非线性动力系统的动态分析

张伟江 · 杨升荣 编

FEIXIANXING DONGLI XITONG DE DONGTAI FENXI

上海交通大学出版社

工科博士生教材丛书之一

非线性动力系统的动态分析

张伟江　杨升荣　编

上海交通大学出版社

内 容 简 介

本书包括了非线性微分方程动力系统的简化，非线性微分方程动力系统的一般性研究，局部分叉，全局分叉，浑沌等内容。并介绍了中心流形，范式理论，不动点与周期解等。

本书可作为工科博士生的教材，作为研究非线性动力系统的入门，也可供生物、物理、力学、化学等有关方面科学技术人员参考。

责任编辑 冯 愈
封面设计 刘 纬

非线性动力系统的动态分析
张伟江 杨升荣 编
上海交通大学出版社·出版
（上海市华山路1954号 邮政编码200030）
新华书店上海发行所·发行
常熟文化印刷厂·印刷
开本：850×1168(毫米) 1/32 印张：3.75 字数：99000
版次：1996年4月 第1版 印次：1996年5月 第1次
印数：1—800
ISBN 7-313-01441-4/TK·045 定价：3.80元

序　言

本书编写的目的就是为已经学习过线性代数、常微分方程及泛函分析初步的工科博士生提供一本可了解和学习非线性动力系统理论和方法的教材。

教材中我们选择了非线性动力系统理论中比较重要的内容，但又不追求包罗万象的综合。例如，中心流形理论、范式理论、精确线性化方法、结构稳定性、局部分叉、全部分叉和浑沌等内容都是近年来非线性理论研究中重要的方法和内容。考虑到博士生的自学能力以及众多工科专业的不同侧重，本教材中许多处都不再复述在其他专著中可查阅的论证过程，而将最主要的结果展现给读者，从而使本教材简洁而观点清楚。

当今，在许多学科中非线性系统的研究都成了主要的方向，例如非线性控制系统鲁棒设计，非线性微分方程数值求解，化学反应过程中动态分析及仿真，生命科学中的大量非线性现象的机理分析等等。本书介绍给博士生学习之用，并安排作为可供36学时的教材，就是希望博士生在从事各自学科的研究中获得启示，开展交叉学科的研究。

对博士生而言，掌握当代最新的理论与技术是十分重要的。然而由于众多的数学专著令他们望而却步。对一名数学工作者而言，传播现代数学知识并为工程技术人员提供可读性强的教材是两项并重的任务。本书从编排和叙述方面都注意到这两方面的要求。希望能被博士生们接受。

由于水平有限，且希望精述内容、多留思考的尝试经验不足，难免有许多缺点，欢迎读者批评指教。

张伟江　杨升荣

1995年3月于上海交通大学

目　录

第一章　非线性微分方程动力系统的简化

当我们在研究非线性微分方程动力系统时，很自然地期望有一些有效的方法使原系统线性化、降阶或简化，并能保持原系统的动态特性。本章作为本书的第一个引入，将叙述中心流形、范式、奇异摄动及精确线性化的基本内容。

§1.1　中心流形

1.1.1　中心流形的基本理论

本节考虑以下形式的非线性微分方程系统：

$$\begin{cases} x' = Ax + f(x, y), \\ y' = By + g(x, y), \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^m$，假定 A 和 B 分别是具有相应维数的常数矩阵，并且 A 的所有特征值具有零实部，B 的所有特征值具有负实部。函数 f 和 g 关于其变量皆二阶连续可微，且 $f(0, 0) = 0$。$g(0, 0) = 0$；$f'(0, 0) = 0$, $g'(0, 0) = 0$（注：f' 和 g' 是它们各自的雅可比矩阵）。

定义　一个集合 $S \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ 被称为系统(1.1.1)的局部不变流形(Local Invariant Manifold)是指，对任何的 $(x_0, y_0) \in S$，系统(1.1.1)的初始值为 $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ 的解 $x(t)$ 始终在集合 S 内，其中 $|t| < T$，T 为某正数。进而，如果 $T = \infty$，那末 S 就称为不变流形(Invariant Manifold)。

定义　如果 $y = h(x)$ 是系统 (1.1.1) 的一个不变流形，并且

$h(x)$ 为光滑函数，$h(0)=0$，$h'(0)=0$，那末它被称为中心流形(Centre Manifold)。

对于系统(1.1.1)，我们有：

定理 1.1.1 对系统(1.1.1)而言，若 A, B, f 和 g 满足假设条件，那末存在一个中心流形 $y=h(x)$，其中 $|x|<\delta$(δ 为某一个正数)，且 $h\in C^2$。

