SPT 21世纪高等院校教材

理工类

高等代数与解析几何

华中科技大学
王心介 编著

4

科学出版社

21世纪高等院校教材(理工类)

高等代数与解析几何

华中科技大学

王心介 编著

科学出版社

2002

内 容 简 介

本书将高等代数与解析几何融为一体,合并作一门课程,使这两个关系十分密切的学科得到了很好的结合.

本书内容包括一元多项式,行列式,矩阵理论,线性方程组理论,线性空间与线性变换,相似标准形理论,内积空间,双线性型与二次型,几何空间中的向量,二次曲线与二次曲面,仿射几何与射影几何.

本书读者对象为数学与应用数学专业、信息与计算科学专业本科生及教师.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数与解析几何/王心介编著.—北京:科学出版社,2002.1
(21世纪高等院校教材(理工类))
ISBN 7-03-009055-1

Ⅰ.高… Ⅱ.王… Ⅲ.①高等代数-高等学校-教材②解析几何-高等学校-教材 Ⅳ.①O13②O182

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第078061号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年1月第 一 版 开本:720×1000 1/16
2002年1月第一次印刷 印张:23 1/2
印数:1—3 000 字数:424 000

定价:35.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈北燕〉)

前 言

本书是根据作者近几年来在华中科技大学数学系讲授的高等代数与解析几何课程的讲稿的基础上编写而成的.

在编写本书时，我们有以下的一些考虑：

一、充分考虑到高等代数与解析几何是两门独立的学科，但彼此间的联系又非常紧密，所以合编一本书时，我们并不过分追求所谓结合的完美，而是在保持两者内容相对独立的基础上，尽可能加强它们之间的联系和渗透.本书中的解析几何内容都是独立成章的，但又不是先几何后代数或者先代数后几何，而是将解析几何的一部分内容，如向量代数、平面与直线放在向量空间 K^n 与线性方程组之前.而另一部分内容，如二次曲面、仿射几何与射影几何放在双线性型与二次型之后.这种安排不仅做到了解析几何内容的相对独立，不致于过于分散，而且也做到了既可以利用几何的直观使抽象的代数概念、理论变得容易接受，又可以利用代数的方法使某些几何问题变得容易处理，体现出两门学科之间的联系和渗透.

二、充分考虑到高等代数与解析几何都是大学数学系的主要基础课，所以在编写此书时，我们始终强调基本概念、基本理论和基本方法，而且力图把某些基本内容写得详细一些，希望通过认真地学习和思考，使学生把有用的基础知识真正学到手，但又不排斥在某些适当场合，恰到好处地介绍一些新的思想和新的方法.比如，利用向量空间 K^n 和矩阵的秩建立线性方程组的理论，虽然抽象一些，但却简明扼要，而且也为以后解决某些矩阵问题提供了方便，减少了困难.又比如，为了深刻揭示代数与几何的内在联系，我们强调若尔当（Jordan）标准形与空间分解的联系，既避免了在教学过程中经常看到的会求矩阵的若尔当标准形，而相应的几何意义一无所知，又避免了几何问题清清楚楚，而相应的标准形也一无所知的弊端.在讲授双线性型与二次型时，我们首先介绍双线性型、对称双线性型，而不是二次型，而是把二次型作为对称双线性型的特例，介绍完二次型理论之后，我们又比较详细地讨论了二次曲面的分类，应该说给予了相当的重视.又比如，为了体现理论的应用，在讲完内积空间的基本理论之后，我们比较详细地介绍了最小二乘方问题以及矩阵的奇异值分解和广义逆.再比如，在本书的最后一章，为了加深学生对形的深刻认识，我们简单地介绍了仿射和射影几何的基本知

识，所有这些都是为了开阔学生的视野，提高学生的素质，培养学生的创新精神.

三、线性代数是高等代数的主体部分，它由矩阵论、线性空间与型论组成. 三者之间的联系十分密切，主要表现为线性代数中的许多问题在这三部分中的每一部分都有等价的说法，因此在编写此书时，我们一直强调从一种说法到另一种说法的叙述及推导. 教学实践证明，这对于深刻揭示问题的本质，加深对线性代数中基本概念、基本理论、基本方法的理解和掌握，培养学生的能力是很有帮助的. 当然，我们也充分地注意到，在教材中尤其要体现各自的特色，矩阵论主要是突出它的计算和技巧；线性空间主要是突出它的抽象性，深刻揭示问题的本质；型论主要是突出它与几何的联系.

