



$$\sqrt{2n}$$

$$K_a = n \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{10}{11} \times \cdots \times \frac{m-1}{m} \right) + a$$

用分层对应筛法对 “哥德巴赫猜想”的证明

Proving of
Goldbach's Conjecture
by Stratified Sieve Method

唐国胜 著

学林出版社

用分层对应筛法对 “哥德巴赫猜想”的证明

唐国胜 著

学林出版社

图书在版编目 (C I P) 数据

用分层对应筛法对“哥德巴赫猜想”的证明 / 唐国胜
著 . — 上海 : 学林出版社 , 2002. 2

ISBN 7 - 80668 - 253 - 8

I . 用… II . 唐… III . 哥德巴赫猜想 - 研究
IV . 0156.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 092488 号



用分层对应筛法对“哥德巴赫猜想”的证明

作 者—— 唐国胜

责任编辑—— 褚大为

封面设计—— 周 鸣

出 版—— 学林出版社 (上海钦州南路 81 号 3 楼)

电话: 64515005 传真: 64515005

发 行—— 新华书店上海发行所

学林图书发行部 (文庙路 120 号)

电话: 63779027 传真: 63768540

印 刷—— 上海师范大学印刷厂

开 本—— 850 × 1168 1 / 32

印 张—— 2.75

字 数—— 4 万

版 次—— 2002 年 2 月第 1 版

2002 年 2 月第 1 次印刷

印 数—— 5000 册

书 号—— ISBN 7 - 80668 - 253 - 8 / I · 63

定 价—— 9.00 元

自序

18 世纪德国数学家哥德巴赫提出他的著名“猜想”至今已经有 260 年了,在这整整两个半世纪还要多的日子里,全世界不知有多少数学专家和莘莘学子为了证明“哥德巴赫猜想”是正确的,是自然数中的一条客观规律而为之奋斗、为之献身,但迄今仍没有人能最后攻破这道难题,其难度之高简直是对人类智慧的挑战。人们认为,哥题难度越高,人类解决它、攻破它所需的智慧也就越大。因此,全世界的人们把“哥德巴赫猜想”这道理解起来容易、证明起来却难得出奇的世界著名数学难题称之为数学皇冠上的明珠。真是:明珠如此多骄,引来无数攀摘英雄竞折腰!

1742 年,哥德巴赫在教学和科研实践中,发现了一个具有规律性的现象:即 2 个奇素数相加,其和必然是一个偶数(注:以下所称的素数均指奇素数);但反过来,一个偶数是否必然可以用 2 个素数之和来代表呢?于是哥德巴赫从较小的偶数开始,按

照偶数的连续顺序,从每一个偶数中寻找能代表该偶数的 2 个素数之和。结果,当偶数的数值较大,甚至相当大时,哥德巴赫都能从他检验过的每一个偶数中找到至少一对素数之和能代表该偶数;与此同时,有人对 33×10^6 以内的每一个偶数都进行过检验,证实了 33×10^6 以内的每一个偶数中都能找到一对以上的素数之和来代表该被检验偶数。由于当时计算条件的限制,实际上都是靠人工计算,当偶数比 33×10^6 更大时,继续用哥德巴赫采用的这种实数验证的方法进行检验其难度越来越大,甚至要验证相当大偶数 $2n$ 内的某一相当大的奇数是否素数的难度也越来越大,于是实数验证的方法再也进行不下去了。然而从哥德巴赫和当时其他研究人员已经验证过的偶数在 33×10^6 范围内所得到的结论却是明确而肯定的,这就是:每一个偶数内都存在着至少一对素数,他们的和等于该偶数 $2n$ 。换句话说,就是一定范围内的偶数都可以表示为一个素数加上一个素数,用代数式来表示就是: $2n = P_1 + P_2$ (注: P_1 、 P_2 代表素数),其中 $P_1 + P_2$ 被俗称为 $1 + 1$ 。但是局部毕竟不能替代全体,即使在局部范围内被认为正确的东西很有可能适用于全体,也不能因此

