数 学

（下 册）

何炜元 主编

本教材列入

中国——联合国儿童基金会幼儿师资培训项目

90——94 周期 1993 年软件项目活动

内蒙古大学出版社

幼儿教师培训教材

幼儿园教师进修教材

数　学

下　册

何炜元　主编
秦学城　贾美娥　编著

内蒙古大学出版社

数　　学（下册）
何炜元　主编

内蒙古大学出版社出版发行
（呼和浩特市大学西路1号）
内蒙古自治区新华书店经销
内蒙古军区印刷厂印刷
开本：787×1092/16 印张：7.5 插页： 字数：180千
1996年1月第1版 1996年1月第1次印刷
印数：1—3000册

ISBN 7—81015—477—X/O·50
定价：8.00元

目　录

第一章　整　　数

教学要点：了解数的二进制；掌握自然数的意义；熟练掌握十进数的读法和记法。

第一节　整数的认识

一、自然数

1、自然数的产生　自然数是在人类的生产劳动和生活实践中，根据物体计数的需要，经过漫长的历史阶段而逐渐产生的。在数的概念尚未确立之初，人们只是通过物体之间逐个对应的方法进行比较，来判断采集到的果实够不够分，劳动工具够不够用，并在多次反复的比较中逐渐形成了多和少的概念，“有”和“无”的概念。

随着生产的发展，人们对各种物体进行比较的活动日益增多，进而逐渐认识到有许多物体集合可以一一对应。例如，一个人的眼睛和他的手、脚、耳朵的个数是同样多；一个人的手指和脚趾的个数是同样多；等等。人们进一步把这些同样多的物体集合归为一类（就是现在所说的等价集合类），并从中选出一个大家最熟悉、最方便、又不易变化的集合做为代表，来表示这一类物体集合数目的多少。例如，用两只眼睛表示两只鹿、两块石头等；用五个手指表示五匹马、五棵树等。这种被选作代表的集合，我们现在叫它为标准集合，而当时的标准集合只是用做形象地表示数目多少的一种方法，还没有从物体集合中把数抽象出来。

后来，随着生产的发展，产品间的交换越来越频繁，人们在世世代代反复应用标准集合来表示多少的过程中，逐渐用符号替代标准集合来表示物体数目的多少。这样，就把数从具体物体的集合中抽象出来，形成了数的概念。因此，自然数是一切等价的非空有限集合的标记。由于这些历史原因，所以直到现在，有些数的名称还采用着标准集合的名称。例如，至今有的民族语言中仍然保留着这种痕迹：用“一只手”的声音表示五，用“两只手”的声音表示十。

随着人类语言和文字的发展，人们逐渐创造了符号、赋予了声音来表示、叙说这些抽象出来的数，出现了一、二、三、四、五、……，自然数也就产生了。

2、自然数的意义　从自然数的产生过程可以看出，一个自然数是一类等价的非空有限集合的标记，它表示非空有限集合中的元素的个数。例如，当我们说某班共有四十名学生时，这里面的四十就表示由该班所有同学所组成的集合中所含元素的个数。另一方面，自然数还可以用来给集合中的元素编号，表示某个可数集合中每个元素的排列顺序。例如，当我们说某

班在学校举办的的春季运动会中获得团体总分第二的时候，这里面的二就表示该班在由所有获奖班级所组成的集合中，它的排列顺序是第二位。因此，自然数有两个含义：

一个数用来表示集合中元素的个数时，叫做基数；

一个数用来表示集合中元素的排列顺序时，叫做序数。

如果我们让一队学生从排头开始报数，最后一名学生报出的数是“四十”，那么“四十”这个数，既可表示这队学生共有四十人，也可以表示最后这名学生是排在第四十这个位置上。前一个“四十”用的是基数的含义，后一个“四十”用的是序数的含义。

3、**自然数列及其性质** 把自然数按着由小到大的顺序排列起来，就得到一列数：

一、二、三、……

由全体自然数依次排列成的一列数叫做自然数列。

由自然数列的构成可以看出，自然数列有如下三条性质：

(1) 自然数列是有始的。“一”是自然数列最前面的一个数；

(2) 自然数列是有序的。在自然数列里，每一个 自然数的后面都有且只有一个相邻的后继数，而且除“一”外，每一个自然数的前面都有且只有一个先行数（即紧接在它前面的一个数）；