四、本书每节都配有相当数量的习题，其中的大部分是为了使学生深刻理解基本概念，善于应用基本理论，熟练掌握基本方法；另一部分则是为了培养学生刻苦钻研数学的精神，提高解决数学难题的能力，为以后从事科研工作打下基础.

本书的编写及出版得到我校“重点教材出版”项目经费的资助，也得到教务处及数学系的关心和支持，徐巨镛、杨明、刘先忠、毕志伟提出不少好的建议，科学出版社对本书的出版作了认真细致的编辑工作，在此一并表示感谢.

把高等代数与解析几何合为一门课程，是数学课程改革的一种尝试，虽然编者尽了最大努力，但限于经验和学识，书中缺点和错误在所难免，敬请专家、同行和读者批评指正.

王心介

2001 年 6 月于华中科技大学

目　　录

第一章　一元多项式

多项式是代数学的一个基本内容，它的不少结果对于求矩阵的标准形具有重要作用.

§1.1　数　　域

高等代数中所研究的问题，都与一个事先规定的数的集合有关，换句话说，同一问题对不同的数的集合而言，其结果常常是不同的.

在我们所熟悉的数的集合中，有全体有理数的集合 Q，全体实数的集合 R 及全体复数的集合 C，它们都具有一个共同的性质，即对这些集合中的任意两数进行加、减、乘、除(除数不能为零)四种运算时，其结果仍分别属于这些集合.具有这性质的集合并不只这三个，为一般化起见，我们引入

定义 1.1.1　设 K 是一些数组成的集合，若

(1) K 中至少含有一个非零的数；

(2) 对 K 中任意两数 a,b，恒有 $a+b,a-b,ab\in K$，而且当 $b\neq 0$ 时，还有 $\frac{a}{b}\in K$，则 K 就叫做一个数域.

因而，有理数集 Q，实数集 R 及复数集 C 都是数域，并分别叫做有理数域、实数域和复数域.

若对集合 K 中任意两数作一运算，其结果仍属于 K，我们便说集合 K 对于这一运算是封闭的.因而数域的定义又可以说成是，设 K 中至少含有一个非零的数，并且 K 对加、减、乘、除(除数不能为零)四种运算封闭，则叫 K 是一个数域.

例 1　若 $K=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Q\}$，则 K 是一个数域.

证明　因 $1=1+0\sqrt{2}\in K$，故(1)成立.又设 $a+b\sqrt{2},c+d\sqrt{2}\in K$，则有

$$(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$$

由于 a,b,c 和 d 都属于 Q，所以 $a+c\in Q,b+d\in Q$，于是 $(a+c)+(b+d)\times\sqrt{2}\in K$，从而 $(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})\in K$.类似地，

$$(a+b\sqrt{2})-(c+d\sqrt{2})\in K,(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})\in K.$$

余下证明$\dfrac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}\in K$,其中$c+d\sqrt{2}\neq 0$.利用$c+d\sqrt{2}\neq 0$,我们可断定$c-d\sqrt{2}\neq 0$.否则,$c=d\sqrt{2}$.由此,若$d=0$,有$c=0$,这与$c+d\sqrt{2}\neq 0$矛盾;若$d\neq 0$,有$\sqrt{2}=\dfrac{c}{d}\in Q$,这与$\sqrt{2}$是无理数矛盾,因而

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}$$
$$=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}\in K$$

所以(2)成立.根据定义,K是一个数域.

关于数域,我们指出以下两条性质:

(1)任意一个数域K必含0与1.

证明　设a为K中任意数,则由定义知,$a-a\in K$,即$0\in K$.又设b为K中非零的数,于是,由定义又有$\dfrac{b}{b}\in K$,即$1\in K$.

(2)任何数域K都包含有理数域Q.

证明　根据性质(1),$1\in K$.用1和它自己重复相加,可得全体正整数,所以全体正整数的集合包含于K.又$0\in K$,所以K含有零与任一正整数的差,即所有负整数的集合包含于K,因而所有整数的集合包含于K.由此又有任意两个整数的商(分母不能为零)属于K,因而全体有理数的集合包含于K,即K包含有理数域Q.由此可知有理数域是一个最小的数域.

习　题

1. 设$S=\{a+bi\mid a,b\in Q\}$.试证S是一数域.
2. $S=\left\{\dfrac{m}{2^n}\mid m,n\in Z\right\}$是不是数域?
3. 试证两个数域的交仍为数域.

