根据新教材同步编写

SHUANGSE DIANJIN

总 策 划　武家麟　常　成
主　　编　强　华　宏　河
本册主编　丁　卫

双色点津

课文点津　回味无穷
课上良师　课下益友
省时省力　耳目一新

初三数学

首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

初三数学

双色点津

总 策 划　武家麟　常　成
主　　编　强　华　宏　河
本册主编　丁　卫

编　　者　丁　卫　陈　鑫
　　　　　周国群　邱　辉

首都师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

双色点津. 初三／丁卫主编. －北京:首都师范大学出版社,2002.6

ISBN 7-81064-315-0

Ⅰ. 双… Ⅱ.丁… Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料
Ⅳ. G634.413

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 051528 号

SHUANGSE DIANJIN·CHUSAN SHUXUE

双色点津·初三数学

首都师范大学出版社
(北京西三环北路 105 号 邮政编码 100037)
北京嘉实印刷有限公司印刷 全国新华书店经销
2002 年 6 月第 1 版 2002 年 6 月第 1 次印刷
开本 850×1168 1/32 印张 10
字数 326 千 印数 00,001~10,500 册
定价: 15.00 元

双色点津

前　言

本书依据最新颁布的初中数学教学大纲和最新全国统编数学教科书，与现行教材同步。

“课文内容注解”按课文对教材的重点、难点、要点和疑点进行分析，使学生一目了然，便于记忆。

“课文拓展深化”对每单元的知识重点、难点及考试热点进行简明扼要的讲解，帮助学生掌握重点、突破难点、熟悉考点，以建立起知识体系，使学习、记忆、运用有序化。

“综合能力运用”分三个栏目：基础知识巩固、素质能力培养和综合能力提高。本部分选编了一定数量的基础知识巩固试题和一些启发性和实用性较强的练习题，教给学生如何灵活运用知识，做到举一反三，触类旁通。

《双色点津》丛书的策划充分考虑了新形势下广大学生、教师和家长对教辅读物的新要求。

首先，要切实减轻学生的课业负担，除了必须提高教育素质以外，还必须在提高学生的学习效率上下功夫。本丛书不但能激发学生的学习兴趣，并能有效地减少学习时间。

其次，本丛书在改进学生的学习方法、增长知识面上下了一番功夫，如设置了“课文拓展深化”栏目，不但让学生学习有兴趣，更在有兴趣的学习中增长知识、扩大视野，为进一步的学习作好充足准备。

第三，本丛书对某些重点、难点、考点、疑点等采用“双色”套印，加以“点津”，一目了然，方便记忆和查找。

最后，本丛书的体例设计是全新的，版式设计也独具匠心，这将有助于学生的学习。

常　成

2002.3

双色点津

目 录

代数部分

几何部分

代数部分

第12章 一元二次方程

第一部分 一元二次方程

12.1 用公式解一元二次方程

课文内容注解

1. 整式方程的概念

方程的两边都是关于未知数的整式，这样的方程叫整式方程.

只要分母中不含有未知数即可.如：$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0\,(a\neq0)$，就是关于 x 的整式方程

2. 一元二次方程的概念

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫做一元二次方程.

三个条件，缺一不可：一个未知数、未知数最高次数为 2，整式方程

3. 一元二次方程的一般形式

为什么？

一元二次方程的一般形式是：$ax^2+bx+c=0\,(a\neq0)$.它的特征是：等式左

若明确指出 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程，则就隐含了 $a\neq0$ 的条件

边是一个关于未知数的二次三项式，等式右边为 0.其中 ax^2 叫做二次项，a 叫做二次项系数；bx 叫做一次项，b 叫做一次项系数；c 叫做常数项.

4. 不完全的一元二次方程

我们把缺一次项或常数项的一元二次方程称为不完全的一元二次方程.一元二次方程可分类如下：

$$\text{一元二次方程 } ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)\begin{cases}\text{完全的一元二次方程} & ax^2+bx+c=0\ (b\neq0,\ c\neq0)\\ \text{不完全的一元二次方程} & \begin{cases}ax^2+c=0\ (\text{缺一次项},\ b=0,\ c\neq0)\\ ax^2+bx=0\ (\text{缺常数项},\ b\neq0,\ c=0)\\ ax^2=0\ (\text{缺一次项和常数项},\ b=0,\ c=0)\end{cases}\end{cases}$$

5. 直接开平方法

用直接开平方求一元二次方程的解的方法叫做直接开平方法. 用直接开平方法解形如 $(x-a)^2=b\ (b\geqslant0)$ 的方程,得解为 $x=a\pm\sqrt{b}$.用直接开平方法解一元二次方程的理论根据是平方根的定义.

