逻辑代数

廖祖纬　张锦文　编著

科学出版社

1984

内 容 简 介

本书阐述了逻辑代数的基本内容，同时注意到了它同工程数学、离散数学的联系，也注意到了它的应用以及它与中学数学中的有关内容的联系.

本书作为中央广播电视大学一九八二级中学数学教师进修学员的教学用书，也可供数学和计算机专业的大专学生、工程技术人员阅读.

逻 辑 代 数

廖祖纬 张锦文 编著

责任编辑 毕 颖

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1984年11月第一版 开本：787×1092 1/32

1984年11月第一次印刷 印张：7 1/2

印数：0001—50,000 字数：146,000

统一书号：13031·2710

本社书号：3728·13—1

定价： 1.20 元

前　言

逻辑代数亦称布尔代数，是数理逻辑的一个初等部分．它开始于莱布尼兹试图用数学方法研究思维规律，把思维过程、推理过程计算化．英国数学家、逻辑学家布尔在他的《逻辑的数学分析》(1847 年) 和《思维规律考察》(1854 年) 中建立了第一个思维演算．本世纪三十年代人们把逻辑代数应用于电子线路，为电子计算机逻辑线路的分析与设计提供了有力的工具．

当今，电子技术与信息系统的研究及其应用对人类产生着越来越大的影响．计算机已广泛地应用于科学技术和社会生活的各个方面，对发展生产、繁荣经济起着巨大的促进作用．广大科技人员，青少年都在学习计算机的语言和程序．

随着人类大量思维过程的机械化、计算化的日益发展，逻辑代数的应用也在发展．除了在计算线路设计方面继续发挥重要的作用外，它还是研制计算机软件的基础知识和重要工具．学习逻辑代数既可以提高人的思维能力，使其思维清晰化、严谨化，又可以为掌握计算机科学打下初步基础．

本书初稿曾在 1983 年河北省数学会主办的讨论班上、江西省广播电视大学主办的讲习班上作了试讲．参加这两个班的学员是来自全国 21 个省、市、自治区的师范学院、教育学

院、师范专科学校和广播电视大学的部分教师，他们认真地阅读了本书初稿，并提出了宝贵的建议．上海师范学院应制夷先生审阅了本书初稿，并提出了宝贵意见；河北省保定师范专科学校张石铭先生；江西省广播电视大学徐俊先生；北京市教育学院西城分院张纯兰先生；以及中央广播电视大学数学组的全体老师都给予了热情的帮助和支持，在此一并表示衷心的感谢．

由于作者水平所限，书中错误缺点在所难免，敬请读者批评指正。

目　　录

前言…………………………………………………………………… iii
第一章　逻辑代数的基本知识………………………………… 1
§1　基本概念 ……………………………………………… 1
§2　运算规律 ……………………………………………… 7
§3　基本公式 ……………………………………………… 15
§4　逻辑式的转换定理 …………………………………… 18
§5　逻辑函数的完备性 …………………………………… 26
第二章　逻辑式的范式和标准范式……………………… 32
§1　逻辑式的范式 ………………………………………… 32
§2　逻辑式的标准范式 …………………………………… 35
§3　标准范式定理 ………………………………………… 43
第三章　逻辑式化简……………………………………………… 50
§1　最简式概念 …………………………………………… 50
§2　公式化简法 …………………………………………… 54
§3　化简理论 ……………………………………………… 62
§4　图域化简法(几何化简法) …………………………… 73
第四章　逻辑方程……………………………………………… 86
§1　基本概念 ……………………………………………… 86
§2　逻辑方程的解法 ……………………………………… 89
§3　逻辑方程组的求解 …………………………………… 97
§4　逻辑方程的图域解法 ………………………………… 102
第五章　开关代数……………………………………………… 108

§1　开关与开关线路 …………………………………… 108
§2　逻辑函数与逻辑线路 ………………………………… 116
§3　逻辑函数的完备性分析 ……………………………… 131
第六章　命题真值代数…………………………………… 138
§1　基本概念 ………………………………………… 138
§2　蕴涵式与双蕴涵式 …………………………………… 148
§3　全称命题与特称命题 ………………………………… 157
第七章　命题逻辑…………………………………………… 166
§1　推理 ……………………………………………… 166
§2　基本的演绎推理系统 P ……………………………… 169
§3　斜式证明与形式定理 ………………………………… 174
§4　扩大的演绎推理系统 P* …………………………… 184
§5　数学归纳法 ……………………………………… 193
§6　证明综述 ………………………………………… 204
第八章　一般布尔代数…………………………………… 211
§1　布尔代数 ………………………………………… 211
§2　集合代数 ………………………………………… 219
§3　命题代数 ………………………………………… 224
§4　事件代数 ………………………………………… 226
结束语………………………………………………… 232
参考文献……………………………………………… 234