证 令 $\psi: \mathbf{R}^n\to[0, 1]$为 C^∞ 函数，取值为

$$\psi(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|\geqslant 2。\end{cases}$$

又设

$$F(x, y)=f\left(x\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), y\right),\ G(x, y)=g\left(x\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), y\right)$$

其中 $\varepsilon>0$。

首先，将证明系统

$$\begin{cases}x'=Ax+F(x, y),\\ y'=By+G(x, y),\end{cases}\tag{1.1.2}$$

有一个中心流形 $y=h(x)$, $x\in\mathbf{R}^n$, ε 充分小。

让 $p>0$, $p_1>0$, X 为一类李氏函数 $h: \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 的集合：该类函数具有李氏常数 p_1, $|h(x)|\leqslant p_1$, $x\in\mathbf{R}^n$ 和 $h(0)=0$。于是，在采用上确界范数时，X是一个完备空间。

对 $h\in X$, $x_0\in\mathbf{R}^n$, 设 $x(t, x_0, h)$是以下方程的解：

$$x'=Ax+F(x, h(x)),\ x(0, x_0, h)=x_0,\tag{1.1.3}$$

同时，定义一个新的函数 Th 如下：

$$(Th)(x_0)=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-Bs}G(x(s, x_0, h), h(x(s, x_0, h)))\mathrm{d}s。\tag{1.1.4}$$

于是，如果 h 是(1.1.3)的一个不动点的话，h 就是(1.1.2)的一个中心流形。为证明(1.1.3)不动点的存在，可以从求证对 p, p_1 和充分小的 ε, T 是X上的压缩映射而得到。

根据F与G的定义，存在一个连续函数 $K(\varepsilon)$，且 $K(0)=0$，

使得

$$|F(x,\ y)|+|G(x,\ y)|\leqslant\varepsilon K(\varepsilon),$$

$$|F(x,\ y)-F(x',\ y')|\leqslant K(\varepsilon)[|x-x'|+|y-y'|],\tag{1.1.5}$$

$$|G(x,\ y)-G(x',\ y')|\leqslant K(\varepsilon)[|x-x'|+|y-y'|],$$

对所有的 $x,\ x'\in\mathbf{R}^n,\ y,\ y'\in\mathbf{R}^m,\ |y|,\ |y'|<\varepsilon$ 成立。

因为B的所有特征值具有负实部，所以存在正常数 β 和 C，使得

$$|\mathrm{e}^{-Bs}y|\leqslant C\cdot\mathrm{e}^{\beta s}|y|,\quad s\leqslant 0,\ y\in\mathbf{R}^m。$$

同样，由于A的所有特征值具有零实部，对每个 $r>0$ 总存在常数 $M(r)$，使得 $M(r)\to\infty(r\to 0$ 时)，且

$$|\mathrm{e}^{As}x|\leqslant M(r)\mathrm{e}^{r|s|}|x|。$$

如果 $p<\varepsilon$，那末就可以利用(1.1.4) 来估计G和类似项，故以下总设 $p<\varepsilon$。

从式(1.1.4)有

$$|Th(x_0)|\leqslant C\cdot\beta^{-1}\varepsilon K(\varepsilon),\ x_0\in\mathbf{R}^n。\tag{1.1.6}$$

同样由式(1.1.3)也可以得到

$$\begin{aligned}&|x(t,\ x_0,\ h)-x(t,\ x_1,\ h)|\leqslant M(r)\mathrm{e}^{-rt}|x_0-x_1|\\&+(1+p_1)\cdot M(r)K(\varepsilon)\int_t^0\mathrm{e}^{r(s-t)}|x(s,\ x_0,\ h)\\&-x(s,\ x_1,\ h)|\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中 $x_0,\ x_1\in\mathbf{R}^n,\ r>0,\ t\leqslant 0$。

于是，Gronwall 不等式表明

$$|x(t,\ x_0,\ h)-x(t,\ x_1,\ h)|\leqslant M(r)|x_1-x_0|\cdot\mathrm{e}^{-\gamma t},$$

