高 等 学 校 教 材

工 程 数 学

概　率　论

同济大学数学教研室主编

高等教育出版社

本书是由同济大学数学教研室主编的《高等数学》(1978 年版) 第十四章概率论部分改编而成的. 改编者系同济大学叶润修同志, 他参照了 1980 年高等学校工科数学教材编审委员会审订的《工程数学教学大纲》有关概率论部分进行了修改和补充, 还增添了相关系数一节和不少习题, 以期更能适合高等工业院校作为工程数学——概率论教材之用. 本书修订稿仍由陆子芬教授任主审, 一起参加审稿的还有盛骤、孙玉麟等同志.

本书内容为排列与组合、集合、随机事件、随机事件的概率、条件概率、事件的相互独立性及试验的相互独立性、一维随机变量、二维随机变量、随机变量的函数及其分布、随机变量的数字特征, 书末还附有习题答案.

本书条理分明, 便于自学, 也可作为工程技术人员自学用书.

责任编辑　丁鹤龄

本书原由人民教育出版社出版。1983 年 3 月 9 日, 上级同意恢复"高等教育出版社"; 本书今后改用高等教育出版社名义继续印行。

高等学校教材
工程数学
概 率 论
同济大学数学教研室主编
*
高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装
*
开本 850×1168 1/32　印张4.25　字数98,000
1982 年 10 月第 1 版 1983年 8 月第 2 次印刷
印数 68,501—98,600
书号 13010·0795　　定价 0.45 元

目　　录

概率论是研究随机事件的规律性的一个数学分支．所谓随机事件，直观地说是指这样的事件：在一次试验中，它出现与否是具有偶然性的，但是在大量重复试验中，它却是具有内在的必然性即规律性的．正如革命导师恩格斯所说："在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律．"① 概率论的任务就在于揭露与研究随机事件的规律性．

本书将先阐明随机事件及其概率这两个概念，然后介绍按试验结果确定取值的变量——随机变量的概念及与它有关的一些内容．这些都是概率论的基础内容，随着科学技术的不断发展，它们目前已被广泛地应用到各个科学分支和各个生产部门了．

第一章　预 备 知 识

为了学习概率论的需要，本章介绍排列、组合以及集合的概念和有关的计算法．

第一节　排列与组合

先介绍一条乘法原理：如果一个过程可以分成两个阶段进行，第一个阶段有 m 种不同的做法，第二个阶段有 n 种不同的做法，且

① 恩格斯：《路德维希·费尔巴哈和德国古典哲学的终结》，人民出版社 1972 年版，第 38 页．

第一个阶段的任一种做法都可以与第二个阶段的任一种做法配成整个过程的一种做法，那末整个过程应该有 $m\cdot n$ 种的做法. 在排列组合问题中将反复使用这条乘法原理.

一、排列

从 n 个不同的元素中，任意取出 r 个不同的元素 $(0<r\leqslant n)$ 按照一定的顺序排成一列，这样的一列元素叫做从 n 个不同元素中取 r 个不同元素组成的一种排列. 对于所有不同排列的种数，通常用 P_n^r 来表示.

先设 $0<r<n$，每一种排列由在 r 个有次序的位置上各放上一个元素所组成. 第一个位置上的元素有 n 种不同的取法；在它取定后，第二个位置上的元素只有 $n-1$ 种不同的取法；前两个元素取定后，第三个位置上的元素只有 $n-2$ 种不同的取法；依次类推，第 r 个位置上的元素只有 $n-r+1$ 种不同的取法. 因此按照乘法原理，所求排列种数 P_n^r 为

$$n(n-1)\cdots(n-r+1),$$

或改写为

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}.$$

当 $r=n$ 时，所求排列种数为 $n!$. 若规定 $0!=1$，则上式仍成立.

因此，当 $0<r\leqslant n$ 时，上述排列问题的答案总可以表达成

$$P_n^r=\frac{n!}{(n-r)!}.$$

例1 计算从八个不同的元素中任取三个的排列种数.

解 所求的排列种数为

$$P_8^3=8\cdot 7\cdot 6=336.$$

例 2　从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 七个数中任取三个不同的数组成的三位数中有几个是偶数？

解　所得的三位数是偶数，它的个位上应是 2、4、6 中的一个。因此，安置在个位上的数有三种不同的取法，而十位、百位上的数共有 6×5 种不同的取法．从而所求的个数为

$$3\cdot6\cdot5=90.$$

我们要注意到，在以上的排列问题中参加排列的元素是不允许重复的．但有时需要考虑允许重复的情况，例如电话号码就允许数字重复．现考虑从 n 个各不相同的元素里任取一个，然后放回去，再取一个，然后又放回去，这样共进行 r 次，问所得不同的排列共有多少种？显然，这种情况下排列种数共有

$$\underbrace{n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}_{r\text{ 个}}=n^r.$$

