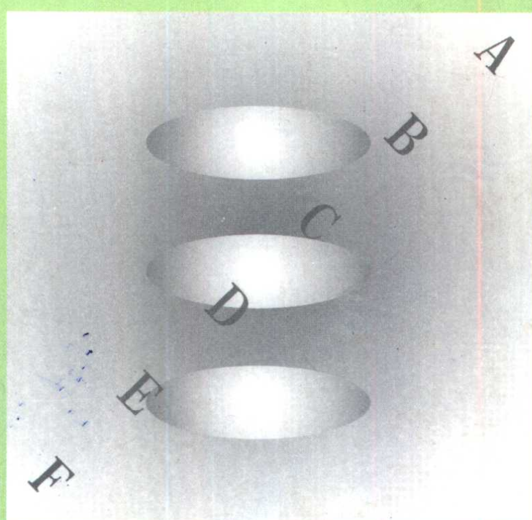
北京市高等教育学历文凭考试计算机专业教材

离散数学

檀凤琴　何自强　编著



科学出版社

北京市高等教育学历文凭考试计算机专业教材

离 散 数 学

檀凤琴 何自强 编著

科 学 出 版 社

内 容 提 要

本书是根据国务院发布的《高等教育自学考试暂行条例》以及北京市高等教育自学考试委员会制定的《高等教育学历文凭考试课程大纲》编写的，其内容的深度和广度符合大纲要求。

本书由四篇组成。第一篇数理逻辑，内容有：命题逻辑，一阶逻辑。第二篇集合论，内容有：集合的基本概念和运算，关系和函数。第三篇代数系统，内容有：代数系统概述，几种典型的代数系统。第四篇图论，内容有：图的基本概念，树，几类特殊图。

本书包括了离散数学各部分的基本内容，及其在计算机科学实际问题中的某些应用。本书概念清晰，叙述严谨精炼，语言通俗易懂，例题讲解详细，并有大量习题，便于读者自学。

本书由北京市高等教育自学考试委员会推荐使用，不仅可作为高等教育自学考试计算机专业文凭考试课程的理想教材，还可以作为各类高等专科学校、职工大学、职业大学、夜大学以及函授大学等大专类“离散数学”课程的教材与教学参考书。

图书在版编目(CIP) 数据

离散数学/檀凤琴，何自强编著.－北京：科学出版社，1999
(北京市高等教育学历文凭考试计算机专业教材)
ISBN 7-03-006819-X

Ⅰ.离… Ⅱ.①檀… ②何… Ⅲ.离散数学-高等教育-教材 Ⅳ.O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 16500 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
北京双青印刷厂 印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1999年2月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2000年1月第二次印刷 印张：15
印数：4 501－7 500 字数：341 000

定价：20.00 元

编 委 会 名 单

序

高等教育学历文凭考试，是我国高等教育事业发展过程中出现的一个新生事物。它是社会力量办学与国家考试相结合，以宽进严出、教考分离、全日制教学为特点的高等教育形式。这种形式从它产生之日起，就受到社会各界的重视和赞誉，认为它为我国社会主义经济建设对人才的大量需求又提供了一种培养手段，同时它也得到了国家有关领导同志的称赞，认为这是“穷国办大教育”的一条好的途径。北京在全国是最早进行这项试点工作的，目前有24所民办高校参加，开设的专业有16个，在校生3万余人，年均招生规模都在万人左右，其中计算机应用专业1997年成为招生规模最大的专业。经过五年的实践和总结，特别是结合国家为民办高等教育培养目标“应用性、职业性”定位的理解，我们感到，我市试点工作在发展过程中，基本建设做得还不够，这其中一个表现就是抓教材建设做得不够，特别是目前市场上还缺乏与高等职业技术教育相匹配的有关教材，导致目前参加文凭考试的民办学校在教学上基本上是借用普通高校的教材，因而教材与培养要求上的矛盾就尤显突出。

我们非常感谢的是，北京航空航天大学计算机系非常积极和认真地提出了要组织编写一套适合这种考试的教材的建议，并做了很具体的安排。北京航空航天大学的许多专家、教授克服了学校教学、科研任务繁忙的困难，按时、保质地完成了撰稿工作。同时此项工作也得到了科学出版社有关同志的大力配合，没有他们耐心、细致地做组稿和出版等工作，这套教材能这样快地面世是不可想象的。