其中 $\gamma=r+(1+p)M(r)K(\varepsilon)$，故

$$\begin{aligned}|Th(x_0)-Th(x_1)|\leqslant&\, C(M(r)+p_1)K(\varepsilon)\\&\cdot(\beta-\gamma)^{-1}\cdot|x_0-x_1|,\end{aligned}\tag{1.1.7}$$

其中 ε 和 r 充分小使得 $\beta>\gamma$。

类似地，对 $h_1,\ h_2\in X,\ x_0\in\mathbf{R}^n$，便有

$$|Th_1(x_0)-Th_2(x_0)|\leqslant CK(\varepsilon)[\beta^{-1}$$
$$+(1+p_1)M(r)K(\varepsilon)r^{-1}(\beta-\gamma)^{-1}]\cdot\|h_1-h_2\|, \tag{1.1.8}$$

适当选取 p, p_1, ε 和 r 后，式(1.1.6), (1.1.7)和(1.1.8)表明 T 是 X 上的压缩映射。从而证明了式 (1.1.2) 有一个中心流形。进而，从式(1.1.2)的定义可知对充分小的 x, 式(1.1.1)有一个中心流形。

对于 h 为 C^2 类的证明可参考[2]。

[注 1]：从以上证明可知，该中心流形是局部中心流形，通常记为

$$W^c(0)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\,|\,y=h(x),\ |x|<\delta,\ h(0)=0$$
$$h'(0)=0\}。$$

[注 2]：类似地可得到以下系统具有一个全局的不变流形：即系统

$$\begin{cases}x'=Ax+\varepsilon f(x,y,\varepsilon),\\ y'=By+\varepsilon g(x,y,\varepsilon),\end{cases}$$

其中 x, y; A, B; f 和 g 假设如定理 1.1.1, 具有一个全局的不变流形 $y=h(x,\varepsilon)$, 其中 $|x|<m$, $|\varepsilon|<\delta$, $m>0$, 且 $|h(x,\varepsilon)|<C\cdot|\varepsilon|$, C 是一个与 m, A, B, f 和 g 有关的常数。

在证明了中心流形的存在性之后，却无法给出一个计算的过程。当然，对非线性系统而言，精确地求解中心流形的解析式往往是不可能的。以下定理给出了可达任意精度的近似计算方法。

定理 1.1.2 设函数 ϕ: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 为 C' 函数，定义于原点的一个领域内。并且 $\phi(0)=0$, $\phi'(0)=0$。让

$$(M\phi)(x)=\phi'(x)[Ax+f(x,\phi(x))]-B\phi(x)-g(x,\phi(x))$$

假设 $(M\phi)(x)=O(|x|^q)(x\to0,\ q>1)$, 那末

$$|h(x)-\phi(x)|=O(|x|^q),\ (x\to0),$$

其中 $y=h(x)$ 为系统(1.1.1)的一个中心流形。

证 让 θ: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 是一个连续可微函数，且 $\theta(x)=\phi(x)$, $|x|$

很小。

又设

$$N(x)=\theta'(x)\cdot[Ax+F(x,\ \theta(x))]-B\theta(x)-G(x,\ \theta(x)),$$

其中 F 和 G 如同定理 1.1.1 中所定义。于是有 $N(x)=O(|x|^q)$，(当 $x\to 0$ 时)。

在定理 1.1.1 中，已证明 h 是压缩映射 T: $X\to X$ 的一个不动点。让 S 为一个映射：$S_z=T(z+\theta)-\theta$，其定义域为 X 的一个闭子集 Y，于是 S 也是一个 Y 上的压缩映射。

让 $Y=\{z\in X,\ |z(x)|\leqslant K|x|^q,\ K>0,\ x\in\mathbf{R}^n\}$，显然，如果能够找出一个 K，使得 S 内射(into) Y，该定理就已得以证明。

为此：我们将分两步去实施寻找 K。首先，寻找映射 S 的另一个形式：

对 $z\in Y$ 而言，让 $x(t,\ x_0)$ 为以下方程的解：

$$x'=Ax+F(x,\ z(x)+\theta(x)),\ x(0,\ x_0)=x_0, \tag{1.1.9}$$

于是从式(1.1.4)，可以有

$$(T(z+\theta))(x_0)=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-Bs}G(x(s,\ x_0),\ z(x(s,\ x_0))+\theta(x(s,\ x_0)))\mathrm{d}s,$$