例 3　用 0, 1, 2, …, 9 这十个数字组成三位数，在这些三位数中，

(1) 如考虑数字可以重复，问可以组成多少个不同的三位数？

(2) 三个数字没有重复的有几个？

(3) 三个数字都相同的有几个？

(4) 只有两个数字相同的有几个？

解　(1) 在数字可以重复的情况下，计算能组成多少个不同的三位数时，由于百位数上不能放置 0，所以组成的不同的三位数的个数应为

$$9\cdot10\cdot10=900.$$

(2) 百位上的数字有 9 种不同的取法．在百位上的数字取定后，十位上的数字有 9 种不同的取法．在百位上、十位上的数字取定后，个位上的数字只有 8 种不同的取法．所以没有重复数字的三位数的个数为

$$9\cdot 9\cdot 8=648.$$

(3) 由于百位上的数字有9种不同的取法. 在百位上的数字取定后，十位上及个位上的数字随之而定. 所以三个数字都相同的三位数的个数为9.

(4) 只有百位上与十位上的数字相同的三位数的个数为 9×9; 只有十位上与个位上的数字相同的三位数的个数为 9×9; 只有百位上与个位上的数字相同的三位数的个数为 9×9. 所以只有两个相同数字的三位数的个数为

$$9\cdot 9+9\cdot 9+9\cdot 9=243.$$

二、组合

设有 n 个不同的元素，从它们中间任取 r 个 $(0<r\leqslant n)$ 构成一组. 这里，不考虑这 r 个元素的次序，只研究有多少种不同的取法，这就是组合问题. 称每一个取得的组为一个组合. 对于所有不同的组合的种数，通常把它记作 $\binom{n}{r}$ 或 C_n^r.

组合问题与排列问题的不同之处，在于排列问题要考虑取得的元素的前后次序，而组合问题不考虑这种次序. 下面将导出组合种数 $\binom{n}{r}$ 的计算公式.

我们从 n 个不同元素中任取 r 个元素出来，得到一个组合，对这 r 个元素进行各种排列，共得 $r!$ 种不同的排列，但所有这些排列均是由一种组合变来的，所以排列的种数 P_n^r 是组合种数 $\binom{n}{r}$ 的 $r!$ 倍. 即

$$P_n^r=\binom{n}{r}\cdot r!,$$

从而得到组合种数为

$$\binom{n}{r}=\frac{P_n^r}{r!}$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

按$\binom{n}{r}$的定义，有

$$\binom{n}{n-r}=\frac{n!}{[n-(n-r)]!(n-r)!}$$

$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\binom{n}{r}.$$

即

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}.$$

当 r 接近 n 时，可以利用这个关系式把$\binom{n}{r}$化成$\binom{n}{n-r}$来计算.

例 4 有五本不同的数学书、八本不同的物理书，从中任取两本数学书、四本物理书. 问有多少种不同的取法?

解 从五本数学书中任取两本，有

$$\binom{5}{2}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=10$$

种不同的取法；从八本物理书中任取四本，有

$$\binom{8}{4}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=70$$

种不同的取法. 因此，所求的取法的种数为

$$\binom{5}{2}\binom{8}{4}=10\cdot 70=700.$$

第二节 集　合

集合，有时简称为集，是具有某种特定性质的事物所组成的集

体. 通常用大写拉丁字母 A、B、C、…来表示集合. 组成集合的各个事物称为这集合的元素. 如果 e 是集合 A 的一个元素, 便记作 $e\in A$, 读作"e 属于 A". 如果 e 不是集合 A 的一个元素, 便记作 $e\bar{\in} A$, (或 $e\notin A$), 读作"e 不属于 A". 如果集合 A 是由元素 e_1、e_2、…等组成的, 那末, 记作

$$A=\{e_1, e_2, \cdots\}.$$

集合的元素可以是任意种类的对象: 点、数、函数、事件、人等等. 例如,

(1) 全体自然数组成的一个集合 A, 可表示为:

$$A=\{1, 2, \cdots\};$$

(2) 在一条给定的直线上的全体点组成的一个集合;

(3) 平面上一个区域 D 中的所有点组成的一个集合;

(4) 数轴上所有区间组成的一个集合;

(5) 定义域为区间 (a, b) 的所有连续函数;

(6) 某地区所有学龄前儿童组成的一个集合, 等等.

在讨论集合时, 重复的元素只算一次. 例如, 把 $\{1, 2, 2, 3,\}$ 与 $\{1, 2, 3\}$ 看作是同一个集合.