清楚吗?

注意:当 $b<0$ 时,方程 $(x-a)^2=b$ 无实数解,因为负数没有平方根

6. 配方法

配方法是一种重要的数学方法,它不仅在解一元二次方程上有所应用,而且在今后的学习中也会常常遇到.

用配方法解方程是以配方为手段,以直接开平方法为基础的一种解一元二次方程的方法.

用配方法解一元二次方程的一般步骤为:

(1)化二次项系数为1; 目的是为了便于配方

(2)移项,使方程左边为二次项和一次项,右边为常数项;

(3)方程两边都加上一次项系数的绝对值一半的平方;

(4)原方程变为 $(x+m)^2=n$ 的形式;

(5)如果右边是非负数,就可以用直接开平方法求出方程的解.

7. 公式法

公式法是用求根公式求出一元二次方程的解的方法,它是解一元二次方程的一般方法.后面将要学习的内容,如根的判别式、根与系数的关系等都是以求根公式为基础的.

一元二次方程求根公式的推导过程.

用配方法解一般式的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$.

解: $a\neq0$

∴ 方程的两边都除以 a,得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

移项,得 $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$

配方，得 $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

清楚吗?

即 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

$\because a\neq0 \quad \therefore 4a^2>0$

$\therefore$ 当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，$\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 是非负数

根据平方根的定义，得

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

由此可见，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq0)$ 的根是由方程的系数 a、b、c 确定的.因此，在解一元二次方程时，先把方程化为一般形式，确定 a、b、c 的值，然后在 $b^2-4ac\geqslant0$ 的前提下，把各项系数 a、b、c 的值代入公式：

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad(b^2-4ac\geqslant0)}$$

就可以求得方程的根.我们把方框里的式子叫做一元二次方程的求根公式.用求根公式解一元二次方程的方法叫做公式法.

课文拓展深化

重点　一元二次方程的概念、化任意一元二次方程为一般式及公式法.

难点　一元二次方程一般式的正确理解、各项系数的确定及配方法、求根公式法的推导.

能力点　方程贯穿于初中数学内容的始终，它与实数运算、代数式的变形、函数等有关内容紧密相关，是中考命题的重点内容，与一元二次方程的概念有关的问题，多见于填空题和选择题.

典型例题剖析

[例 1]　下列方程中哪些是一元二次方程?哪些不是一元二次方程?

深刻理解方程中的“元”和“次”的含义

(1) $3x+2y=1$　　(2) $ax^2-6x+3=0$

(3) $\frac{2x^2-3}{5}=x$　　(4) $\frac{y^2+2}{x}=3$

(5) $\frac{x^2+2x-1}{x+1}=3$　　(6) $7a^2-3=6a$

解：方程(1)、(4)不是一元二次方程　含有两个未知数

方程(5)不是一元二次方程　不是整式方程

方程(2)不是一元二次方程　未明确 a 是否为 0

方程(3)、(6)是一元二次方程

同时满足：(1)整式方程，(2)含一个未知数，(3)未知数最高次数为 2

[例2]　已知关于 x 的方程 $(a^2-1)x^2-2(a+1)x-3=0$，a 为何值时，它是关于 x 的一元一次方程；a 为何值时，它是关于 x 的一元二次方程.

解：当　　　时，即 $a\neq1$，且 $a\neq-1$ 时，方程为一元二次方程

一元二次方程的先决条件

当 $a^2-1=0$，即 $a=-1$ 或 $a=1$

由　　时，一次项的系数 $-2(a+1)=0$

考虑问题要细心，全面

此时，一次项的系数也为 0

故，只有当 $a=1$ 时，方程才是一元一次方程

[例3]　用直接开平方法解方程.