另则，

$$\begin{aligned}-\theta(x_0)&=-\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\mathrm{e}^{-Bs}\theta(x(s,\ x_0))]\mathrm{d}s\\&=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-Bs}[B\theta(x(s,\ x_0))-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\theta(x(s,\ \theta_0))]\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}B\theta(x)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\theta(x)&=B\theta(x)-\theta'[Ax+F(x,\ z(x)+\theta(x))]\\&=-N(x)-G(x,\ \theta(x))+\theta'(x)[F(x,\ \theta)\\&\quad-F(x,\ z(x)+\theta(x))]。\end{aligned}$$

根据 S 的定义和以上计算有

$$(Sz)(x_0)=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-Bs}Q(x(s,\ x_0),\ z(x(s,\ x_0)))\mathrm{d}s,$$

其中

$$Q(x, z) = G(x, \theta+z) - G(x, \theta) - N(x) + \theta'[F(x, \theta) - F(x, \theta+z)],$$

而 $x(s, x_0)$为式(1.1.9)的解。

第二步是证明对某个 $K>0$, S 内射 Y 至 Y。

适当选择 θ, 使$|\theta(x)|\leqslant\varepsilon(x\in\mathbf{R}^n)$。由于

$$|N(x)|\leqslant C_1|x|^q,\ x\in\mathbf{R}^n。$$

其中 C_1 为一个常数，以及 F, G 的 Lipschitz 性质。可设存在一个连续函数 $\kappa(\varepsilon)$, $\kappa(0)=0$ 使得

$$\begin{aligned}|Q(x, z)| &\leqslant |Q(x, 0)| + |Q(x, z) - Q(x, 0)| \\ &= |N(x)| + |Q(x, z) - Q(x, 0)| \\ &\leqslant C_1|x|^q + \kappa(\varepsilon)|z(x)|\end{aligned}$$

其中 $z\in Y$, $|z|\leqslant\varepsilon$, $x\in\mathbf{R}^n$。

从如同定理 1.1.1 证明中的计算可知，如果 $x(t, x_0)$ 是式(1.1.9)的解,那末对每个 $r>0$, 都有一个常数$M(r)$使得

$$|x(t, x_0)|\leqslant M(r)\cdot|x_0|\cdot\mathrm{e}^{-\gamma t},\ t\leqslant 0,$$

其中 $\gamma = r + 2M(r)\kappa(\varepsilon)$。

于是

$$\begin{aligned}|(Sz)(x_0)| &\leqslant C\cdot(C_1 + K\cdot\kappa(\varepsilon))\cdot(M(r))^q \\ &\quad\cdot(\beta - q\gamma)^{-1}\cdot|x_0|^q = C_2|x_0|^q,\end{aligned}$$

其中 ε 和 r 充分小使得 $\beta - q\gamma>0$。

选取K充分大而 ε 充分小,那末 $C_2\leqslant K$, 从而本定理得证。

在获得了中心流形存在性和近似计算的结论后，可以得到一个低维的控制方程为

$$u' = Au + f(u, h(u)), \tag{1.1.10}$$

其中 $u\in\mathbf{R}^n$。但是，一个很显然的问题是原方程的解与低维控制方程的解之间存在着什么关系呢?以下定理将给出部分的结论,在下一章中将叙述另一部分的结论。

定理 1.1.3 假设式(1.1.10)的零解是稳定的，又设$(x(t)$,

$y(t))$是式(1.1.1)的解，且$(x(0), y(0))$充分小。那末存在着式(1.1.10)的一个解$u(t)$，使得当$t\to\infty$时有

$$\begin{cases}x(t)=u(t)+O(e^{-\gamma t}),\\ y(t)=h(u(t))+O(e^{-\gamma t}),\end{cases}\tag{1.1.11}$$

其中$\gamma>0$是一个常数。

在证明本定理之前,先介绍以下两条引理。

引理 1 设$(x(t), y(t))$是式(1.1.2)的一组解，且$|(x(0), y(0))|$充分小。那末，存在正数C_1和μ使得对所有$t\geqslant 0$下式皆成立：

$$|y(t)-h(x(t))|\leqslant C_1 e^{-\mu t}|y(0)-h(x(0))|。$$

证 让$z(t)=|y(t)-h(x(t))|$，那末：

$$z'=Bz+N(x, z),$$

其中

$$\begin{aligned}N(x, z)=h'(x)\cdot[F(x, h(x))-F(x, z+h(x))]\\ +G(x, z+h(x))-G(x, h(x))。\end{aligned}$$