经过各方的通力协作，今天这套教材终于可以奉献给大家了。我们觉得这套教材基本上体现了高等教育学历文凭考试计算机应用专业培养方向上的要求，在内容上也是科学、严谨的，我们同意把这套教材作为推荐使用的教材。同时，我们也希望社会各界对这套教材有什么意见和建议，能及时反馈给我们，以便使它不断完善。

谢谢大家。

北京市高等教育自学考试委员会办公室

1998年6月12日

前　言

近年来，计算机科学与技术正在以惊人的速度发展，对人类社会的各个领域产生着日益广泛和深入的影响。离散数学，作为计算机科学与技术的数学基础，也因此更加显示其重要性。离散数学是许多数学分支的总称，与它相对的是连续数学，如微积分、微分方程、实变函数论等，都属于连续数学的范畴。最近几十年来，由于离散数学在计算机科学与技术和其它许多学科中的广泛应用，促使离散数学得到了飞速的发展。离散数学在计算机科学与技术中的地位如同微积分在物理学和工程技术中的地位一样，为计算机科学与技术的发展奠定了数学基础。离散数学的基本思想、概念和方法广泛地渗透到计算机科学与技术的各个领域，其基本理论和研究成果全面而系统地影响和推动着计算机科学与技术的发展。例如，图灵机模型和可计算性理论为第一台电子计算机的诞生奠定了理论基础；布尔代数为开关电路的研究提供了分析工具，并导致了数字逻辑理论的建立；自动机理论对形式语言的编译产生了重大影响，并形成了完整的理论；谓词逻辑成为程序的语义理论和程序的正确性证明的重要研究工具；代数系统的理论被用于对数据结构的研究，产生了抽象数据类型的理论，代数系统的理论也成为编码理论的数学基础；平面图的理论用于印刷电路板的设计；图论的概念和理论广泛用于人工智能、操作系统、数据结构、数据检索等。离散数学成果的这些应用，使得它成为一个计算机科学工作者和工程师所必须具备的基本理论知识。对于计算机专业的学生来说，离散数学不仅是很多后续专业课程所必须的先修课，而且也为工科大学生提供了必要的抽象思维和严密推理的基本训练。

本书是根据"北京市高等教育学历文凭考试大纲"的要求编写的，它是"离散数学"课程的教材，也可供参加自学考试的读者及计算机技术人员学习参考。本书共分四篇，其中第一篇数理逻辑和第三篇代数系统由何自强编写，第二篇集合论和第四篇图论由檀凤琴编写。

根据大专学生和文凭考试的特点，本书着重于基本概念的阐述和应用，而不着重于定理的证明。本书第四章 4.9 节介绍集合的基数，超出了文凭考试大纲规定的范围，因此在该节的标题前加了 * 号，授课时可以跳过它。本书是编者在总结了多年教学经验的基础上编写的，对于初学者理解比较困难的概念和易犯的错误，讲解比较详细，并提供了较多的例题及解释，每章后都附有大量习题供读者练习。

由于水平所限，加之时间仓促，书中难免有不妥或错误之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

1998 年 10 月

目　　录

序
前言

第一篇　数理逻辑

第一章　命题逻辑 …… (3)
1.1　命题与联结词 …… (3)
1.2　命题公式与赋值 …… (7)
1.3　等值演算 …… (10)
1.4　联结词的全功能集 …… (15)
1.5　范式 …… (17)
1.6　推理理论 …… (25)
习题 …… (32)
第二章　一阶逻辑 …… (38)
2.1　一阶逻辑的基本概念 …… (38)
2.2　一阶语言及其解释 …… (43)
2.3　等值演算 …… (52)
2.4　前束范式 …… (56)
2.5　推理理论 …… (58)
习题 …… (65)

第二篇　集合论

第三章　集合的基本概念和运算 …… (71)
3.1　集合的基本概念 …… (71)
3.2　集合的运算 …… (74)
3.3　有限集合的计数 …… (79)
习题 …… (80)
第四章　关系和函数 …… (83)
4.1　有序偶和笛卡儿积 …… (83)
4.2　关系的表示法以及关系的性质 …… (85)
4.3　关系的运算 …… (90)
4.4　等价关系和划分 …… (96)
4.5　偏序关系 …… (99)
4.6　函数的基本概念及性质 …… (103)
4.7　函数的复合 …… (106)
4.8　反函数 …… (109)

