) 线性强化弹塑性模型 [图1.6(b)] 适用于应变强化较显著的材料。

(III) 刚塑性模型 [图

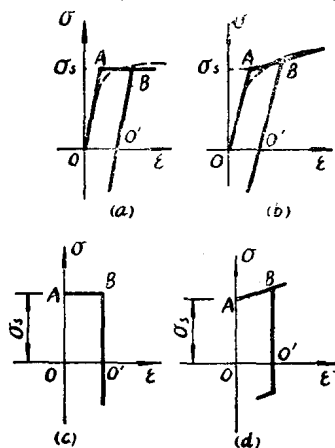


图 1.6

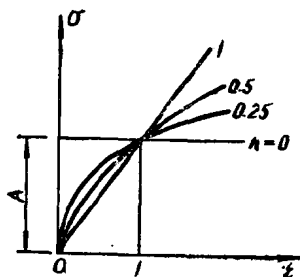


图 1.7

1.6(c)(d)] 当物体的塑性变形远大于弹性变形而可忽略后者时适用。只有当应力达到 σ_s 时才有变形发生, 而且完全是塑性的。若无强化效应存在, 则为理想刚塑性材料。如有线性强化效应存在, 则为线性刚塑性材料。

(IV) 幂强化模型(图1.7) 其应力-应变关系的形式为

$$\sigma = A\varepsilon^n, \quad 0 < n < 1 \quad (1.7)$$

式中, A 为常数。这种模型在应变较大时更为合理。

1.1.2 应变率的影响

应变随时间而变化的速率称为应变率, 它可表示为

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Delta l}{l_0} \right) = \frac{v}{l_0} \quad (1.8)$$

式中 v 为试件标距长度两端的相对伸长速度。图 1.8 所示为同种材料的试件在不同应变率下的试验曲线, 它表明材料的弹性常数 E 和 ν 基本上与 $\dot{\varepsilon}$ 无关, 这是由弹性振动频率和弹性波传播速度的测量以及静态试验结果所证明了的事实。但是, 在高应变速率下,

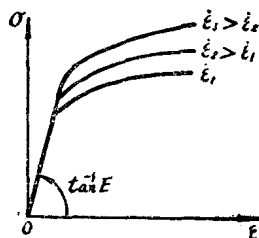


图 1.8

如塑性波传播试验所证明, 材料的屈服极限和强度极限均要增高, 特别是前者更为显著。因此, 在塑性动力学的问题中, 应考虑应变率对材料力学性能的影响, 而有如下形式的本构关系:

$$\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) \quad (1.9)$$

在动力 σ - ε 曲线方面的试验研究工作是大量的, 它的方法和技术日益发展和提高, 现在仍是一个很活跃的研究领域。图 1.9 中所示, 为哈丁、伍德和康贝尔 (Harding, Wood, Campbell) 等人的试验结果。(a) 为动力试验的应变率与应变的关系, (b) 是应力与应变的关系。图中 A 为静力试验曲线, B 为动力试验曲线, 数字表示时间 (微秒)。

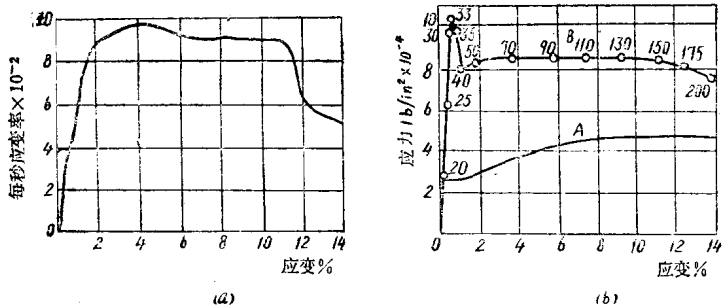


图 1.9

1.1.3 应力松弛

如试件被拉伸到某一变形时，即停止加载，而保持已有的变形不变时，实践证明随着时间的增长，试件内的应力将逐渐减低，而趋于某一定值，如图1.10所示。这种应力随时间而减小的现象称为应力松弛。有的材料，如钢材，只有在高温时这种效应才是明显的。有的材料，如铅、聚合物等，即使在室温下也有明显的应力松弛发生。

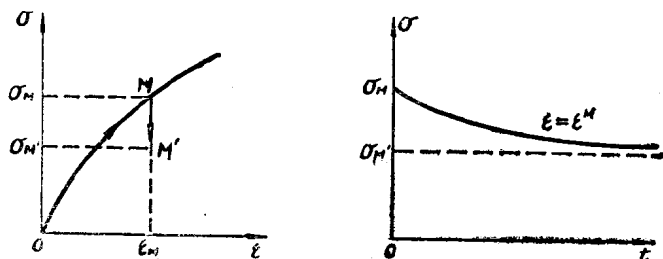


图 1.10

1.1.4 温度的影响

温度对材料力学性质的影响是多方面的。

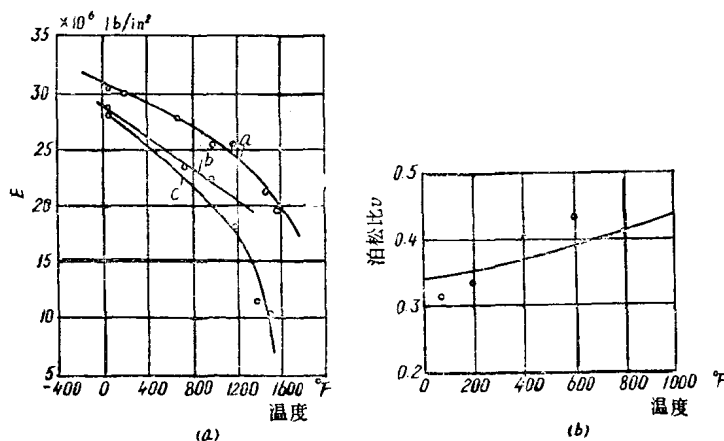


图 1.11

(1) 温度的变化对材料的弹性常数 E 与 ν , 屈服极限和强度极限均有影响。总的趋势是, 随着温度的升高, 屈服极限开始有些升高, 然后降低, 强度极限的降低则更快。

温度对材料弹性模量 E 的影响, 如图 1.11 (a) 所示, 对泊松比 ν 的影响如图 1.11 (b) 所示。

图 1.12 中给出了两种商品钛合金的屈服极限随温度变化的曲线。

(2) 温度对材料动力性能的影响, 一般而言, 极限强度将随加载速率的提高而提高, 同时随温度的增高而降低。一种退火的商品纯铜的试验曲线如图 1.13 所示。

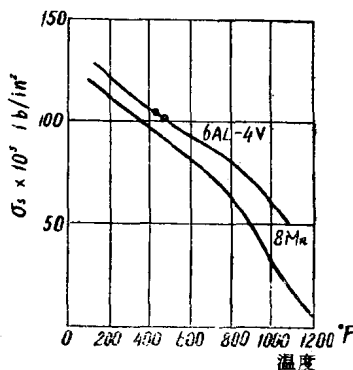


图 1.12