由于h有界,可发现一个连续函数$\delta(\varepsilon)$，$\delta(0)=0$，使得

$$|N(x, z)|<\delta(\varepsilon)\cdot|z|,\ (|z|<\varepsilon),$$

于是

$$|z(t)|\leqslant C\cdot e^{-\beta t}|z(0)|+C\delta(\varepsilon)\cdot\int_0^t e^{-\beta(t-s)}|z(s)|ds。$$

从而本引理结论就是Gronwall不等式的直接应用。

引理 2 假设矩阵A所有特征值皆有零实部，那末可选择适当的基，使得$A=A_1+A_2$，其中$|e^{-A_1 t}\cdot x|=|x|$，而A_2是幂零阵且有$|A_2 x|\leqslant(\beta/4)|x|$，其中$\beta$为一个正常数且

$$|e^{-\beta s}y|\leqslant C\cdot e^{\beta s}|y|。$$

现在着手证明定理1.1.3，证明共分两步。

I 让$u_0\in\mathbf{R}^n$，$z_0\in\mathbf{R}^m$，$|(u_0, z_0)|$充分小。又设$u(t)$为式(1.1.10)的满足$u(0)=u_0$的解，$(x(t), y(t))$为扩充方程(1.1.2)的解。要说明(1.1.2)满足$y(0)-h(x(0))=z_0$的解$(x(t), y(t))$

存在，且 $x(t)-u(t)$，$y(t)-h(u(t))$ 当 $t\to\infty$ 时指数型减小。

若 $u(0)$ 充分小，则有

$$u'=Au+F(u, h(u))。\tag{1.1.12}$$

让 $z(t)=y(t)-h(x(t))$，$\phi(t)=x(t)-u(t)$，那末

$$z'=Bz+N(\phi+u, z),\tag{1.1.13a}$$

$$\phi'=A\phi+R(\phi, z),\tag{1.1.13b}$$

其中 N 如引理 1.1.1 中所定义，

$$R(\phi, z)=F(u+\phi, z+h(u+\phi))-F(u, h(u))。$$

为完成证明的第一步，首先将式(1.1.13)写成一个不动点问题的形式。

设 X 是连续函数的集合，$\phi: [0, \infty)\to\mathbf{R}^n$，且 $|\phi(t)e^{at}|\leqslant K$ $(t\geqslant 0)$，其中 $a>0$，$K>0$。继而定义

$$\|\phi\|=\sup\{|\phi(t)e^{at}|: t\geqslant 0\}。$$

那末 X 就是一个完备空间。为方便起见，取 $K=1$，$2a=\beta$。

又设 (u_0, z_0) 充分小，$u(t)$ 是式(1.1.12)满足 $u(0)=u_0$ 的解。对给定的 $\phi\in X$，设 $z(t)$ 是式(1.1.13) 满足 $z(0)=z_0$ 的解。进而定义 $T\phi$ 如下：

$$(T\phi)(t)=-\int_t^{\infty}e^{A_1(t-s)}[A_2\phi(s)+R(\phi(s), z(s))]ds。$$

其次，根据 F，G，h 的有界性和 $N(\phi, 0)=0$，可断言，存在一个连续函数 $\kappa(\varepsilon)$，$\kappa(0)=0$。使得 $\phi_1, \phi_2\in\mathbf{R}^n$，$z_1, z_2\in\mathbf{R}^m$ 且 $|z_i|<\varepsilon(i=1, 2)$ 时，

$$|N(\phi_1, z_1)-N(\phi_2, z_2)|\leqslant\kappa(\varepsilon)[|z_1||\phi_1-\phi_2|+|z_1-z_2|],$$

$$|R(\phi_1, z_1)-R(\phi_2, z_2)|\leqslant\kappa(\varepsilon)[|z_1-z_2|+|\phi_1-\phi_2|]。$$

于是由式(1.1.13a)得

$$|z(t)|\leqslant C|z_0|e^{-\beta t}+C\kappa(\varepsilon)\cdot\int_0^t e^{-\beta(t-s)}|z(s)|ds。$$

由 Gronwall 不等式：

$$|z(t)|\leqslant C|z_0|\cdot e^{-\beta_1 t},$$

其中 $\beta_1=\beta-C\kappa(\varepsilon)$。所以，$\varepsilon$ 充分小时有

$$|T\phi(t)|\leqslant\frac{e^{-\alpha t}}{2}+\kappa(s)\int_t^\infty(e^{-\alpha s}+C|z_0|\cdot e^{-\beta_1 s})ds\leqslant e^{-\alpha t},$$