而下结论，在科学的道路上是来不得半点含糊的，要得出局部范围内正确的东西适用于全体，必须从逻辑上、理论上进行科学的、严密的论证。对此，哥德巴赫没有含糊，他试图找到其他的方法证明 $2n = 1 + 1$ 适用于大于等于 6 的所有偶数。但是，尽管他花费了大量的时间和精力，作出了巨大的努力，却始终找不到有效的方法从理论上、逻辑上去证明任意大的偶数 $2n$ 均可表示为 $1 + 1$ 是正确的。可是，经过艰辛的努力之后，哥德巴赫更加坚信 $2n = 1 + 1$ 是正确的，是能够适用于任意大的偶数的，是自然数中存在着的一条客观规律。最后，哥德巴赫决定求援，他把他的实数验证的情况和得出的任意大偶数均可表示为 $1 + 1$ 的猜测性结论写信告诉了当时居住在德国的瑞士大数学家欧拉，并表示，他坚信 $2n = 1 + 1$ 是自然数中的一条客观规律，只是他自己无法证明而已，要求欧拉帮助他证明之。

赫赫有名的欧洲大数学家欧拉收到哥德巴赫的求援信后，欣然接受了哥氏的要求，开始用他的卓越智慧和丰富的理论知识，试图从逻辑上、理论上证明任意大偶数 $2n$ 均可表示为 $1 + 1$ 是正确的。经过多年的辛勤努力，几乎竭尽了他的全部

智慧，欧拉仍未能找到一个有效的方法来证明 $2n = 1 + 1$ 是正确的、是自然数中的一条规律。于是欧拉写信告诉哥德巴赫，他也认为哥氏提出的 $2n = 1 + 1$ 的猜想是正确的，是自然数中的一条规律，但是他与哥德巴赫一样无法证明之。后来，直到去世，欧拉对 $2n = 1 + 1$ 的证明也未成功。由于欧拉是当时欧洲最孚声望的大数学家，鉴于欧拉也认为哥德巴赫提出的 $2n = 1 + 1$ 是正确的、是自然数中的一条规律，但也无法证明之。于是，人们把这一条未经理论上证明的规律 $2n = 1 + 1$ 称之为哥德巴赫猜想。从此，哥德巴赫猜想成了一道世界数学难题，吸引了成千上万数学家的注意。

以后，世界各国有许许多多的数学家或数学工作者纷纷投入到论证“哥德巴赫猜想”的研究中去，都希望用自己的智慧去解决哥德巴赫和大数学家欧拉未能解决的难题。但是，人们越是希望早日攻破这道难题，“哥德巴赫猜想”却似乎越是要让人们在它的面前显得毫无办法。许许多多的研究者失败了，有许多数学家甚至为之奋斗了一生；一代又一代的研究者失败了，使人们对这道难题渐渐地望而生畏；自然数理论中其他的难题一个

又一个地被攻破了，但“哥德巴赫猜想”仍如磐石般地屹立在山巅，不愿在攻击它的人们面前低下它高傲的头颅。尽管如此，人们同样也没有向“哥德巴赫猜想”低头认输，全世界数学界有志于攻破“哥德巴赫猜想”这道难题的仁人志士从未有过间断，人们愈发把“哥德巴赫猜想”视作数学皇冠上的一颗璀璨夺目的明珠，一定要把它摘下来，让这颗明珠服务于人类。

“哥德巴赫猜想”是 1742 年提出来的，整个 18 世纪没有人能证明它；整个 19 世纪也没有人能证明它。直到 20 世纪 20 年代，问题才开始有所进展。人们为了攻破这道难题，相继开创和发展了一些崭新的数学方法，例如圆法，估计指数和的方法，筛法等等。