§1.2　一元多项式

设K是数域,x是一个符号(文字).

定义 1.2.1　形式表达式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

其中n是非负整数,$a_i\in K$,称为数域K上的一元多项式,a_i称为它的第i个系数.若$a_i=0(i=0,1,2,\cdots,n)$则称$f(x)$是零多项式,记作$f(x)=0$,它的

次数不予定义. 若 n 是使 $a_n \neq 0$ 的最大整数,则称 $f(x)$ 是 n 次的,记作 $\deg f(x)=n$. 数域 K 上所有一元多项式的集合用 $K[x]$ 表示. 注意:符号 $x \notin K$,不受任何限定,常称未定元.

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有完全相同的项,或只差一些系数为零的项,则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等. 设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

如果 $m \leqslant n$,那么 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和定义为

$$f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

其中 $b_n = b_{n-1} = \cdots = b_{m+1} = 0$,且有

$$\deg(f(x) + g(x)) \leqslant \max(\deg f(x), \deg g(x)).$$

而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的积定义为

$$f(x)g(x) = c_{n+m}x^{n+m} + \cdots + c_1 x + c_0$$

其中

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$$

如果 $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$,那么 $f(x)g(x) \neq 0$,而且

$$\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$$

容易验证多项式的运算具有下列运算性质:

(1) 加法交换律:$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$;

(2) 加法结合律:$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$;

(3) $0+f(x)=f(x)$;

(4) 设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$,记 $-f(x)=\sum_{i=0}^{n}(-a_i)x^i$,则

$$f(x) + (-f(x)) = 0;$$

(5) 乘法交换律:$f(x)g(x)=g(x)f(x)$;

(6) 乘法结合律:$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$;

(7) $1 \cdot f(x)=f(x)$;

(8) 乘法对加法的分配律:

$$(f(x) + g(x))h(x) = f(x)h(x) + g(x)h(x);$$

(9) 乘法消去律:若 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$,且 $f(x) \neq 0$,则 $g(x)=h(x)$.

习　　题

1. 设 $f(x),g(x),h(x)\in R[x]$,若

$$f^2(x) \doteq xg^2(x) + xh^2(x)$$

试证:$f(x)=g(x)=h(x)=0$.

2. 设 $f(x),g(x)\in K[x]$,$f(x)\neq 0$,$g(x)\neq 0$,若 $\deg(f(x)g(x))=\deg g(x)$,试证:$f(x)=c\in K$.

§1.3　多项式的整除

定义 1.3.1　设 $f(x),g(x)\in K[x]$, 若 $K[x]$中存在 $h(x)$,使

$$f(x) = g(x)h(x)$$

则称 $g(x)$整除 $f(x)$,记作 $g(x)\mid f(x)$.用 $g(x)\nmid f(x)$表示 $g(x)$不能整除 $f(x)$.当 $g(x)\mid f(x)$时,则称 $g(x)$为 $f(x)$的因式,$f(x)$为 $g(x)$的倍式.

判断一多项式是否能整除另一多项式,我们有

定理 1.3.1(辗转相除法)　设 $f(x),g(x)\in K[x]$,且 $g(x)\neq 0$,则 $K[x]$中必存在惟一的 $q(x),r(x)$,使

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

其中 $r(x)=0$ 或 $\deg r(x)<\deg g(x)$.

证明　如果 $f(x)=0$ 或 $\deg f(x)<\deg g(x)$,那么,取

$$q(x) = 0$$
$$r(x) = f(x)$$

就得要求的表达式:

$$f(x) = 0\cdot g(x) + f(x)$$

于是假定 $\deg f(x)\geqslant\deg g(x)$,并设

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$
$$g(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0$$

其中 $a_n\neq 0$,$b_m\neq 0$,且 $n\geqslant m$.作多项式

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x)$$

那么 $f_1(x)=0$ 或 $\deg f_1(x)<\deg f(x)$,对于 $f_1(x)=0$,有

$$f_1(x) = 0\cdot g(x) + f_1(x)$$

对于 $\deg f_1(x)<\deg f(x)$,由归纳法,有 $q_1(x)$与 $r(x)$,使

$$f_1(x) = q_1(x)\cdot g(x) + r(x)$$

其中 $r(x)=0$ 或 $\deg r(x)<\deg g(x)$. 经计算可得

$$f(x)=\left(q_1(x)+\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\right)g(x)+r(x)$$

此式显然满足要求.