(3) 自然数列是无限的即自然数列里没有最后的一个自然数。

根据自然数列的上述性质，就可以对自然数进行大小的比较：

在自然数列中排在后面的数，比它前面任何一个数都大，而排在前面的数，比它后面任何一个数都小。

“一”是最小的自然数，是自然数的单位，有时也称单位一。

4、**数数** 如果我们要知道一个非空有限集合里元素的个数，就要数数。数数的过程就是把要数的那个集合里的元素，与自然数列里从“一”开始的自然数，建立起一一对应。此时，所用的自然数列里的数用的是基数的含义。

如果我们要知道一个可数集合中某个元素所处的位置，也要数数，但此时所用的自然数列里的数用的是序数的含义。因此，数数的实质就是建立一一对应。

二、零和扩大的自然数列

1、**零** 自然数是由于计数的需要而产生的，但在实践中，经常遇到没有物体的情况，例如教室里一个桌子也没有，书架上一本书也没有，而如果我们把教室里的桌子或者书架上的书也都作为集合来看待，那么这两个集合都是空集。为了表示这类集合的共同特征，数学中引进了一个新的数“零”，用它来表示空集的基数。所以“零”作为一个数，通常的意义是表示“没有”。零不是自然数，它比任何自然数都小。

“零”作为一个单独的数，不仅可以表示没有，还可以作为某些数量的界限。例如，数学中引进负数后，正数和负数的分界点就用“零”来表示。比零大的数为正数，比零小的数为负数，零既不是正数也不是负数。在数轴上，用零表示原点。按通常规定，数轴水平放置，原点为零，从原点起向右为正，向左为负，如图 1—1。

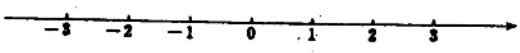


图 1—1

在摄氏温度计上，把水在标准大气压结冰的温度定为零摄氏度，并把这一温度作为零上温度和零下温度的分界。

“零”作为某些数量界限的同时，自身也具有确定的意义。例如温度是零度，并不是“没有”温度，而是通常情况下水结冰的温度，所以“零”是一个有完全确定意义的数。

2、扩大的自然数列 由自然数的意义我们可以知道，任意一类等价的非空有限集合的标记都可以用自然数列中的某一个自然数来表示，但还有一类集合的标记是不能用自然数来表示的，这类集合就是空集。由于空集里没有元素，所以它的标记是零。

如果我们把零放在自然数列前面，那么就形成一个新数列：

零，一，二，三，……

显然，任意一类等价有限集合的标记都可以用这一数列中的某一个数来表示。这个数列叫做扩大的自然数列。

扩大的自然数列中的每一个数都是整数。在本章及以后有关速算各章的叙述中，所说的“整数”、“数”，如无特殊说明，均指扩大的自然数列中的数。

扩大的自然数列也具有有始、有序、无限这三条性质。

第二节　整数的读法和记法

一、十进制命数法

在人类社会初期，涉及计数的物体较少，因而只有几个较小的数。后来随着生产力的发展，人们在生产生活实践中所接触的数越来越大，如果给每一个数都起一个独立的名称，对每一个数都用一个独立的符号来表示，不仅不方便，而且也不可能办到。为此，在人类文化发展的最初阶段，世界上不少民族都创立了一些符号和法则来表示自然数。慢慢地，随着人们认识的提高和文化交往的增多，逐渐形成了一些进位制，如五进制，十进制，十六进制等等。

或许是由于人们常用十个手指来计数的缘故，世界上许多民族大都采用“满十进一”的十进制。

按照“满十进一”的法则，我国是这样给自然数命名的：对于自然数列的前九个数，各给一个单独的名称，即：一、二、三、四、五、六、七、八、九；再按照满十进一的十进制原则，十个一给一个新的名称十，十个十给一个新的名称百，依此类推，十个百叫做千，十个千叫做万；万以上的计数单位则不是满十逐一给以新的名称，而是十个万叫做十万，十个十万叫做百万，十个百万叫做千万，十个千万再给一个新的名称叫做亿；亿以上的计数单位有十亿、百亿、千亿、兆、十兆、百兆、千兆，等等。这样，每四个计数单位组成一组，个、十、百、千叫做个级，万、十万、百万、千万叫做万级，亿、十亿、百亿、千亿叫做亿级，兆、十兆、百兆、千兆叫做兆级，等等。