(1) $25x^2-64=0$　　(2) $4(y-3)^2=225$

解：(1)移项，得 $25x^2=64$　防止出现 $25x=\pm\sqrt{64}$ 的错误

化系数得 $x^2=\frac{64}{25}$　$\frac{64}{25}$ 是个平方数

$\therefore x=\pm\sqrt{\frac{64}{25}}$　勿丢掉“−”

即 $x_1=\frac{8}{5}$，$x_2=-\frac{8}{5}$　“x”的右下角要标明 1、2

(2)方程化为$(y-3)^2=\frac{225}{4}$　$(y-3)^2$切勿用公式展开

$y-3=\pm\sqrt{\frac{225}{4}}$　把$(y-3)$视为一个整体

$\therefore y-3=\frac{15}{2}$或$y-3=-\frac{15}{2}$

即$y_1=\frac{21}{2}$，$y_2=-\frac{9}{2}$

[例4]　用配方法解下列方程.

(1)x^2-6x+4　　　(2)$2x^2-\sqrt{2}x-30=0$

解：(1)移项，得$x^2-6x=-4$　左边为二次、一次项，右边为常数项

方程两边同时加上一个一次项系数一半的平方

理论根据是$a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$

$x^2-6x+(-3)^2=-4+(-3)^2$

配方，得$(x-3)^2=5$　把方程配方成$(x+m)^2=n$的形式

解这个方程，得$x-3=\pm\sqrt{5}$　采用了直接开平方法

$\therefore x_1=3+\sqrt{5}$，$x_2=3-\sqrt{5}$

(2)方程各项同除以2，并移项

$x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x=15$　若二次项系数不为1时，要把它化为1

配方，得$x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=15+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2$

即$\left(x-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{121}{8}$

解这个方程，得$x-\frac{\sqrt{2}}{4}=\pm\frac{11\sqrt{2}}{4}$

$\therefore x_1=3\sqrt{2}$，$x_2=-\frac{5}{2}\sqrt{2}$　千万不要漏掉负数根

"配方法"解一元二次方程，可归纳为"一除、二移、三配、四方"

[例5]　用公式法解下列方程.

(1)$x^2-2\sqrt{3}x+3=0$　　　(2)$x^2+x=1$

解：(1)∵ $a=1$, $b=-2\sqrt{3}$, $c=3$ 先确定出各项系数的值

$b^2-4ac=(-2\sqrt{3})^2-4\times1\times3=0$ 求出"Δ"的值，可以判断方程根的情况，免去不必要的计算

∴ $x=\dfrac{-(-2\sqrt{3})\pm\sqrt{0}}{2\times1}$ 代入求根公式

$x_1=x_2=\sqrt{3}$ 此时不能写成 $x=\sqrt{3}$

(2)将方程化成一般式 这步不可少！

$x^2+x-1=0$

∵ $a=1$, $b=1$, $c=-1$

$b^2-4ac=1^2-4\times1\times(-1)=5$

∴ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

[例6] 解关于 x 的方程，$x^2+mx+2=mx^2+3x.(m\neq1)$

解：方程整理，得 $(m-1)x^2+(3-m)x-2=0$ 化成一般式

∵ $a=m-1\neq0$ $m-1\neq0$，怎么知道的？

$b=3-m$, $c=-2$

$b^2-4ac=(3-m)^2-4(m-1)\times(-2)$

$=(m+1)^2\geqslant0$ 证实此方程一定有解

∴ $x=\dfrac{-(3-m)\pm\sqrt{(m+1)^2}}{2(m-1)}=\dfrac{(m-3)\pm(m+1)}{2(m-1)}$

∴ $x_1=1$, $x_2=\dfrac{m-4}{2}$

综合能力运用

一、基础知识巩固

1. 填空题

(1)只含有______个未知数，并且未知数的________次数是 2，这样

的______方程叫做一元二次方程.

(2)填写下列表格

一元二次方程	一般式	二次项系数	一次项系数	常数项
①$(x+3)(x-4)=-6$				
②$(t-1)^2-3(t+1)^2=6t$				
③$(y+\sqrt{3})(y-\sqrt{3})+(2y-1)^2=4y+5$				

(3)方程 $x^2=27$ 的解是______;方程 $(x+6)^2-36=0$ 的解是______.

(4)$x^2-\frac{5}{3}x+$______$=(x-$______$)^2$.

(5)方程 $x^2+6x=6$ 中,$a=$______, $b=$______, $c=$______, $b^2-4ac=$______.