即 T 内射从 X 到 X。

第三，让 $\phi_1,\ \phi_2\in X$，z_1，z_2 是(1.1.13a)的对应解，$z_i(0)=z_0$ $(i=1,\ 2)$。又设 $w(t)=z_1(t)-z_2(t)$。于是

$$|w(t)|\leqslant C\kappa(\varepsilon)\cdot\int_0^t e^{-\beta(t-s)}[|z_1(s)||\phi_1(s)-\phi_2(s)|+|w(s)|]ds,$$

故有

$$|w(t)|\leqslant C_1\kappa(\varepsilon)\cdot\|\phi_1-\phi_2\|e^{-\beta t}+C\kappa(\varepsilon)\int_0^t e^{-\beta(t-s)}|w(s)|ds,$$

其中 C_1 是一个常数，且

$$|w(t)|=|z_1(t)-z_2(t)|\leqslant C_1\kappa(\varepsilon)\|\phi_1-\phi_2\|e^{-\beta_1 t},$$

所以，当 ε 充分小时有

$$|T\phi_1(t)-T\phi_2(t)|\leqslant\frac{1}{2}\|\phi_1-\phi_2\|+\kappa(\varepsilon)\int_t^\infty(|\phi_1(s)-\phi_2(s)|+|z_1(s)-z_2(s)|)ds<\alpha\|\phi_1-\phi_2\|$$

其中 $\alpha<1$。

上述分析表明，对每个充分小的$(u_0,\ z_0)$，T 总有一个唯一的不动点，该不动点连续地依赖于 u_0 和 z_0。

Ⅱ 定理证明的第二步是求证映射 S：$U\subset\mathbf{R}^{n+m}\to\mathbf{R}^{n+m}$($U$ 是原点的一个邻域)，$S(u_0,\ z_0)=(x_0,\ z_0)$ 是一对一。它等价于证明如果 $u_0+\phi_0(0)=u_1+\phi_1(0)$，那末 $u_0=u_1$，$\phi_0(0)=\phi_1(0)$。

显然从 $u_0+\phi_0(0)=u_1+\phi_1(0)$的条件偕同式 (1.1.2) 解的唯一性，故有 $u_0(t)+\phi_0(t)=u_1(t)+\phi_1(t)$，$t\geqslant0$，其中 $u_i(t)\,(i=1,\ 2)$是式(1.1.12)的解，且 $u_i(0)=u_i$。因此

$$u_0(t)-u_1(t)=\phi_1(t)-\phi_0(t),\quad t\geqslant0。$$

因为 A 所有特征值的实部皆为零，所以，

$$\lim_{t\to\infty} |u_1(t) - u_0(t)| e^{\varepsilon t} = \infty (\varepsilon > 0),$$

除非 $u_1(0) = u_0(0)$。同样

$$|\phi_i(t)| \leqslant e^{-\alpha t}, \ t \geqslant 0。$$

故所以 S 是一对一的映射，它表明式 (1.1.2) 的解具有本定理所叙述的性质。由于 F, G 在零点的一个邻域内等于 f, g，所以本定理成立。

在系统满足一定条件时，它存在中心流形，从而控制方程是一个低维的近似，并且原方程与控制方程的解具有相似的性态和良好的近似性，这个理论大大地简化了非线性系统的研究。以下的例题皆是很好的直观过程。

1.1.2 例题(中心流形和系统的降阶处理)

例 1.1.1 考虑以下非线性系统

$$\begin{cases} x' = xy + ax^3 + by^2x, \\ y' = -y + cx^2 + dx^2y。\end{cases}$$

由定理 1.1.1 可知，它有一个中心流形 $y = h(x)$，其近似计算方程为

$$(M\phi)(x) = \phi'(x)[x\phi(x) + ax^3 + bx\phi^2(x)] \\ + \phi(x) - cx^2 - dx^2\phi(x),$$

若取 $\phi = cx^2$，那末 $(M\phi)(x) = O(x^4)$，于是 $h(x) = cx^2 + O(x^4)$。由定理 1.1.3 知系统在中心流形上的降阶方程为

$$u' = uh(u) + au^3 + buh^2(u) = (a+c)u^3 + O(u^5),$$

(可见，$a + c > 0$ 时零解不稳定，而 $a + c < 0$ 时零解稳定且渐近稳定。)