假定 $K[x]$中还存在 $q_1(x)$与 $r_1(x)$,使

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)$$

其中 $r_1(x)=0$ 或者 $\deg r_1(x)<\deg g(x)$,那么经与前式相减、移项、提公因式 $g(x)$等,便得

$$[q_1(x)-q(x)]g(x)=r(x)-r_1(x)$$

如果 $r(x)-r_1(x)\neq 0$,那么 $q_1(x)-q(x)\neq 0$. 因而右边的次数小于 $\deg g(x)$,左边的次数大于或等于 $\deg g(x)$. 这不可能,所以 $r(x)=r_1(x)$,从而$q(x)=q_1(x)$.

辗转相除法中所得的 $q(x)$称为 $g(x)$除 $f(x)$的商,$r(x)$称为 $g(x)$除 $f(x)$的余式.

定理 1.3.2 设 $f(x),g(x)\in K[x]$,且 $g(x)\neq 0$,则 $g(x)\mid f(x)$的充分必要条件是 $g(x)$除 $f(x)$的余式为零.

证明 若 $r(x)=0$,则 $f(x)=q(x)g(x)$,即 $g(x)\mid f(x)$. 反过来,若 $g(x)\mid f(x)$,则一定存在 $q(x)\in K[x]$,使

$$f(x)=g(x)q(x)=g(x)q(x)+0$$

即 $r(x)=0$.

关于整除,我们指出以下性质:

(1)设 $c\in K$,且 $c\neq 0$,若 $f(x)\in K[x]$,则

$$f(x)\mid f(x),\quad f(x)\mid 0,\quad c\mid f(x)$$

事实上,$f(x)=1\cdot f(x)$,$0=0\cdot f(x)$,$f(x)=c(c^{-1}f(x))$.

(2)设 $f(x),g(x)\in K[x]$,若 $f(x)\mid g(x)$,$g(x)\mid f(x)$,则存在 $c\in K$,$c\neq 0$,使 $f(x)=cg(x)$.

事实上,由 $f(x)\mid g(x)$,$g(x)\mid f(x)$,就有 $h_1(x),h_2(x)\in K[x]$,使 $g(x)=h_1(x)f(x)$,$f(x)=h_2(x)g(x)$,于是

$$f(x)=h_1(x)h_2(x)f(x)$$

若 $f(x)=0$,则 $g(x)=0$,结论成立. 若 $f(x)\neq 0$,则 $h_1(x)h_2(x)=1$,因而 $\deg h_1(x)+\deg h_2(x)=0$,故 $\deg h_1(x)=\deg h_2(x)=0$,即有 $h_2(x)=c\in K$,$c\neq 0$,结论也成立.

(3)设 $f(x),g(x),h(x)\in K[x]$. 若 $f(x)\mid g(x)$,$g(x)\mid h(x)$,则 $f(x)\mid h(x)$.

事实上,由 $g(x)=g_1(x)f(x)$,$h(x)=h_1(x)g(x)$,可得 $h(x)=h_1(x)g_1(x)f(x)$.

(4)设 $f(x),g_1(x),\cdots,g_s(x)\in K[x]$,若 $f(x)\mid g_i(x)$,$i=1,2,\cdots,s$,则对任意 $u_i(x)\in K[x]$,$i=1,2,\cdots,s$ 都有 $f(x)\Big|\sum\limits_{i=1}^{s}u_i(x)g_i(x)$.

事实上,由 $g_i(x)=h_i(x)f(x)$,$i=1,2,\cdots,s$,可得

$$\sum_{i=1}^{s}u_i(x)g_i(x)=f(x)\sum_{i=1}^{s}u_i(x)h_i(x)$$

(5)设 $K,\overline{K}$ 均为数域,且 $K\subset\overline{K}$,若 $f(x),g(x)\in K[x]\subset\overline{K}[x]$,$g(x)\neq0$,则 $g(x)$除 $f(x)$在 $K[x]$中的商 $q(x)$和余式 $r(x)$也是 $g(x)$除 $f(x)$在 $\overline{K}[x]$中的商和余式.因而,在 $K[x]$中 $g(x)\mid f(x)$当且仅当在 $\overline{K}[x]$中 $g(x)\mid f(x)$.此结论说明,两个多项式之间的整除关系不因系数域的扩大而改变.

习　题

1. 用 $g(x)$除 $f(x)$,求商 $q(x)$及余式 $r(x)$.