世界上许多国家的命数法不是四位一级，而是三位一级。十个千不是象我国给一个新的名称万，而是就叫做十千，到千千才给新的名称，叫做密。从低到高的计数单位依次是：个、十、百是个级；千、十千、百千是千级；密、十密、百密是密级，等等。

二、十进制记数法

1、阿拉伯数字 创造一些符号，确立一种法则，从而把每一个自然数都表示出来的方法叫做记数法。世界上许多民族在其文化发展的历程中，都形成了各自的记数方法和记数符号，我们把用于记数的符号叫做数字或数码。

阿拉伯数字是当今国际通用的数字，它起源于印度，公元八世纪传入阿拉伯和我国，约十二、十三世纪又传入欧洲，被欧洲人称为阿拉伯数字，以后逐渐推广到世界各国。阿拉伯数字共有十个：1、2、3、4、5、6、7、8、9、0。

自然数列最前面的九个数，分别用阿拉伯数字前面的九个数字来表示，零用“0”来表示。

用阿拉伯数字记数是把所用的数字排成一横行。右边第一位上的数字表示几个一，这一位叫做个位；第二位上的数字表示几个十，这一位叫做十位，以下依此类推。个位、十位、百位、……统称为数位。

整数数位顺序表

数位名称	……	千百十 亿亿亿亿 位位位位	千百十 万万万万 位位位位	千百十个 位位位位
计数单位	……	千百十 亿亿亿亿	千百十 万万万万	千百十一
级		亿级	万级	个级

2、位值原则 这种记数法，是通过每一位数字所在的位置来给出该位数字的计数单位的。例如 222，右边的 2 在个位上，表示两个一；中间的 2 在十位上，表示两个十；左边的 2 在百位上，表示两个百。所以 222 表示二百二十二。由此可见，同一个数字，由于它所在的位置不同，它所代表的数值就不同，也就是说，每个数字除了它本身所表示的数值之外，还有位置值。这种记数原则叫做记数的位值原则。

3、三位分节法 写数的时候，按照位值原则，从左到右，即从高位到低位顺次写出各个数位上的数字。如果该数在某一数位上一个计数单位也不含有，那么就在这一数位上写“0”。例如：

二万七千六百四十一，写作：27641；

三千零六，写作：3006。

用几个数字（可以相同）所写出的数（最左端的数字不是零），就叫做几位数。两位和两位以上的数，通常又称为多位数。

由于世界上许多国家都是按三位一级的原则给自然数命数，所以在书写时，采用的是三位分节法。即从个位向左每三位分成一节，节与节之间用逗号隔开（也有的把间隔拉大一些）。例如：

五万零四百六十，写作：50，460（或 50 460）。

三十二亿七千四百万零二，写作：3，274，000，002（或 3 274 000 002）。

我国本来是按四位一级命数的，虽然三位分节方法对我们迅速准确地读写整数带来一定的影响，但由于三位分节法已在国际上通用，为和国际保持习惯上的一致，并取得全国统一，所以我国规定数字的分节方法也采用三位分节法。

三、十进制读数法

把一个用阿拉伯数字按照位值原则写出来的数，利用十进制计数单位的名称读出来的方法，叫做十进制读数法。

按照四位一级的命数方法，我国的读数法则是：除个级外，其余各级的级名只在这一级的末尾读出；读个级要按照从左到右的顺序依次读出各个数位上的数字及数位名称；个级以外的各个数位上的数字，也要按照从左到右的顺序依次读出；一个数末尾的“0”不读出来，每一级末尾的“0”也不读出来；其它数位上不管连续有几个“0”，都只读一个零。例如：

345，读作：三百四十五。

1986，读作：一千九百八十六。

845，769，231，读作：八亿四千五百七十六万九千二百三十一。

58，000，读作：五万八千。

205，200，读作：二十万五千二百。

30，080，050，读作：三千零八万零五十。

5，000，806，000，读作：五十亿零八十万六千。

第三节　中国数字和罗马数字

除国际通用的阿拉伯数字外，比较常用的还有中国数字和罗马数字。

一、中国数字

中国数字是我国通用的记数符号，有大写、小写、数码三种。

大写数字：零，壹，貳，叁，肆，伍，陆，柒，捌，玖，拾，佰，仟，万，亿等；

小写数字：0，一，二，三，四，五，六，七，八，九，十，百，千，万，亿等；

数码：0，1，‖，　，x，y，⊥，$\overline{\perp}$，$\overline{\overline{\perp}}$，∸，十等。

数码现在已经很少用到，大写数字也只是财政或商业部门在开具票证时，为了防止涂改，才加以使用。而小写数字却比较常用，通常出现在需要用汉字写数的语言中。例如，“某班有四十二名学生”，这里面的四十二就是用小写数字来表示的。