第一章　逻辑代数的基本知识

逻辑代数是十九世纪中期英国数学家布尔（G. Boole, 1815－1864）为把逻辑思维数学化而创立的一门介于代数与逻辑之间的边缘学科。因此，逻辑代数也叫布尔代数。严格说来，本书前七章主要是讨论二值布尔代数，最后一章才是一般的布尔代数。

§1　基本概念

1.常元、变元和运算

大家知道，初等代数是用文字 $a, b, c, \cdots$ 代替实数集合 R 中的元素，通过四则运算而形成的一个运算系统，记作 $\langle R, +, -, \cdot, /\rangle$. 类似地，二值布尔代数是用文字 $A, B, C, \cdots$ 代替数集合 $\{0, 1\}$ 中的元素，通过 $+, \cdot, '$ 这三种运算而形成的一个运算系统，记作 $\langle\{0, 1\}, +, \cdot, '\rangle$.

在数集合 $\{0, 1\}$ 上的运算 $+, \cdot, '$ 叫做逻辑运算，分别读作或、与、非，具体规定为:

+	0	1
0	0	1
1	1	1

·	0	1
0	0	0
1	0	1

X	X'
0	1
1	0

显然，运算$+$，$\cdot$，$'$在$\{0, 1\}$上是封闭的.

定义 1.1 集合$\{0, 1\}$叫做逻辑值集合. 0 和 1 叫做逻辑常元. 在$\{0, 1\}$上取值的变元叫做逻辑变元，用A，B，C，$\cdots X$，Y，Z表示.

2.逻辑式

逻辑式可以解释成由常元、变元和运算符号所组成的代数式. 归纳定义如下：

定义 1.2 逻辑式，系指：

(1) 0 是逻辑式；

(2) 1 是逻辑式；

(3) 任一逻辑变元是逻辑式；

(4) 若F是逻辑式，则F'也是逻辑式；

(5) 若F、G是逻辑式，则$F+G$，$F\cdot G$都是逻辑式；

(6) 仅(1)—(5)是逻辑式.

例如，1，A，A'，$A+B$，$A+B\cdot C$都是逻辑式，但$A++B$，$A+\cdot B$，$A+'+B$都不是逻辑式.

含有n个逻辑变元的逻辑式叫做n元逻辑式，记作$F(A_1, A_2, \cdots, A_n)$，有时简记作F.

例如，$F(A, B)=A\cdot B+A'B'$；

$$F(A, B, C)=A\cdot(B'+C).$$

与算术中规定先乘除、后加减的运算次序相类似，在逻辑式中的运算次序规定为：

$$',\ \cdot,\ +$$

对于“与”运算符号“$\cdot$”也可以省略.

例如，$(AC+A'D)'+BD$ 的运算次序为：

(1) 由括号中的 A' 开始，即由 A 求出 A'；

(2) 由 A 与 C 求出 AC，同时由 A' 与 D 求出 $A'D$；

(3) 由 AC 与 $A'D$ 求出 $AC+A'D$；

(4) 由 $AC+A'D$ 求出 $(AC+A'D)'$；

(5) 由 B 与 D 求出 BD；

(6) 由 $(AC+A'D)'$ 与 BD 求出 $(AC+A'D)'+BD$.

此过程可用树形分解如下：

$$
\begin{array}{c}
(AC+A'D)'+BD \\
(AC+A'D)' \qquad BD \\
| \qquad\qquad\qquad B \quad D \\
AC+A'D \\
AC \qquad\qquad A'D \\
A \quad C \qquad\quad A' \quad D \\
| \\
A
\end{array}
$$

利用树形分解可以判断一串符号是否是一个逻辑式.

例如，$((A+B)\cdot(A'+B\cdot C)+D$ 可按下述分解

$$
\begin{array}{c}
((A+B)\cdot(A'+B\cdot C)+D \\
((A+B)\cdot(A'+B\cdot C) \qquad D \\
(A+B \qquad\qquad\qquad A'+B\cdot C \\
(A \quad B \qquad\qquad\qquad A' \qquad B\cdot C \\
| \qquad\quad B \quad C \\
A
\end{array}
$$

其中 $(A$ 与定义 1.2 不符，故上式不是一个逻辑式.

定义 1.3 逻辑式的值，系指逻辑式所含诸变元 A_1，$A_2,\cdots,A_n$ 分别取 0 或 1 值，并按该式所含逻辑运算求出的

值.