(1) $f(x)=x^3-3x^2-x-1$,$g(x)=3x^2-2x+1$

(2) $f(x)=x^4-2x+5$,$g(x)=x^2-x+2$

2. m,p,q 满足什么条件时,有

(1) $x^2+mx-1\mid x^3+px+q$

(2) $x^2+mx+1\mid x^4+px^2+q$

3. 用综合除法求 $g(x)$除 $f(x)$的商 $q(x)$及余式 $r(x)$.

(1) $f(x)=2x^5-5x^3-8x$,$g(x)=x+3$

(2) $f(x)=x^3-x^2-x$,$g(x)=x-1+2i$

4. 用综合除法把 $f(x)$表示成 $x-x_0$ 的方幂和,即表示成

$$c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots$$

的形式.

(1) $f(x)=x^6$,$x_0=1$

(2) $f(x)=x^4-2x^2+3$,$x_0=-2$

(3) $f(x)=x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i$,$x_0=-i$

5. 试证:$x\mid f^k(x)$的充要条件是 $x\mid f(x)$.

6. 设 $f_1(x),f_2(x),g_1(x),g_2(x)\in K[x]$,且 $f_1(x)\neq0$,若

$$g_1(x)g_2(x)\mid f_1(x)f_2(x),\quad f_1(x)\mid g_1(x)$$

试证: $g_2(x)\mid f_2(x)$.

7. 试证: $x^s-1\mid x^n-1$ 的充要条件是 $s\mid n$.

§ 1.4 最高公因式

设 $\varphi(x),f(x),g(x)\in K[x]$,若 $\varphi(x)\mid f(x),\varphi(x)\mid g(x)$,则称 $\varphi(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式.

定义 1.4.1 设 $\varphi(x),f(x),g(x)\in K[x]$,若 $K[x]$ 中存在 $d(x)$,使

(1) $d(x)$ 整除 $f(x)$ 与 $g(x)$;

(2) 若 $\varphi(x)$ 整除 $f(x)$ 与 $g(x)$,则 $\varphi(x)\mid d(x)$.则称 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最高公因式.当 $d(x)=1$,称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是互质的.

最高公因式有下列性质:

(1) 设 $f(x)\mid g(x)$,则 $f(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最高公因式,因而 $f(x)$ 是 $f(x)$ 与 0 的一个最高公因式,两个零多项式的最高公因式是 0.

(2) 设 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最高公因式,则 $d_1(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最高公因式当且仅当 $d_1(x)=cd(x),c\in K,c\neq 0$.

事实上,由 $d(x),d_1(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最高公因式,就有 $d_1(x)\mid d(x),d(x)\mid d_1(x)$,于是 $d_1(x)=cd(x),c\in K,c\neq 0$.反过来,若,$d_1(x)=cd(x),c\neq 0$,则 $d_1(x)\mid d(x)$,因而 $d_1(x)\mid f(x),d_1(x)\mid g(x)$,所以 $d_1(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式.若 $\varphi(x)\mid f(x),\varphi(x)\mid g(x)$,由于 $d(x)$ 是最高公因式,故 $\varphi(x)\mid d(x)$,若注意到 $d(x)\mid d_1(x)$,就有 $\varphi(x)\mid d_1(x)$,故 $d_1(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最高公因式.

(3) 设 $\varphi(x),d(x)$ 分别是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式,最高公因式,则

1° $\deg\varphi(x)\leqslant\deg d(x)$;

2° $\varphi(x)$ 为最高公因式当且仅当 1° 中等号成立.

只证 2°,若 $\varphi(x)$ 为最高公因式,就有 $\varphi(x)=cd(x),c\in K,c\neq 0$,故 1° 中等号成立.反过来,若等号成立,则由 $d(x)=\varphi(x)q(x)$,就有 $\deg q(x)=0$,于是 $d(x)=c\varphi(x),c\in K,c\neq 0$,由性质(2)便知 $\varphi(x)$ 是最高公因式.

(4)设 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$,则 $f(x),g(x)$ 与 $g(x),r(x)$ 有相同的公因式.

事实上,若 $\varphi(x)\mid g(x),\varphi(x)\mid r(x)$,显然 $\varphi(x)\mid f(x)$,故 $\varphi(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式;反过来,若 $\varphi(x)\mid f(x),\varphi(x)\mid g(x)$,则由 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$,易知 $\varphi(x)\mid r(x)$,故 $\varphi(x)$ 是 $g(x),r(x)$ 的公因式.