二、素质能力培养

2. 选择题 认准分母中的字母,谁是未知数

(1)下列关于 x 的方程中,不可能是整式方程的是 ( )

A. $\frac{3}{a}x^2+7bx+2c=0$　　B. $5x+\frac{3}{x}+c=0$

C. $abx^2+\frac{1}{d}=4x$　　D. $ax^2+bx=0$

(2)关于 x 的方程 $(m+1)x^2+2mx-3=0$ 是一元二次方程,则 m 的取值范围是 ( )

A. 任意实数　B. $m\neq-1$　C. $m>1$　D. $m>0$

3. 用直接开平方法解下列方程

(1)$-32x^2+128=0$　　(2)$4(x-3)^2=625$

(3)$0.01x^2-0.4=0$　　(4)$(\sqrt{3}x-\sqrt{2})^2=2$

先把小数化为整数

4. 用配方法解下列方程 一步一步按配方法的步骤顺序解

(1)$x^2-x-2=0$　　(2)$2y^2+8y-7=0$

(3)$5x^2-2=-x$　　(4)$x^2+2mx+m^2-n^2=0$

5. 用公式法解下列方程 前三项是完全平方和式

(1)$2x^2+8x-7=0$　　(2)$3x^2+1=2\sqrt{3}x$

(3)$(x-7)(x+3)+(x-1)(x+5)=4x$

(4) $x^2-5ax+6a^2=0\ (a>0)$

6. 用适当方法解下列方程

(1) $(3x-\sqrt{3})^2-27=0$

(2) $\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{2}x-2=0$

先化成 $3x^2+11x-4=0$

(3) $y^2+2=5\sqrt{2}\,y$

(4) $2\sqrt{3}\,y^2-y=\sqrt{3}$

三、综合能力提高

7. 若方程 $(a-1)x^{2a^2+a-1}-5x=-6$ 是一元二次方程，则 a 为多少？

这是 x 的次数，应为 2

8. 已知 $x=0$ 是方程 $x^2-3x+\sqrt{m}-3=0$ 的一个根，则 m 为多少？

把 13 分成 9+4

把 $x=0$ 代入方程 x 中

9. 已知 $x^2+6x+y^2-4y+13=0$，求 $x+2y$ 的值.

10. 用配方法证明：

(1) 代数式 $x^2-8x+17$ 的值恒大于 0.

领会“恒”字的意思

(2) 代数式 $-10x^2-7x-4$ 的值恒小于 0.

11. 解关于 x 的方程 $abx^2+ab-(a^2+b^2)x=0$

未标明 $a\cdot b\neq 0$ 的条件，因此要讨论

12.2 用因式分解法解一元二次方程

课文内容注解

1. 因式分解法是解一元二次方程经常选用的方法.这种解法的理论根据是：设 A、B 分别是 [illegible] 式，若 $A\cdot B=0$，

则 $A=0$ 或 $B=0$.

这就是说，如果两个因式的积等于 0，那么这两个因式至少要有一个为 0；反过来，如果两个因式有一个为零，它们的积也就等于 0.

2. 用因式分解法解一元二次方程的一般步骤是：

（1）将方程右边化为0；（2）将方程左边分解成两个一次因式的乘积；（3）令每个因式分别为0，得到两个一元一次方程；（4）解这两个一元一次方程，它们的解就是原方程的解.

关键：一是将方程右边化为0，二是熟练掌握多项式的因式分解

课文拓展深化

重点　用因式分解法解一元二次方程.

难点　理解一元二次方程为什么可转化为两个一元一次方程来解.

能力点　因式分解法解一元二次方程与前节介绍的一元二次方程各种解法一样，是中考命题的重点，命题形式有填空题、解答题.

典型例题剖析

［例1］　用因式分解法解下列方程：

（1）$18-x^2=-3x$　　　（2）$(y-1)(y+2)=12$

解：（1）移项，得 $x^2-3x-18=0$　将方程化为一般式

方程可变形为：$(x-6)(x+3)=0$　方程左边分解为两个一次式的乘积

解得 $x-6=0$ 或 $x+3=0$　使每个因式等于0，得到两个一元一次方程

$\therefore x_1=6,\ x_2=-3$　两个一元一次方程的解，就是原方程的解

（2）原方程变形为：$y^2+2y-3=12$　防止出现 $y-1=1$，或 $y+3=12$ 的错误

化简 $y^2+2y-15=0$

$\therefore (y+5)(y-3)=0$

即 $y+5=0$ 或 $y-3=0$

"或"字不能不写

$\therefore y_1=-5,\ y_2=3$

［例2］　用因式分解法解下列方程：

（1）$3(x-5)^2=2(5-x)$

（2）$4(3x-1)^2-9(3x+1)^2=0$

（3）$(2y+1)^2+3(2y+1)+2=0$