*4.9 集合的基数 …… (110)
习题 …… (113)

第三篇 代数系统

第五章 代数系统概述 …… **(119)**
5.1 二元运算及其性质 …… (119)
5.2 代数系统 …… (124)
5.3 代数系统的同态和同构 …… (126)
习题 …… (128)
第六章 几种典型的代数系统 …… **(130)**
6.1 半群、幺半群和群 …… (130)
6.2 环和域 …… (137)
6.3 格和布尔代数 …… (139)
习题 …… (144)

第四篇 图 论

第七章 图的基本概念 …… **(151)**
7.1 无向图与有向图 …… (151)
7.2 通路、回路、图的连通性 …… (158)
7.3 带权图与最短通路 …… (161)
7.4 图的矩阵表示 …… (166)
习题 …… (172)
第八章 树 …… **(174)**
8.1 树与生成树 …… (174)
8.2 根树及其应用 …… (179)
习题 …… (191)
第九章 几类特殊图 …… **(193)**
9.1 欧拉图与哈密顿图 …… (193)
9.2 二部图 …… (198)
9.3 平面图 …… (203)
习题 …… (210)
索引 …… **(213)**
附录 北京市高等教育学历文凭考试“离散数学”课程考试大纲 …… **(221)**
参考文献 …… **(230)**

第一篇　数理逻辑

逻辑学是研究推理的科学，具有十分悠久的历史，在两千多年前的古希腊时代就已很发达。数理逻辑是数学化的逻辑学，是用数学方法研究推理的科学，其历史只有三百年。

德国数学家、哲学家莱布尼兹于17世纪中叶明确地提出了建立通用的符号语言和通用代数的思想。他指出，由于在通用语言中实现了彻底的符号化，其中的推理过程就表现为符号序列的变形，从而只要对此作出明确的规定，我们就可以按照这些规定机械地实行推理，正如人们在代数运算中按照明确的法则对代数式进行演算一样。我们最终所获得的就不仅是一种“通用语言”，而且也是一种“通用代数”。在这种符号语言中，思维被“演算化”了。莱布尼兹只是进行了一些初步的尝试，并没有实现他的关于通用符号语言和通用代数的设想，但是数理逻辑却是沿着他的设想的精神发展起来的。因此，人们公认莱布尼兹为数理逻辑的创始人。经过许多数学家和逻辑学家的努力，于19世纪末建立起了命题逻辑和谓词逻辑的演算系统。

近年来，数理逻辑在计算机科学中的重要地位已经被广大计算机工作者所认识。早在1936年，英国数理逻辑学家图灵就从理论上证明了可以设计出存储程序式计算机，这比世界上第一台电子计算机的诞生早了10年。逻辑中的不少成果可以用于计算机科学。例如，PROLOG语言就以一阶逻辑为基础，在程序验证、程序变换、程序综合、软件形式说明、程序设计语言的形式语义学、人工智能等方面，都大量地应用数理逻辑的概念、方法和理论。同时，计算机科学的发展也向数理逻辑提出了大量新的问题，促进了数理逻辑的繁荣。

命题逻辑和一阶谓词逻辑是数理逻辑中最成熟的部分，在计算机科学中应用最为广泛。因此，我们在离散数学课程中只学习命题逻辑和一阶谓词逻辑。

一切科学，不论是社会科学，还是自然科学，都离不开推理。正确的推理形式应当满足，从正确的前提出发，必然得出正确的结论。因此，要保证推出的结论正确，除了推理过程正确之外，还需要推理由之出发的前提正确。形式逻辑基本上采用自然语言研究推理。自然语言是丰富而生动的，但具有二义性，即一个词可以表达多种不同的意义，这为精确研究推理形式造成了困难。为了精确地表达思想，数理逻辑使用了特制的表意符号。因此，数理逻辑又被称为符号逻辑。数理逻辑是用数学方法研究推理形式的科学。