例 1.1 试计算下列逻辑式的值:

(1) $A(B'+C)$, 其中 $A=1$, $B=0$, $C=1$;

(2) $(AC+A'D)'+BD$, 其中 A, B, C 同(1), $D=1$.

解 (1)
$$\begin{aligned} A(B'+C) &= 1\cdot(0'+1) \\ &= 1\cdot(1+1) \\ &= 1\cdot 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} (AC+A'D)'+BD &= (1\cdot 1+1'\cdot 1)'+0\cdot 1 \\ &= (1+0\cdot 1)'+0 \\ &= (1+0)'+0 \\ &= 1'+0 \\ &= 0+0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

由逻辑运算在{0,1}上的封闭性得知:任一逻辑式仅有0或1值.

定义 1.4 逻辑式的真值表,系指该逻辑式所含诸变元的全体取值组连同逻辑式的相应值一起列成的数表.

例如, $A+B'$ 的真值表为

A	B	$A+B'$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

定义 1.5 两逻辑式相等,系指两逻辑式 F 和 G 满足条

件：对于诸变元的任一组取值，其相应的值都相等，记作 $F=G$.

注意，逻辑式 F 和 G 所含变元并不要求一样．例如：

(1) $F:=A+A'$ 和 $G:=1$ 相等，F 含有变元 A，而 G 不含变元.

(2) $F:=A+AB$ 和 $G:=A$ 相等，F 含有变元 A,B，而 G 只含变元 A.

(3) $F:=A'B+A'B'+A'C$ 和 $G:=A'$ 相等，F 含有变元 A，B，C，而 G 只含变元 A.

重要性质 两逻辑式相等，当且仅当其真值表完全相同.

证 设给定的两逻辑式 F 和 G 所含变元 $A_1, A_2, \cdots, A_n$. 由于每一变元仅取 0 或 1 值，故 n 个变元可列出 2^n 组不同的取值．因 $F=G$，所以对于这 2^n 组取值，F 和 G 的相应值都相等．因此，它们的真值表相同．反之，不难由定义证得.

例 1.2 试证下列逻辑等式成立：

(1) $A+B=B+A$;

(2) $A(B+C)=AB+AC$;

(3) $A+0=A$;

(4) $A+A'=1$.

证 (1)∵

A	B	$A+B$	$B+A$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

$$\therefore \qquad A + B = B + A.$$

(2) $\because$

A	B	C	$A(B+C)$	$AB+AC$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

$$\therefore \qquad A(B + C) = AB + AC.$$

(3) $\because$

A	$A+0$	A
0	0	0
1	1	1

$$\therefore \qquad A + 0 = A.$$

(4) $\because$

A	$A+A'$	1
0	1	1
1	1	1

$$\therefore \qquad A + A' = 1.$$

上述证法叫做真值表方法,用它还可证明:

(1) $AB = BA$;

(2) $A + BC = (A + B)(A + C)$;

(3) $A \cdot 1 = A$;

(4) $A \cdot A' = 0$.

综上所述，二值布尔代数$<\{0,1\},+,\cdot,'>$是指：

(1) 逻辑值集合$\{0,1\}$为基础集合；

(2) 运算$+,\cdot,'$在$\{0,1\}$上封闭；

(3) 运算$+,\cdot,'$满足四条基本运算规律：

A_1 交换律

$$A+B=B+A,$$

$$AB=BA.$$

A_2 分配律

$$A(B+C)=AB+AC,$$

$$A+BC=(A+B)(A+C).$$

A_3 么元律

$$A+0=A,$$

$$A\cdot 1=A.$$

A_4 互补律

$$A+A'=1,$$

$$A\cdot A'=0.$$

二值布尔代数是一般布尔代数的特例。

§2 运算规律

在逻辑代数中，除上节四条基本运算规律外，还有下述一些重要的运算规律。

T_0 极元律

$$A+1=1,$$

$$A \cdot 0 = 0.$$

这里将 0，1 分别看成 $\{0, 1\}$ 的极小、极大元素.