如果一个数含有三个万，四个千，二个百，八个十和七个一，那么这个数用小写数字就

写作三万四千二百八十七；反过来，二千六百一十七所表示的数是二个千，六个百，一个十和七个一的和。

二、罗马数字

罗马数字是罗马人所创造的记数符号，基本的有七个：Ⅰ（一），Ⅴ（五），Ⅹ（十），ι（五十），C（一百），D（五百），M（一千）。这些数字不管处于怎样的位置，它们各自所代表的数是不变的。

罗马数字的记数方法是把几个罗马数字写成一列，按照从左到右的顺序，先写表示较大的数的数字，后写表示较小的数的数字，把这些数字所表示的数加到一起，就是这一列数字所表示的数。例如，ιⅩⅠⅠⅠ所表示的数是六十三，MMDCCⅤ所表示的数是二千七百零五。当需要连续写出四个相同数字时，罗马记数原则规定：把需要这样写的数用两个数的差来表示。即把表示较小的数的数字写在左边，表示较大的数字写在右边，而这两个数的差就表示所需要表示的数。例如，Ⅳ表示四，Ⅸ表示九，Ⅹι表示四十，ⅩC表示九十；CD表示四百，CM表示九百，等等。

下面是用罗马数字所写出的较大的数的例子

ⅩⅩⅩⅤⅠⅠ（37）；CDⅩⅩⅠⅩ（429）；MιⅠⅤ（1054）；MMMDCⅩⅩⅤⅠⅠⅠ（3678）。

第四节　其它进位制

一、进位制的一般概念

在计数制度中，除“满十进一”的十进制外，有的民族还曾采用过“满十二进一”的十二进制和“满六十进一”的六十进制等。现在在某些方面仍然保留着十二进制和六十进制的痕迹。例如，有些商品十二个是一打，十二打是一罗；在时间单位方面，六十秒是一分，六十分是一小时。

1、底数　在一种进位制中，某一单位满一定个数就组成一个相邻的较高的单位，这个一定个数叫做这种进位制的底数。例如，十进制的底数是十，八进制的底数是八。进位制的底数可以是1以外的任何自然数。

每一种进位制都可以按照位值原则来记数，由于它们的底数不同，因此所用数字的个数也不同。例如，十进制要用0～9十个数字，而二进制只用0，1两个数字；十二进制要用包括0在内的十二个数字。一般地，K进制要用0～K－1共K个数字。

用几进制写出的数，我们就简称它是几进数 。现在人们广泛使用的是用十进制写出的十进数。为了区分不同的进位数，除十进数外，在书写其它进位数时，常在数的右下角注出进位制的底数。例如，八进数736记为736_8；二进数1101记为1101_2，等等。

2、计数单位　由于不同进位制的底数不同，所以不同进位数的计数单位也不同。例如，“满十进一”的十进数的计数单位是一，十，百，千，……，也就是10^0，10^1，10^2，10^3，……，十进数432所表示的数为：$432=4\times10^2+3\times10^1+2\times10^0$；而“满五进一”的五进数的计数单

位是5^0，5^1，5^2，5^3，……，五进数432_5所表示的数为：$432_5=4\times5^2+3\times5^1+2\times5^0=117$。

一般地，K（K>1，K∈N）进数的计数单位是K^0，K^1，K^2，K^3，……，任意一个K进数都可以写成各计数单位与该数位上数字乘积之和的形式，即：

$$\overline{a_na_{n-1}\cdots\cdots a_2a_1}_{(k)}\qquad(k>1,\ k\in N)$$
$$=a_nk^{n-1}+a_{n-1}k^{n-2}+\cdots\cdots+a_2k^1+a_1k^0$$

其中字母上面的横线表示此数是按照位值原则写出的数，右下角的k表示此数是k进数，a_1、a_2、a_3、……、a_{n-1}、a_n是该数各个数位上的数字。不难看出，这里$a_n\in\{1,2,\cdots\cdots,K-1\}$，而$a_{n-1}$，$a_{n-2}$，……，$a_1$是集合$\{0,1,2\cdots\cdots,K-1\}$中的元素。