第一章　命题逻辑

本章讨论命题逻辑。命题逻辑是数理逻辑的最基础部分，谓词逻辑是在它的基础上发展起来的。命题逻辑的特征在于，在研究和考察逻辑形式时，把一个命题只分析到其中所含的命题成分为止，不再进一步分析下去，不把一个简单命题再分析为非命题成分的组合，不把谓词和量词等非命题成分分析出来。把一个简单命题再分析为非命题成分的组合，这是谓词逻辑要作的事情，我们在第二章再学习它。命题逻辑的规律反映复合命题的逻辑特征，复合命题是由简单命题和联结词构成的。我们首先讨论命题和联结词及它们的符号表示。

1.1　命题与联结词

命题是推理的基本要素。自然语言将**命题**表达为具有确定真假意义的陈述句。若该语句表达的意义符合事实，就称其为真命题。若该语句表达的意义不符合事实，就称其为假命题。我们用 0 表示假命题，用 1 表示真命题，称 0 和 1 为**真值**，并称 $\{0, 1\}$ 为**真值集合**，称假命题的真值为 0，真命题的真值为 1。

判断一个句子是否为命题，应首先判断它是否为陈述句，再判断它是否有唯一的真值。只有具有唯一真值的陈述句才是命题。

例 1.1　考察下列语句：

(1) 雪是白的。

(2) 2 是奇数。

(3) $x + y > 5$。

(4) 你是谁？

(5) 北京是中国的首都。

(6) 21 世纪时有人住在月球上。

语句 (1)，(2)，(5)，(6) 是命题，其中 (1)，(5) 是真命题，(2) 是假命题，(6) 的真值还不知道，但其有唯一的真值却是可以肯定的。语句 (3) 虽然是陈述句，但其真值不确定。若 $x = y = 3$，它为真；若 $x = y = 2$，它为假。所以，(3) 不是命题。语句 (4) 是疑问句，不是命题。

例 1.1 中的陈述句都是简单句，它们不能再分解成更简单的句子。简单陈述句表达的命题称为**简单命题**或**原子命题**。命题逻辑不再进一步分析简单命题的内部结构，用小写英文字母 p，q，r，s，t 等表示简单命题。下一章讨论谓词逻辑时，再分析简单命题的内部结构。由命题和联结词可以构成复合命题，其中的命题称为该复合命题的支命题。

例 1.2　考察下面的命题：

(1) 8 不是奇数。

(2) 2 和 3 都是偶数。

(3) 2 或 3 是偶数。

上面的命题都是复合命题。复合命题“8 不是奇数”由支命题“8 是奇数”和联结词“不”构成。复合命题“8 不是奇数”是真命题，因为支命题“8 是奇数”是假命题。联结词“不”只需一个支命题就可构成复合命题，因此我们称“不”为一元联结词。复合命题“2 和 3 都是偶数”由支命题“2 是偶数”和“3 是偶数”及联结词“和”构成，复合命题“2 和 3 都是偶数”是假命题，因为支命题“3 是偶数”是假命题。复合命题“2 或 3 是偶数”由支命题“2 是偶数”和“3 是偶数”及联结词“或”构成，复合命题“2 或 3 是偶数”是真命题，因为支命题“2 是偶数”是真命题。联结词“和”及“或”都是二元联结词，因为它们需要两个支命题才能构成复合命题。可以看出，复合命题的真值由支命题的真值和联结词共同决定。可以把联结词看做**真值函数**，即自变量是真值，函数值也是真值的函数。因为真值只有两个，即 0 和 1，因此可以把真值函数在自变量一切可能取值下的函数值列成表，这样的表称为**真值表**。一元真值函数只有一个自变量，其真值表有两行。共有四个一元真值函数，它们的真值表如表 1.1 所示。

表 1.1　一元真值函数的真值表

p	$F_1(p)$	$F_2(p)$	$F_3(p)$	$F_4(p)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

因为每个自变量的取值可以有两种选择，即 0 和 1，并且不同自变量的取值是独立的，因此二元真值函数的真值表有 4 行，而真值表的每一行的值可以取 1，也可以取 0，所以有 $2^4=16$ 个不同的二元真值函数。一般说来，n 元真值函数的真值表有 2^n 行，有 2^{2^n} 个不同的 n 元真值函数。