由此即得,若 $d(x)$ 是 $g(x),r(x)$ 的一个最高公因式,则 $d(x)$ 也是 $f(x),g(x)$ 的一个最高公因式.

有了上述的准备,现在我们就可以讨论最高公因式的存在性了.

定理 1.4.1　设 $f(x),g(x)\in K[x]$，则 $K[x]$ 中必存在最高公因式 $d(x)$，而且 $K[x]$ 中有多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$，使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

证明　分三步讨论.首先假定 $f(x)=g(x)=0$，显然 $d(x)=0$.其次假定 $f(x)$ 与 $g(x)$ 之一为零，比如 $g(x)=0$，那么 $d(x)=f(x)$，且

$$f(x)=1\cdot f(x)+1\cdot 0$$

最后假定 $f(x)\neq 0,g(x)\neq 0$，因而由辗转相除可得

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x),\deg r_1(x)<\deg g(x) \tag{1}$$

$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x),\deg r_2(x)<\deg r_1(x) \tag{2}$$

$$r_1(x)=q_3(x)r_2(x)+r_3(x),\deg r_3(x)<\deg r_2(x) \tag{3}$$

如此继续下去，由于所得余式的次数不断降低，所以经过有限次后，必有余式为零，可设为

$$r_{n-2}(x)=q_n(x)r_{n-1}(x)+r_n(x)$$

$$r_{n-1}(x)=q_{n+1}(x)r_n(x)$$

$$\deg r_n(x)<\deg r_{n-1}(x)<\deg r_{n-2}(x)$$

这时利用性质(1)及(4)便知 $r_n(x)$ 就是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最高公因式.

又由上面的(1)式，我们有

$$r_1(x)=f(x)+[-q_1(x)]g(x)$$

代入(2)式，又得

$$r_2(x)=[-q_2(x)]f(x)+[1+q_1(x)q_2(x)]g(x)$$

仿此继续代入下去，就可以得到所要求的式子

$$r_n(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

由性质(2)知，两个多项式的最高公因式在相差一个非零常数倍的意义下惟一，又知道两个不全为零的多项式的最高公因式是非零多项式，故约定记号 $(f(x),g(x))$ 表示 $f(x),g(x)$ 之中惟一的一个首项系数为 1 的最高公因式.

例 1　设 $f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3,g(x)=3x^3+10x^2+2x-3$，求 $(f(x),g(x))$ 和 $u(x),v(x)$ 使

$$(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

解　利用辗转相除法，即有

	$g(x)$	$f(x)$	
$q_2(x)$	$3x^3+10x^2+2x-3$	$x^4+3x^3-x^2-4x-3$	$\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}$
$=-\frac{27}{5}x$	$3x^3+15x^2+18x$	$x^4+\frac{10}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2-x$	$=q_1(x)$
$+9$	$-5x^2-16x-3$	$-\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x^2-3x-3$	
	$-5x^2-25x-30$	$-\frac{1}{3}x^3-\frac{10}{9}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{1}{3}$	
	$r_2(x)=9x+27$	$r_1(x)=-\frac{5}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{10}{3}$	$-\frac{5}{81}x-\frac{10}{81}$
		$-\frac{5}{9}x^2-\frac{5}{3}x$	$=q_3(x)$
		$-\frac{10}{9}x-\frac{10}{3}$	
		$-\frac{10}{9}x-\frac{10}{3}$	
		0	

用等式写出来,就是

$$f(x)=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}\right)g(x)+\left(-\frac{5}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{10}{3}\right)$$

$$g(x)=\left(-\frac{27}{5}x+9\right)\left(-\frac{5}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{10}{3}\right)+(9x+27)$$

$$-\frac{5}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{10}{3}=\left(-\frac{5}{81}x-\frac{10}{81}\right)(9x+27)$$

于是

$$(f(x),g(x))=x+3$$

而由

$$\begin{aligned}9x+27&=g(x)-\left(-\frac{27}{5}x+9\right)\left(-\frac{5}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{10}{3}\right)\\&=g(x)-\left(-\frac{27}{5}x+9\right)\left[f(x)-\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}\right)g(x)\right]\\&=\left(\frac{27}{5}x-9\right)f(x)+\left[1-\left(\frac{27}{5}x-9\right)\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}\right)\right]g(x)\\&=\left(\frac{27}{5}x-9\right)f(x)+\left(-\frac{9}{5}x^2+\frac{18}{5}x\right)g(x)\end{aligned}$$