二、二进数及二进数与十进数的互化

1、二进数 由于二进制的底数是2，所以二进数的表示只用0和1两个数字。例如，零写作0_2，一写作1_2，二写作10_2，三写作11_2，四写作100_2，五写作101_2，六写作110_2，七写作111_2，八写作1000_2，等等。

由于0和1这两个数字很容易用通电和断电两种状态来表示，因此，用若干组电路的通、断，就可以表示出任意一个二进数，并且能进行四则运算，所以二进数被广泛应用于电子计算机。

因为二进制记数的原则是"满二进一"，所以从右到左，二进数各个数位的计数单位依次是：2^0，2^1，2^2，……。例如，对于二进数110110_2来说，左边第一位的1表示1个2^5；第二位的1表示1个2^4；第三位的0表示零个2^3；第四位的1表示1个2^2；第五位的1表示1个2^1；最后一位的0表示零个2^0。因此，$110110_2=1\times2^5+1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0=32+16+0+4+2+0=54$。

也就是说，二进数110110_2所表示的十进数是54。

2、二进数与十进数的互化 要想把二进数化成十进数，只需把这个二进数写成各计数单位与该数位上数字乘积之和的形式，再按照十进制的计算法求出结果即可。

为了寻求把十进数转化成二进数的方法，我们来看这样一个例子。依上述方法可得：

$110111_2=1\times2^5+1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$

$\qquad=55$

亦即：$55=1\times2^5+1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$

$\qquad=2\ (1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0)\ +1$

如果令$m=1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$，则上式变为：$55=2m+1$…………（1）

由于m是自然数，所以（1）式说明，把55化成二进数的最右边一位上的数字是2除55的余数。

$\because m=1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$

$\therefore m=2\ (1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0)\ +1$

如果令$m_1=1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$，那么上式变为：$m=2m_1+1$…………（2）

由于m_1是自然数，所以（2）式说明，把55化成二进数的右数第二位上的数字是2除m的余数。

如果我们对 $m_1=1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$ 这个式子类似地研究下去，就会得到这样一个结论：要把一个十进数化成二进数，用底数 2 去除这个十进数，所得的余数是二进数的右数第一位数；第二次用 2 去除第一次除得的商，所得的余数是二进数的右数第二位数；第三次用 2 去除第二次除得的商，所得的余数是二进数的右数第三位数，……，继续除下去，直到商 0 余 1 为止，最后所得的余数就是二进数最左边的一位上的数。

例 1　把 79 化成二进数。

解：$79\div2=39\cdots\cdots1$（余数 1 是所求二进数的右数第一位数字）

$39\div2=18\cdots\cdots1$（余数 1 是所求二进数的右数第二位数字）

$19\div2=9\cdots\cdots1$（余数 1 是所求二进数的右数第三位数字）

$9\div2=4\cdots\cdots1$（余数 1 是所求二进数的右数第四位数字）

$4\div2=2\cdots\cdots0$（余数 0 是所求二进数的右数第五位数字）

$2\div2=1\cdots\cdots0$（余数 0 是所求二进数的右数第六位数字）

$1\div2=0\cdots\cdots1$（余数 1 是所求二进数的最左边一位数字）

通常用竖式计算：

$$\begin{array}{r|ll} 2 & 79 & \\ \hline 2 & 39 & \cdots\cdots\cdots 1 \\ \hline 2 & 19 & \cdots\cdots\cdots 1 \\ \hline 2 & 9 & \cdots\cdots\cdots 1 \\ \hline 2 & 4 & \cdots\cdots\cdots 1 \\ \hline 2 & 2 & \cdots\cdots\cdots 0 \\ \hline 2 & 1 & \cdots\cdots\cdots 0 \\ \hline & 0 & \cdots\cdots\cdots 1 \end{array} \Big\uparrow$$

按箭头的顺序写，就得：

$$79=1001111_2。$$

这种方法通常叫做“二除取余法”，但在书写二进数时要注意数字的顺序恰好和除的顺序相反。

三、二进数的四则运算

二进数的四则运算和十进数的四则运算在法则上基本相同，只是用“满二进一”来代替“满十进一”。运算时要先熟悉两个一位数相加和相乘的结果。

一位数加法：	$0+0=0$	一位数乘法：	$0\times0=0$
	$0+1=1$		$0\times1=0$
	$1+0=1$		$1\times0=0$
	$1+1=10$		$1\times1=1$