T_1 结合律

$$A + (B + C) = (A + B) + C,$$

$$A(BC) = (AB)C.$$

T_2 幂等律

$$A + A = A,$$

$$AA = A.$$

T_3 双否律

$$A'' = A.$$

T_4 反演律 (De Morgan 律)

$$(A + B)' = A'B',$$

$$(AB)' = A' + B'.$$

T_5 吸收律

$$A + AB = A,$$

$$A(A + B) = A.$$

T_6 重叠律

$$A + A'B = A + B,$$

$$A(A' + B) = AB.$$

T_7 消去律

$$AB + AB' = A,$$

$$(A + B)(A + B') = A.$$

T_8 舍弃律

$$AB + A'C + BC = AB + A'C,$$

$$(A+B)(A'+C)(B+C)=(A+B)(A'+C).$$

上述诸等式可分别用真值表方法验证，也可从 $A_1—A_4$ 出发进行推证. 在推证过程中，还要引用下述辅助公式和结果：

L_1 $A+A(BC)=A+(AB)C$,

$A[A+(B+C)]=A[(A+B)+C]$.

L_2 $A'+A(BC)=A'+(AB)C$,

$A'[A+(B+C)]=A'[(A+B)+C]$.

L_3 若 $A+X=1$，又 $AY=0$，则 $X=Y+X$.

L_4 若 $A+X=1$，又 $AX=0$，则 $X=A'$.

从 $A_1—A_4$ 出发的整个证明次序如图 1.1 所示.

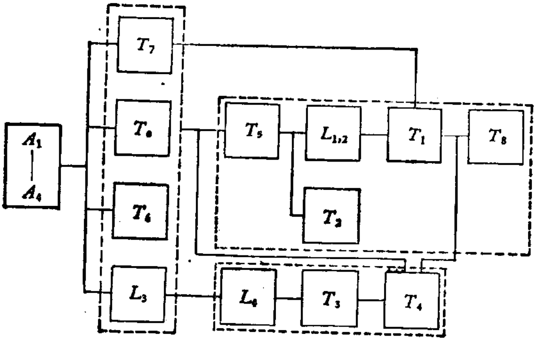

图 1.1

下面用⊢表示可证，⊣表示证毕.

1. $A_1-A_4\vdash T_0, T_6, T_7, L_3$

证 (1) $\vdash T_0$ $A+1=1$

$$A+1\overset{A_3}{=}(A+1)\cdot 1$$

$$\overset{A_4}{=} (A+1)(A+A')$$

$$\overset{A_2}{=} A+1\cdot A'$$

$$\overset{A_1}{=} A+A'\cdot 1$$

$$\overset{A_3}{=} A+A'$$

$$\overset{A_4}{=} 1. \qquad \dashv$$

读者自证 $A\cdot 0=0$.

(2) $\vdash T_6 \quad A+A'B=A+B$

$$A+A'B \overset{A_2}{=} (A+A')(A+B)$$

$$\overset{A_4}{=} 1\cdot(A+B)$$

$$\overset{A_1}{=} (A+B)\cdot 1$$

$$\overset{A_3}{=} A+B. \qquad \dashv$$

读者自证 $A(A'+B)=AB$.

(3) $\vdash T_7 \quad AB+AB'=A$.

$$AB+AB' \overset{A_2}{=} A(B+B')$$

$$\overset{A_4}{=} A\cdot 1$$

$$\overset{A_3}{=} A. \qquad \dashv$$

读者自证 $(A+B)(A+B')=A$.

(4) $\vdash L_3$ 若 $A+X=1$，又 $AY=0$，则 $X=Y+X$.

$$X \overset{A_3}{=} X+0$$

$$\overset{②}{=} X+AY$$

$$\overset{A_2}{=} (X + A)(X + Y)$$

$$\overset{A_1}{=} (A + X)(X + Y)$$

$$\overset{①}{=} 1 \cdot (X + Y)$$

$$\overset{A_1}{=} (X + Y) \cdot 1$$

$$\overset{A_3}{=} X + Y. \qquad \dashv$$

2. $A_1 - A_4,\ T_0,\ T_7 \vdash T_5,\ T_2,\ L_1,\ L_2,\ T_1,\ T_8.$

证 (1) $\vdash T_5 \quad A + AB = A.$

$$A + AB \overset{A_3}{=} A \cdot 1 + AB$$

$$\overset{A_2}{=} A(1 + B)$$

$$\overset{A_1}{=} A(B + 1)$$

$$\overset{T_0}{=} A \cdot 1$$

$$\overset{A_3}{=} A. \qquad \dashv$$

读者自证 $A(A + B) = A.$

(2) $\vdash T_2 \quad A + A = A.$

$$A + A \overset{A_3}{=} A + A \cdot 1$$

$$\overset{T_5}{=} A. \qquad \dashv$$

读者自证 $AA = A.$

(3) $\vdash L_1 \quad A + A(BC) = A + (AB)C.$

$$A + A(BC) \overset{T_5}{=} A$$

$$\overset{T_5}{=} A(A + C)$$