例 1.1.2 考虑以下二阶 Duffing 方程：

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = \beta u - u^2 - \delta u, \ (\delta > 0) \end{cases}$$

首先利用变换将上式变为可利用中心流形的形式，变换为

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ - & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/\delta \\ 0 & -1/\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

在此变换下原系统为

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\beta}{\delta}(x+y) - \dfrac{1}{\delta}(x+y)^2, \\ y' = -\delta y - \dfrac{\beta}{\delta}(x+y) + \dfrac{1}{\delta}(x+y)^2, \end{cases}$$

将 β 视为可变参数，并建立 $\beta'=0$ 补充方程后，所寻找的中心流形就为 $y=h(x,\beta)$，它的近似方程为

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial \beta}\right)\begin{pmatrix} (\beta/\delta)(x+h)-(1/\delta)(x+h)^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+\delta h + \frac{\beta}{\delta}(x+h) - \frac{1}{\delta}(x+h)^2 = (Mh)(x,\beta)。$$

设 $y=h(x,\beta)=ax^2+bx\beta+c\beta^2+O(3)$，其中 $O(3)$ 指 x^3，$x^2\beta$，$x\beta^2$，β^3 项。于是，不难算得 $a=1/\delta^2$，$b=-1/\delta^2$，$c=0$ 时，有

$$y=\frac{1}{\delta^2}(x^2-\beta x)+O(3),$$

从而原系统在中心流形上的降阶系统为

$$x' = \frac{\beta}{\delta}\left(1-\frac{\beta}{\delta^2}\right)x - \frac{1}{\delta}\left(1-\frac{\beta}{\delta^2}\right)x^2 + O(3),\ (\beta'=0)。$$

例 1.1.3 考虑以下 Lorenz 方程

$$\begin{cases} x' = \sigma(y-x), \\ y' = \rho x + x - y - xz, \quad (x,y,z)\in\mathbf{R}^3。 \\ z' = -\beta z + xy, \end{cases}$$

在以下坐标变换下：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

原系统变成了可应用中心流形的形式：

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1+\sigma) & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{1+\sigma} \begin{pmatrix} \sigma\rho(u+\sigma v) - \sigma w(u+\sigma v) \\ -\rho(u+\sigma v) + w(u+\sigma v) \\ (1+\sigma)(u+\sigma v)(u-v) \end{pmatrix},$$

$$\rho' = 0,$$

故而其中心流形应是：$v = h_1(u, \rho)$和 $w = h_2(u, \rho)$，其近似计算方程为

$$D_x h(x, \varepsilon)[Ax + f(x, h(x, \varepsilon), \varepsilon)]$$
$$-Bh(x, \varepsilon) - g(x, h(x, \varepsilon), \varepsilon) = 0,$$

其中 $x \equiv u$, $y \equiv (v, w)$, $\varepsilon = \rho$, $h = (h_1, h_2)$, $A = 0$,

$$B = \begin{pmatrix} -(1+\sigma) & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix},$$

$$f(x, y, \varepsilon) = \frac{1}{1+\sigma}[\sigma\rho(u+\sigma v) - \sigma w(u+\sigma v)],$$

$$g(x, y, \varepsilon) = \frac{1}{1+\sigma} \begin{pmatrix} -\rho(u+\sigma v) + w(u+\sigma v) \\ (1+\sigma)(u+\sigma v)(u-v) \end{pmatrix}.$$

令
$$h_1(u, \rho) = a_1 u^2 + a_2 u\rho + a_3\rho^2 + \cdots$$
$$h_2(u, \rho) = b_1 u^2 + b_2 u\rho + b_3\rho^2 + \cdots$$

其中
$$b_1 = 1/\beta, \quad b_2 = 0,$$
$$a_1 = 0, \ a_2 = -1/(1+\sigma)^2,$$

那末
$$h_1(u, \rho) = -1/(1+\sigma^2)u\rho + \cdots$$
$$h_2(u, \rho) = \frac{1}{\beta}u^2 + \cdots$$

原系统在中心流形上的降价形式为

$$u' = u\left(\frac{\sigma}{(1+\sigma)}\rho - \frac{\sigma}{\beta}u^2 + \cdots\right),$$

$$\rho' = 0。$$