1920 年，挪威数学家布朗用一种古老的筛法证明了：每一个大偶数是 2 个“素因子都不超过九个的”数之和，即任意大的偶数都可以表示为九个素数的连乘积，加上九个素数的连乘积之和是正确的。即： $2n = 9 + 9$ 。

1924 年，数学家拉德马哈尔证明了： $2n = 7 + 7$ 。

1932 年, 数学家爱斯斯尔曼证明了: $2n = 6 + 6$ 。

1938 年, 数学家布赫斯塔勃证明了: $2n = 5 + 5$ 。

1940 年, 布赫斯塔勃又证明了: $2n = 4 + 4$ 。

1956 年, 数学家维诺格拉多夫证明了: $2n = 3 + 3$ 。

1958 年, 我国数学家王元证明了: $2n = 2 + 3$ 。

以上的证明对“哥德巴赫猜想”要求的 $2n = 1 + 1$ 的距离越来越近了。但是, 上述的所有证明都有一个明显的弱点, 即其中 2 个数中没有一个能肯定为素数的。为此, 有些数学家试图开辟另一战场, 想来证明每个大偶数都是一个素数加上另一个素因子不超过六个的连乘积的数之和。

1948 年, 匈牙利数学家兰恩易证明了: $2n = 1 + 6$ 。

1962 年, 我国数学家潘承洞证明了: $2n = 1 + 5$ 。

1962 年, 我国数学家王元、潘承洞又证明了: $2n = 1 + 4$ 。

1965年，有三位数学家：布赫斯塔勃、维诺格拉多夫和庞皮艾黎都证明了： $2n = 1 + 3$ 。

1966年5月，我国数学家陈景润在中国科学院的刊物《科学通报》第十七期上宣布他已经证明了： $2n = 1 + 2$ 。1973年，陈景润正式公开发表了他的著名论文：《大偶数表为一个素数及一个不超过2个素数的乘积之和》，即： $2n = 1 + 2$ 。陈景润的成果达到了“哥德巴赫猜想”研究史上最领先的地位，离“哥德巴赫猜想”所要求的 $2n = 1 + 1$ 仅一步之遥了。陈景润的论文一发表，立即在国内外数学界引起了强烈的反响，国内外的许多数学家高度评价了他的研究工作，纷纷赞扬他的研究成果。英国数学家哈勃斯丹和西德数学家李希特的著作《筛法》正在印刷所校印，他们见到了陈景润的论文后，立即在他们的著作中加添了第十一章：“陈氏定理”。陈氏定理被誉为“杰出的成就”、“重大的贡献”、“辉煌的定理”、“光辉的顶点”，有人甚至惊叹“是什么力量和意志，使他解决了如此之难的问题”，真是“移动了群山”。

当老作家徐迟把陈景润为国争光而艰苦奋斗的感人事迹以报告文学《哥德巴赫猜想》介绍给全

国人民时，整个中华民族无不为之自豪，为之欢欣鼓舞。同时，这篇报告文学也让人们了解了攻克“哥德巴赫猜想”的道路之崎岖、山峰之陡峭。也许中国人的传统是：明知山有虎，偏向虎山行，越难越想攀。一时间，在陈景润精神的鼓舞下，中华大地上自发地掀起了一股研究“哥德巴赫猜想”的热潮。因为陈景润的成果虽处于世界的领先地位，但毕竟离“哥德巴赫猜想”的真正解决还有一步之遥。为什么说一步之遥而不说一步之近呢？因为“哥德巴赫猜想”的证明实在是太难太难了，每前进一步都犹如在崎岖曲折的小路上摸索着方向，有时甚至无路可走，人们还得另辟蹊径。因此，数学皇冠上的这颗明珠究竟会被谁摘下呢？没有人能作出预言，也许是陈景润，人们曾对他抱有很大的期望，但陈景润已经带着遗憾离开了人世；那么，只能是愿为攻克这道难题而奋斗的哪一位幸运儿了。但不管怎么说，路毕竟是人走出来的，没有人去走就不可能有路，研究哥题的人多了也许就会发现通途。据了解，自1977年9月徐迟发表报告文学以后的几年中，有关论证“哥德巴赫猜想”的业余作者的研究文稿纷纷涌向数学刊物、科