如果一个集合中只有有限多个元素, 那末称这集合为有限集. 如果一个集合中有无限多个元素, 那末称这集合为无限集. 特殊地, 如果一个无限集中的诸元素能与全体自然数构成一一对应关系, 那末称这无限集为可数集或可列集, 否则为不可数集.

例如, $\{1, 2, 3\}$ 是以三个数字 1, 2, 3 为元素的有限集; $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$ 是以数字 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$ 为元素的可数集; 所有实数组成一个不可数的无限集; 所有大于 a、小于 b $(a<b)$ 的实数组成一个集合, 称它为区间 (a, b), 它也是一个不可数无限集.

下面介绍集合之间的关系与集合的运算.

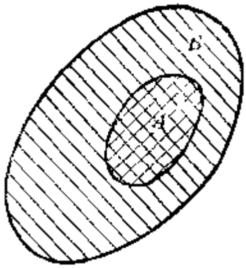

图 1-1

一、子集

如果属于集合 A 的任一元素都属于集合 B，那末称集合 A 是集合 B 的子集，记作 $A\subset B$（或 $B\supset A$），读作 A 含于 B（或 B 包含 A）（图 1-1）. 例如，由所有偶数组成的集合是由所有整数组成的集合的子集；区间 $(1,2)$ 是区间 $(1,4)$ 的子集. 特殊地，一个集合 A 是它自己的一个子集. 显然，当 $A\subset B$ 且 $B\subset C$ 时，$A\subset C$.

为了以后讨论方便，把不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$. 把空集 $\varnothing$ 作为任一集合 A 的子集，即对任一集合 A，$\varnothing\subset A$.

如果 $A\cup B$ 且 $B\subset A$，那末称集合 A、B 相等，记作 $A=B$.

二、并集

由至少属于集合 A 及集合 B 二者之一的所有元素所组成的集合称为集合 A 与集合 B 的并集，记作 $A\cup B$. 图 1-2 中阴影部分表示并集 $A\cup B$. 例如，集合 $\{1,2,3\}$ 与集合 $\{3,4,5\}$ 的并集为集合 $\{1,$

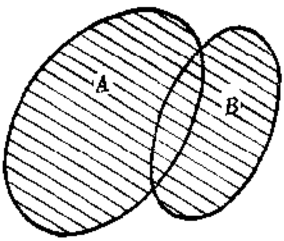

图 1-2

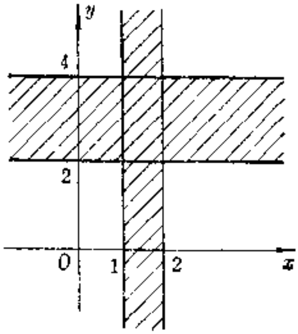

图 1-3

2, 3, 4, 5}；区间(1, 3)与(2, 4)的并集为区间(1, 4)；区间($-\infty$, 3)与区间($-\infty$, 1)的并集为区间($-\infty$, 3)；由平面上坐标满足 $1<x<2$ 的点的全体组成的集合与由坐标满足 $2<y<4$ 的点的全体组成的集合的并集为图 1-3 中阴影部分表示的集合(边界不在内).

三、交集

由同时属于集合 A 及集合 B 的所有元素所组成的集合称为集合 A 与集合 B 的交集，记作 $A\cap B$(或 AB). 图 1-4 阴影部分表示交集 $A\cap B$. 例如，区间($-\infty$, 3)与区间(1, $+\infty$)的交集为区间(1, 3)；由平面上圆 $x^2+y^2=1$ 内的所有点组成的集合与由横坐标大于零的所有点组成的集合的交集为图 1-5 中所表示的右半圆（边界不在内).

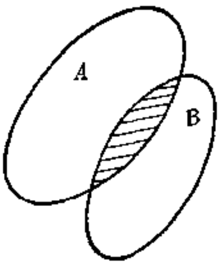

图 1-4

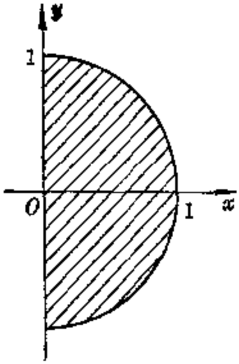

图 1-5

如果 $A\cap B=\varnothing$，即集合 A、B 无公共元素，那末称集合 A、集合 B 互不相交. 例如，由所有正数组成的集合与由所有负数组成的集合互不相交；区间(1, 2)与区间(2, 3)互不相交.