下面我们引进一些特定的符号来表示常用联结词。

定义 1.1　设 p 是命题。复合命题“非 p”称为 p 的**否定式**，记为 $\neg p$，$\neg$ 称为**否定联结词**。一元联结词 $\neg$ 的真值表如表 1.2 所示。

表 1.2　一元联结词 $\neg$ 的真值表

p	$\neg p$
0	1
1	0

定义 1.2　设 p，q 是命题。复合命题“p 并且 q”称为 p 与 q 的**合取式**，记为 $p \wedge q$，$\wedge$ 称为**合取联结词**。复合命题“p 或者 q”称为 p 与 q 的**析取式**，记为 $p \vee q$，$\vee$ 称为**析取联结词**。复合命题“p 或 q 恰有一个成立”称为 p 和 q 的**异或式**，记为 $p \overline{\vee} q$，$\overline{\vee}$ 称为**异或联结词**。复合命题“如果 p，则 q”称为 p 与 q 的**蕴涵式**，记为 $p \rightarrow q$，称 p 为蕴涵式的**前件**，q 为蕴涵式的**后件**，$\rightarrow$ 称为**蕴涵联结词**。复合命题“p 当且仅

当 q”称为 p 与 q 的**等价式**，记为 $p\leftrightarrow q$，$\leftrightarrow$称为**等价联结词**。二元联结词$\wedge$，$\vee$，$\overline{\vee}$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$的真值表如表 1.3 所示。

表 1.3　二元联结词$\wedge$，$\vee$，$\overline{\vee}$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$的真值表

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\overline{\vee} q$	$p\rightarrow q$	$p\leftrightarrow q$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1

否定联结词$\neg$相当于汉语中的“不”。例如，用 p 表示“今天天气好”，则“今天天气不好”可表示为$\neg p$。从$\neg$的真值表可以看出，$\neg p$ 和 p 的真值刚好相反。

合取联结词$\wedge$相当于汉语中的“并且”。汉语中的“既…，又…”，“不但…，而且…”，“虽然…，但是…”等都可以表示为$\wedge$。例如，用 p 表示“他聪明”，用 q 表示“他勤奋”，则 $p\wedge q$ 表示“他既聪明又勤奋”。由$\wedge$的真值表可以看出，$p\wedge q=1$ 当且仅当 $p=q=1$。

析取联结词$\vee$和异或联结词$\overline{\vee}$都相当于汉语中的“或者”。汉语中的“或者”有二义性，可以表达相容或，也可以表达排斥或。例如，“老王学过俄语或英语”中的“或”是相容或，因为如果老王既学过俄语也学过英语，这句话也是真的。“张三生于 1972 年或 1973 年”中的“或”是排斥或，因为“张三生于 1972 年”和“张三生于 1973 年”都真是不可能的。析取联结词$\vee$表达的是相容或。异或联结词$\overline{\vee}$表达的是排斥或。由$\vee$的真值表可以看出，$p\vee q=0$ 当且仅当 $p=q=0$。由$\overline{\vee}$的真值表可以看出，$p\overline{\vee} q=1$ 当且仅当 $p\neq q$。

蕴涵联结词$\rightarrow$相当于汉语中的“如果…，则…”，但与汉语中的“如果…，则…”有所区别。在日常语言中，只有“如果 p，则 q”中的 p 和 q 存在某种意义上的联系时，“如果 p，则 q”才是有意义的。例如，“如果太阳从西边出来，则雪是黑的”这句话是毫无意义的，因为“太阳从西边出来”和“雪是黑的”并无意义上的联系。实际上，日常语言中的“如果…，则…”并不简单地是一个联结词。在数理逻辑中，我们把$\rightarrow$定义为蕴涵联结词，只要 p 和 q 都是命题，不管它们是否有意义上的联系，$p\rightarrow q$ 都是一个命题。例如，如果用 p 表示“太阳从西边出来”，用 q 表示“雪是黑的”，则 $p\rightarrow q$ 表示一个真命题，因为 p 是一个假命题。假设一个父亲对孩子说：“如果明天天气好，我就带你去颐和园玩。”可能发生以下四种情况：