应用上述结果就可进行多位数四则运算。

例如：

$$\begin{array}{r} 10110 \\ +\ 1101 \\ \hline 100011 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10110 \\ -\ 1101 \\ \hline 1001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10110 \\ \times\ \ 101 \\ \hline 10110 \\ 10110\ \ \\ \hline 1101110 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1101 \\ 110\overline{)1001110} \\ \underline{110} \\ 111 \\ \underline{110} \\ 110 \\ \underline{110} \\ 0 \end{array}$$

思考与练习

1、把自然数从事物的集合中抽象出来，主要经过了哪几个阶段？其标志是什么？

2、举例解释自然数是一类等价的非空有限集合的标记。

3、下面的数哪些是基数？哪些是序数？

（1） 到 1993 年 10 月 1 日我国建国就整整 44 年了。

（2） 5 时 20 分发车，发车前 30 分钟检票。

（3） 第 3 行从前头数到第 5 个人是小李，再往后数 3 个人就是小王。

（4） 某班点名册最后一名学生的学号是 42 号。

4、自然数列和扩大的自然数列的性质有何区别？

5、零是一个什么样的数？试说明它的含义。

6、用阿拉伯数字记数与用罗马数字记数有什么根本不同？

7、下列用罗马数字所写出的数，各表示多少？

XVI，XXXVII，XIII，CCVI，XIX，XVIX，XCV，MDCII。

8、用罗马数字写出下列各数。

28，65，82，39，99，1450。

9、儿童学写数时，常把十一写成“101”，这在知识上是因为哪些问题没弄清楚？你在实际工作中是怎样处理这类问题的？

10、写出下列各数：

（1） 三百七十万八千九百零五；

（2） 五千二百万零二十；

（3） 六十亿零五十；

（4） 最大的五位数和最小的四位数。

11、读出下列各数。

(1)　23049712；　6041007853；　49086500070。

(2)　47，825，473；　8，527，000，040；　10，700，303，040。

12、根据位值原则写十二进数要用多少个数字？十二进制的计数单位是多少？

13、把下列二进数化成十进数。

111_2，　10110_2，　1101011_2，　1000110_2。

14、用二除取余法把下列十进数化成二进数。

67，　59，　43，　84，　127。

15、计算。

(1)　110111_2+111_2，　(2)　110001_2-111_2；

(3)　$1001_2\times1110_2$，　(4)　$100011_2\div111_2$。

16、参照二进数和十进数的互化，怎样进行八进数和十进数的互化？

附　录

关于整数的一些历史资料

最初人类没有数的概念。后来，人们在狩猎、捕鱼和采集果实的劳动中，常常需要判断工具或获得的果实够不够分，这样，就逐渐形成了“多、少”的概念。以后随着生产的发展，人们需要对物品进行数量的比较，数的概念才开始萌发。

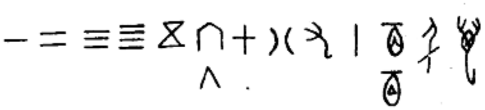
数的初步概念早在有史以前就已经产生了，但是，它的发展经历了一个漫长的过程，进展是相当迟缓的。起初，人类只能把一个物体和多个物体区分开。慢慢地，人类能把一个物体、二个物体和多个物体区分开。至于三个，人类已经认为是多了。直到今天，我们还用“再三”来表示多次。目前世界上还有一些不发达地区的民族的语言，只有头几个自然数的名称，有的只有头两个数的名称，即一和二，把这两个数配合起来才组成三（二一一），四（二一二），五（二一二一一），六（二一二一二）；大于六的数就说“很多”。这也说明，经过很长一段时间，人类才逐渐能区分开数量稍大一些的物体。

人类能区分开数量不大的物体，是原始的计数形式。这时还没有把数与具体物体的集合分离开来，只是用彼此等价的集合中的一个集合，作为代表来指明这一类集合的物体个数。例如，在某些民族中，把和“月亮”这个集合等价的一类集合用“月亮”集合作为代表；把和“一个人的耳朵”这个集合等价的一类集合用“一个人的耳朵”集合作为代表。随着生产和经济活动的复杂化，人类开始利用手指来表示没有名称的数。但是，“屈指可数”的数目毕竟是极为有限的，当多到屈指难数的时候，人类就利用周围的物体来作为数数的工具。例如，在树木、木棒上刻痕，在绳上打结，把石子放成一堆等。