技杂志、大学学报,有的甚至直接投寄给数学教授和专家,要求发表或审阅。也许是凭一时热情之故,业余研究者所使用的方法和得出的结论都未能击中“哥德巴赫猜想”的要害,而均被一一否定,从而纷纷偃旗息鼓,使研究热潮渐渐降温;但孜孜不倦、持之以恒者仍大有人在,本文作者就是其中的一个。

平心而论,大量业余作者的文稿均被否定,确实是增加了刊物杂志编辑们的负担,且使他们的宝贵时间花费在无效的劳动之上;加之文稿被否定又证明了无发表之价值;文稿不能发表,当然也就谈不上进行学术争鸣、学术探讨和学术交流。针对这种情况,20世纪80年代中期,有些数学名家出于善意发表箴言,认为即使沿着陈景润的方法走下去,那一步之遥也无到达的可能,何况沿着陈景润的路子走也许大家都走不过陈景润(注:当时陈景润还健在)。加上业余研究者一非专业,二是数学基础没有专业人员扎实,故专业人员走不通的路业余人员更走不通。数学名家并预言,要最后完成对“哥德巴赫猜想”的证明,人们必须找到一种完全不同于现有方法的全新方法,全新方法

是什么方法？由于人们还没有找到，故无从谈起。据此，数学名家规劝广大的业余研究者不要再在“哥德巴赫猜想”的研究上去浪费时间和精力。针对上述规劝，笔者认为，数学名家的箴言固然是出于善意。但问题是，业余研究者倘若因箴言而消失了，那人们摘取“明珠”的希望就只能寄托在数学专业人员身上了。但据笔者所知，以我国的情况而言，目前，专门从事“数论”研究的数学工作者少得几乎似凤毛麟角。（注：数论是数学研究领域中的一个古老分支，它是指专门研究自然数规律和理论的领域，“哥德巴赫猜想”正是数论中的一道证明题。目前，数学研究领域已发展到一百多个分支。）由于数论中的极大部分难题都已解决，只剩下少数几道极难的难题尚未解决，而“哥德巴赫猜想”又是其中最难的一题，二百几十年的研究实践证明，世界上没有哪个数学研究人员能为解决“哥德巴赫猜想”列出时间表，或者换一种说法是：专业研究“哥德巴赫猜想”的研究人员终身不出成果的可能性和现实性几乎是并行不悖的。据此，根据我国现行的科研制度，一个专业研究人员在自己的主攻课题上若两年不出成果的话，其感受到的

压力已经相当大，若三年、四年继续不出成果的话，那他非得改选课题不可，否则职位能否保住将会成为问题，甚至可能砸了自己的饭碗。面对社会现实，可以说一句，即使有不少数学专业研究人员曾一度将自己的热情倾注于“哥德巴赫猜想”的研究，但经过三、四年的一无所获之后，他们势必转移主攻课题，早已与“哥德巴赫猜想”拜拜了。这就是说，在我国，主攻“哥德巴赫猜想”的数学专业研究人员几乎已经很难找到了。上述情况，也许正是我国在“哥德巴赫猜想”研究领域中已有近二十年沉寂的原因吧。

笔者认为，当专业的数学研究人员纷纷远离“哥德巴赫猜想”的时候，倘若业余研究人员也不去占领这块阵地，那岂不等于完全放弃研究了吗？如果真的放弃了对这道难题的研究，这与我国是一个拥有十三亿人口的泱泱大国的地位是不相称的。当然，话得说回来，因为事实上我国业余界有志于攻克“哥德巴赫猜想”的研究人员并未消失殆尽，只是都在默默耕耘罢了。笔者作为一个业余研究人员，通过多年的研究实践，倒是认为业余人员研究“哥”题也有其独特的优势，不妨列举几项：