（1）明天天气不好，父亲没有带孩子去颐和园玩。

（2）明天天气不好，父亲带孩子去颐和园玩了。

（3）明天天气好，父亲没有带孩子去颐和园玩。

（4）明天天气好，父亲带孩子去颐和园玩了。

只有在第三种情况下，即明天天气好，但父亲并没有带孩子去颐和园玩，才可以说父亲骗了孩子。因此，我们规定 $p\rightarrow q=0$ 当且仅当 $p=1$ 且 $q=0$。可以看出，$p\rightarrow q$ 表达了 p 是 q 的充分条件，即 p 真 q 必然真，q 是 p 的必要条件，即 q 假 p 必然假。

等价联结词$\leftrightarrow$相当于汉语中的“当且仅当”。例如，用 p 表示“三角形 ABC 的三个角相等”，用 q 表示“三角形 ABC 的三条边相等”，则 $p\leftrightarrow q$ 表示“三角形 ABC 的三个角相等当且仅当三角形 ABC 的三条边相等”。可以看出，$p\leftrightarrow q$ 表达了 p 是 q 的充分必要条件。$p\leftrightarrow q=1$ 当且仅当 $p=q$。

$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\overline{\vee}$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$是六个最常用的联结词。我们用带或不带下标的 p，q，r，s，t 等小写英文字母表示简单命题，用它们和六个常用联结词组成的符号串表示复合命题，这个过程叫做**命题符号化**。

例 1.3 将下列命题符号化：

(1) 李明是计算机系的学生，他住在 312 室或 313 室。

(2) 张三和李四是朋友。

(3) 虽然交通堵塞，但是老王还是准时到达了车站。

(4) 李梅是三好学生或优秀团员。

(5) 老王或小李中有一人去上海出差。

解 (1)首先用字母表示简单命题。

p:李明是计算机系的学生。

q:李明住在 312 室。

r:李明住在 313 室。

因为李明只能住在一个房间里，所以“李明住在 312 室或 313 室”中的“或”是排斥或，复合命题“李明住在 312 室或 313 室”表示为 $q\overline{\vee}r$。命题“李明是计算机系的学生，他住在 312 室或 313 室”肯定了“李明是计算机系的学生”和“李明住在 312 室或 313 室”这两件事，因此该命题应该符号化为 $p\wedge(q\overline{\vee}r)$。

(2)“张三和李四是朋友”是一个简单句，如果把它拆成“张三是朋友”和“李四是朋友”，就不能成为意思完整的句子。因此，该命题可符号化为 p，其中 p 即表示简单命题“张三和李四是朋友”。

(3) 首先用字母表示简单命题。

p:交通堵塞。

q:老王准时到达了车站。

命题“虽然交通堵塞，但是老王还是准时到达了车站”肯定了“交通堵塞”和“老王准时到达了车站”这两件事，因此该命题可符号化为 $p\wedge q$。在“虽然交通堵塞，但是老王还是准时到达了车站”这句话中，“虽然…，但是…”表达了某种转折语气，这是命题逻辑中表达不出来的。命题逻辑只关心命题的真假，而不关心说话人的语气。

(4) 首先用字母表示简单命题。

p:李梅是三好学生。

q:李梅是优秀团员。

一个学生可以既是三好学生又是优秀团员，因此“李梅是三好学生或优秀团员”中的“或”是相容或，该命题可符号化为 $p\vee q$。

(5) 首先用字母表示简单命题。

p:老王去上海出差。

q:小李去上海出差。

因为老王和小李中只能有一人去上海出差,因此"老王或小李中有一人去上海出差"中的"或"是排斥或,该命题可符号化为 $p \overline{\vee} q$,也可符号化为$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$,或者$(p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$。

1.2 命题公式与赋值

下面我们正式定义表达复合命题的符号语言,即**命题语言**。首先需要指定语言所用的符号。汉语所用的符号是汉字和标点符号。从上节的命题符号化的例子可以看出,需要表示简单命题的符号,即命题符号,表示联结词的联结词符号,以及括号。命题符号分为两种。一种是带或不带下标的小写英文字母 p,q,r,s 等,它们可以用来表示任意命题,我们称其为**命题变元**,也称为**命题变项**。这相当于高等数学中的 x,y,z 等,只不过 x,y,z 等是实变元,取实数为值,而命题变元取真值0,1为值。另一种是表示假命题的0和真命题的1,我们称其为**命题常元**,这相当于高等数学中的实数。在汉语中,并非由汉字和标点符号组成的任何符号串都有意义,其中许多符号串是无意义的,只有按照汉语的语法规则构成的符号串,即句子才能表达完整的意义。在命题语言中,经过解释后有意义的符号串是**命题公式**,也称为**命题形式**。