经过了很长的时期，人类才渐渐地把数与具体物体的集合分离开来，产生了数的名称。早期出现的数的名称往往就是帮助数数的那些物体的名称。现在有的民族的语言中仍保留着这样的痕迹，如用“一只手”的声音表示“五”，以后随着文字的出现，进一步产生了数字符号。各民族曾经采用过不尽相同的数字称号。

据记载，最早的书写数字符号大约起源于五千年以前的巴比伦和埃及。两地虽然相距很远，但两地的数字符号系统似乎是用同样的方式建立的——在树木或石块上刻痕记印来记录流逝的日子。埃及的祭司在一种用水生植物的茎撕成薄片制成的纸草上写字，而巴比伦的祭司则是在写在松软的泥板上，两地的人都是用少数象形的符号来表示需要书写的数。例如，埃及的象形数字符号是：|表示一，∩表示十，𓍢及𓍢表示一百，以及表示更大单位的其他符号。介乎其间的各数则由这些符号组合而成，书写方式是从右往左，如||||∩∩表示 24，这套数字的写法是以十为底的，但并不按照位值原则，又如，巴比伦的楔形数字符号是：𒁹表示一，𒌋表示十，这套数字的写法是以六十为底的，较大的𒁹表示六十；如𒌋𒐖表示 12，𒁹𒌋表示 70。

我国用文字记数也很早。在河南发现的殷虚甲骨文中有很多记数的文字，说明早在三千多年前人们已经能用一、二、三、四……、十、百、千、万等记数，并且采用十进制，只是文字的形体和后来的有所不同。下面是甲骨文的十三个记数单字：



一　二　三　四　五　六　七　八　九　十　百　千　万

以后几经演变，才和现代的汉字相同。

后来用算筹记数。筹是一些几寸长的竹签（也有骨制的或木制的），也叫做筹码。古代的数学家就用这些竹签摆成不同的形式来表示不同的数目，并进行各种计算。算筹记数出现的年代已不可考。司马迁《史记》（约公元前 104——91 年成书）《高祖本纪》载："夫运筹帷幄之中，决胜于千里之外。"可见在公元前二、三世纪，算筹的运用已达到相当熟练的地步。

用算筹记数有纵横两种形式：

纵式：𝍠　𝍡　𝍢　𝍣　𝍤　𝍥　𝍦　𝍧　𝍨

横式：𝍩　𝍪　𝍫　𝍬　𝍭　𝍮　𝍯　𝍰　𝍱

算筹记数采用位值原则，而且是十进制。记数时纵、横交替使用，个位一般用纵式。例如六千七百二十八，就记成 𝍮𝍦𝍪𝍧，空一格的地方就表示零。

我国古代早已有大数的记法。秦（公元前二世纪）以前，万以上的计数单位已有亿、兆、京、垓、秭、穰……等，都是十进，即十万为亿，十亿为兆，十兆为京，……汉以后改为万进，即万万为亿，万亿为兆，……但《数术记遗》（公元六世纪著作）中又说为万万进，以后数学家多用万万进。因此一直到近代，万以上计数单位的进率没有统一的用法。

大约在二千三百年以前，古希腊人开始用字母符号来表示数。例如，α 表示 1，β 表示 2，γ 表示 3，ι 表示 10，κ 表示 20，ρ 表示 100；等。例如，$\iota\alpha=11$，$\iota\beta=12$，$\kappa\alpha=21$。大约在同一时期，罗马人也开始使用数字符号，他们仍然用单划表示一到三的数字，而使用字母形式的新称号来表示五、十、五十等。直到现代还保留着字母数的一些痕迹。例如，我们今天还常常用字母数来标记文章或报告中各个"条款"的次序。

公元初，中美洲的马雅人所用的数字符号，和欧、亚、非的方式完全不同。他们采用二十进位制记数，只用三个符号就可以写出任何数。用 · 表示一，——表示五，表示零。这样，用点和横就可以表示一至十九的数。例如，用$\overset{\cdots}{=}$表示 13。20 是一个新的计数单位，但是再往后的计算单位不是 20^2，20^3，20^4，……，而是 20×18，$20^2\times18$，$20^3\times18$……这是由 360