其一，业余研究人员往往是数学爱好者，对数学难题感兴趣是他们的特点。当了解了解决“哥”题的意义后，这种天然的兴趣加上解决“哥”题的意义就会变成一种巨大的热情和动力，在热情和动力的驱使下，他们会把对“哥”题的研究作为一种自觉的行动——没有人强迫他们，也没有人对他们提出要求。鉴于完全出于自愿和自觉，因此碰到困难时不会气馁，他们能做到持之以恒。其二，业余研究人员不需要国家负担科研经费，像陈景润当年那样，一张纸、一支笔、几本参考书照样可以长期研究，而这一点成本业余人员自己也承担得起。其三，业余研究人员无危机感，长期不出成果也无压力，失败了也不怕被人嘲笑，只要兴趣不减就能持之以恒。其四，业余研究人员没有门户、学派的束缚，头脑中没有框框，有利于开辟新的思路、创造新的方法。总而言之，笔者认为，业余爱好者研究“哥德巴赫猜想”更接近学术的本性，兼具追索真理和陶冶性灵之两者，其积极意义显然远远超过了消极方面，科研界、教育界、出版界给予适当的重视和支持是很有必要的。

笔者自小学起就喜好数学，初中阶段是学校

中数学重点培养的对象之一，高中一年级时因在学校高一、高二统一试题数学基础竞赛中得94分而获全校第一名，于是担任了数学课代表。总之，是一个数学爱好者。

1977年10月，笔者在《解放日报》上读了老作家徐迟的报告文学《哥德巴赫猜想》后，真是又惊奇又兴奋。惊奇的是，笔者第一次知道了世界上竟然还有“哥德巴赫猜想”这样的难题的存在，而且已经存在了二百几十年仍无人能最终证明它；兴奋的是，一位中国的数学家陈景润在攻克这道难题的竞赛中取得了世界领先的地位，并且轰动了世界，从而为国家、民族争了光，添了彩，笔者作为一个中国人很为之自豪；同时也使笔者了解到了这道难题的内容：原来是要求证明任意大的偶数都可以表示为二个素数之和。作为一个数学爱好者，当然对这道数学难题产生了强烈的兴趣。

鉴于“哥德巴赫猜想”是理解起来容易证明起来难，而研究“哥德巴赫猜想”只需一张白纸一支笔，于是，在读了徐迟报告文学的当天，笔者就一头扎进了研究“哥德巴赫猜想”的茫茫大海，从此一发而不可收。由于笔者未拜读过陈景润那篇曾

经震动过世界的《大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和》的华章,更未见识过陈景润以前的中外著名数学家们在研究“哥德巴赫猜想”的道路上留下的真知灼见,故在笔者的头脑中从一开始就没有任何框框,全凭自己的摸索和开拓。经过二、三年的不懈努力,笔者终于找到了世界上许许多多数学家为了攻克这道难题而奋斗了一生却仍一无所获的原因:真是太难太难了,说有多难就有多难,难过了蜀道上青天!二、三年的苦思冥想和绞尽脑汁竟一无所获,要不要继续研究下去,有没有信心继续研究下去,这是对人的意志的真正掂量,也是对自己的能力是否自信的无情考验。作为一个业余研究者,如果此时见难而退,望而却步,完全放弃对“哥德巴赫猜想”的研究,将是不会有任何损失的,而且能够摆脱烦恼,非常轻松。是什么力量使笔者反而知难而进的呢?是对数学的爱好,是对数学的兴趣,是“哥德巴赫猜想”的无穷魅力,是陈景润那几麻袋草稿纸精神的鼓舞;后来,在锲而不舍的道路上又加上了自己的几分幸运,终于,使笔者有所发现、有所创新……笔者终于创设了一个不同于陈景润的,也