定义 1.3 命题公式定义如下:

(1) 命题变元和命题常元是命题公式;

(2) 如果 A 是命题公式,则$(\neg A)$是命题公式;

(3) 如果 A 和 B 是命题公式,则$(A \wedge B)$,$(A \vee B)$,$(A \overline{\vee} B)$,$(A \rightarrow B)$,$(A \leftrightarrow B)$是命题公式;

(4) 只有有限次使用上面三条规则能够得到的符号串才是命题公式。

例如,$(\neg (p \vee q))$,$(p \rightarrow (q \rightarrow r))$,$((p \wedge q) \leftrightarrow r)$,0,$p$ 都是命题公式,而$(p \rightarrow)$,$p \vee \neg$ 都不是命题公式。我们将命题公式简称为公式。我们用大写英文字母 A,B,C 等泛指任意公式。为了确定$(\neg (p \vee q))$是公式,首先需要确定 $p,q,(p \vee q)$是公式。我们把 $p,q,(p \vee q)$以及公式$(\neg (p \vee q))$本身称为$(\neg (p \vee q))$的**子公式**。引进括号的目的是为了消除歧义。如果没有括号,$\neg p \vee q \wedge r$ 可以有以下五种不同的理解:$((\neg p) \vee q) \wedge r$,$(\neg (p \vee q)) \wedge r$,$\neg ((p \vee q) \wedge r)$,$\neg (p \vee (q \wedge r))$,$(\neg p) \vee (q \wedge r)$。但是一个公式中的括号太多也有缺点,会使人感觉眼花缭乱。例如,在公式$(((((((\neg p) \wedge q) \vee r) \vee q) \rightarrow p) \overline{\vee} q) \leftrightarrow r)$中有七对括号,看起来很乱。显然,去掉最外层的括号不会引起歧义。在高等数学中,为了减少括号,规定先乘除后加减,即乘除的优先级高于加减的优先级。同样,我们也可以规定联结词的优先级。我们引进省略括号的约定如下:

(1) 公式最外层的括号可省略;

(2) 规定联结词的优先级如下:$\neg$ 的优先级最高,$\wedge$,$\vee$,$\overline{\vee}$的优先级其次,$\rightarrow$,$\leftrightarrow$的优先级最低;

(3) 对于优先级相同的联结词,按照从左至右的顺序运算。

例如,按约定(1),去掉公式$(((((((\neg p) \wedge q) \vee r) \vee q) \rightarrow p) \overline{\vee} q) \leftrightarrow r)$的最外层括

号,将其简记为$((((((\neg p)\wedge q)\vee r)\vee q)\rightarrow p)\overline{\vee} q)\leftrightarrow r$;按约定(2),$\neg$ 的优先级高于 $\wedge$, $\vee$ 的优先级高于$\rightarrow$,$\overline{\vee}$的优先级高于$\leftrightarrow$,该公式进一步简记为$(((\neg p\wedge q)\vee r)\vee q\rightarrow p)\overline{\vee} q\leftrightarrow r$;按约定(3),该公式最终可简记为$(\neg p\wedge q\vee r\vee q\rightarrow p)\overline{\vee} q\leftrightarrow r$。

如果公式 B 是公式 A 的子串,则称 B 是 A 的子公式。例如,p, q, $p\wedge q$, $(p\wedge q)\rightarrow r$ 都是公式$(p\wedge q)\rightarrow r$ 的子公式。

一个含有命题变元的公式的真值是不确定的,只有为其中的每个命题变元指定了真值之后,它才成为命题。例如,若指定 $p=q=1, r=0$,则公式 $p\wedge q\rightarrow r$ 成为假命题;若指定 $p=q=r=0$,则公式 $p\wedge q\rightarrow r$ 成为真命题。

定义 1.4 设 $p_1,\cdots,p_n$ 是公式 A 中出现的所有命题变元,为 $p_1,\cdots,p_n$ 指定的一组真值称为对 A 的**赋值**。若指定的一组真值使 A 成为真命题,则称这组值为 A 的**成真赋值**。若指定的一组真值使 A 成为假命题,则称这组值为 A 的**成假赋值**。

习惯上,我们常用由 0 和 1 组成的序列表示赋值。如果公式 A 中出现 n 个命题变元 $p_1,\cdots,p_n$,则序列 $a_1\cdots a_n$ 表示赋值 $p_1=a_1,\cdots,p_n=a_n$。例如,010 表示公式 $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 的赋值 $p=r=0, q=1$。

正如在高等数学中可以用公式 x^2 定义平方函数一样,在命题逻辑中也可以用公式定义真值函数,例如公式 $p\rightarrow(q\rightarrow r)$定义三元真值函数 $F(p,q,r)=p\rightarrow(q\rightarrow r)$,因此每个公式都可以看做一个真值函数,可以列公式的真值表。为了求出公式 A 在某一赋值下的真值,首先需要求出 A 的所有子公式在该赋值下的真值。因此,在 A 的真值表中也需列出其子公式的真值。容易看出,如果公式 A 中出现 n 个命题变元,因为每个命题变元的取值有两种选择,即可以取值 0,也可以取值 1,并且每个命题变元的取值是互相独立的,因此 A 共有 2^n 个不同的赋值,A 的真值表有 2^n 行。在列公式 A 的真值表时,最好按某种顺序列出 A 的赋值,例如可将赋值看做二进制数,按照从小到大的顺序列出赋值。这样可以防止漏掉某些赋值,或者重复列出某些赋值。例如在公式 $p\rightarrow(q\rightarrow r)$中出现了三个命题变元 p, q, r,可将其赋值排列为 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111。公式 $p\rightarrow(q\rightarrow r)$的真值表如表 1.4 所示。

表 1.4 公式 $p\rightarrow(q\rightarrow r)$的真值表

p	q	r	$q\rightarrow r$	$p\rightarrow(q\rightarrow r)$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

例 1.4 求公式$(p\rightarrow q)\rightarrow p\wedge q$ 的成真赋值和成假赋值。

解 列公式$(p\to q)\to p\wedge q$的真值表如表1.5所示。

表1.5 公式$(p\to q)\to p\wedge q$的真值表

p	q	$p\to q$	$p\wedge q$	$(p\to q)\to p\wedge q$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

由公式$(p\to q)\to p\wedge q$的真值表可以看出,它的成真赋值是10,11,成假赋值是00,01。

定义1.5 如果公式A的每个赋值都是成真赋值,则称A为**永真式**,也称为**重言式**。如果公式A的每个赋值都是成假赋值,则称A为**永假式**,也称为**矛盾式**。如果公式A的赋值中至少有一个是成真赋值,则称A为**可满足式**。

显然,永真式都是可满足式,但可满足式却未必是永真式,例如公式$p\to(q\to r)$是可满足式,却不是永真式。一个公式A是可满足式当且仅当A不是永假式,$\neg A$是永真式当且仅当A是永假式。可以通过公式A的真值表判断A是不是永真式、永假式、可满足式。如果A的真值表的最后一列都是1,则A是永真式;如果A的真值表的最后一列都是0,则A是永假式;如果A的真值表的最后一列中至少有一个1,则A是可满足式。因此,如果A的真值表的最后一列中既有1,又有0,则A是非永真的可满足式。例如,公式$p\to(q\to r)$和$(p\to q)\to p\wedge q$都是非永真的可满足式。

例1.5 用真值表判断公式$(p\to q)\to((q\to r)\to(p\to r))$的类型,即确定它是不是永真式、永假式、可满足式。

解 列公式$(p\to q)\to((q\to r)\to(p\to r))$的真值表如表1.6所示。

表1.6 公式$(p\to q)\to((q\to r)\to(p\to r))$的真值表

p	q	r	$p\to q$	$q\to r$	$p\to r$	$(q\to r)\to(p\to r)$	$(p\to q)\to((q\to r)\to(p\to r))$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

在公式$(p\to q)\to((q\to r)\to(p\to r))$的真值表中,最后一列全为1,所以该公式是永真式。

例1.6 用真值表判断公式$\neg(q\to p)\wedge p$的类型。

解 列公式$\neg(q\to p)\wedge p$的真值表如表1.7所示。