集合的并与交满足下列分配律：

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C).$$

证 下列诸关系式是相互等价的：

$$e\in(A\cup B)\cap C,$$

$$e \in A \cup B \text{ 且 } e \in C,$$

$$e \in A \cap C \text{ 或 } e \in B \cap C,$$

$$e \in (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

从而，上述分配律成立．图 1-6 中表明了分配律的直观含义，图中阴影部分表示$(A \cup B) \cap C$．

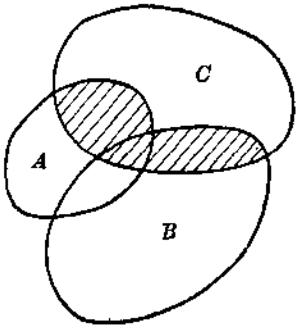

图 1-6

集合的并及交可以从两个推广到有限多个或可数多个集合上去，诸集合 A_1，A_2, …的并集

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

就是由至少属于 $A_1, A_2, \cdots$中一个的所有元素组成的集合；诸集合 A_1，A_2, …的交集

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

就是由同时属于 $A_1, A_2, \cdots$的所有元素组成的集合．分配律对于有限个或可数多个集合的并集也成立，即

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) \cap C = (A_1 \cap C) \cup (A_2 \cap C) \cup \cdots.$$

四、差集　余集

设 A、B 为任意两个集合，称由属于集合 A 而不属于集合 B 的所有元素组成的集合为集合 A 与集合 B 的差集，记作 $A-B$．图 1-7 中阴影部分表示差集 $A-B$．例如，区间$(1, 4)$ 与区间$(0, 2)$的

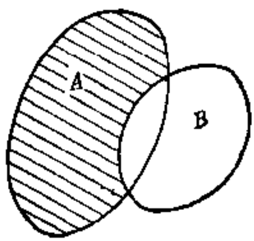

图 1-7

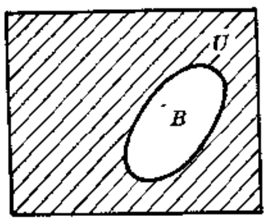

图 1-8

差集为区间$[2, 4)$. 特殊地, 如果 A 与 B 不相交, 那末 $A-B=A$.

设 $B\subset U$, 称 $U-B$ 为 B 在 U 内的余集, 记作 $\bar{B}_U$. 图 1-8 中阴影部分表示余集 $\bar{B}_U$. 例如, 当 U 为整个数轴时, 区间$(-\infty, a)$在 U 内的余集为$[a, +\infty)$.

下面提出几条关于余集的性质. 设 A、B、…等都是 U 的子集, 为了简便起见, 略去表达余集时的下标 U.

(1) $\overline{\overline{A}}=A$;

(2) 如果 $A\subset B$, 那末 $\bar{A}\supset\bar{B}$;

(3) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$; $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

下面给出性质(3)中第一个等式的证明.

下列诸关系式是相互等价的:

$e\in\overline{A\cup B}$;

$e\,\overline{\in}\,A\cup B$,

$e\,\overline{\in}\,A$ 且 $e\,\overline{\in}\,B$,

$e\in\bar{A}$ 且 $e\in\bar{B}$,

$e\in\bar{A}\cap\bar{B}$.

从而有

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}.$$

其余几条性质读者可自行证明.

习 题 一

1. 由数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 能组成多少个没有重复数字的五位数?

2. 由数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 能组成多少个没有重复数字的五位数?

3. 从 100 件产品中抽出 4 件进行检查, 有多少种不同的抽取方法? 其中某一件恰好被抽到的抽取法有多少种?

4. 在 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 中任取四个, 能排成多少个是偶数的四位数?

5. 电话号码由六个数字组成, 问电话局共能容纳多少个用户(假定每个

用户只用一个电话号码)?数字均不相同的电话号码有多少种?

6. 有三本不同的数学书、五本不同的物理书、四本不同的英语书，从中任取两本数学书、二本物理书、三本英语书，有多少种取法?

7. 区间$[-3,3]$与$(-\infty,-1)\cup[3,+\infty)$的交集是怎样一个集合?

8. 平面上由 $x^2+y^2\leqslant 4$ 确定的集合与由 $x^2+y^2>1$ 确定的集合的交集是怎样一个集合?

9. 证明: $\overline{(A\cup B)\cap C}=(\bar{A}\cap\bar{B})\cup\bar{C}$.

10. 设 A、B 为任意两个集合. 将 $A\cup B$ 表达成 A 及另一个与 A 互不相交的集合的并集.

11. 设 A、B、C 为三个集合. 从 AC 及 BC 不相交能不能推出 A、B 不相交?作图表明你的结论.

12. 指出下列各等式或命题是否成立?并说明理由.

(1) $A\cup B=(A\bar{B})\cup B$;

(2) $\bar{A}B=A\cup B$;

(3) $\overline{A\cup B}\cap C=\bar{A}\bar{B}\bar{C}$;

(4) $(AB)(A\bar{B})=\varnothing$;

(5) 如果 $A\subset B$, 那末 $A=AB$;

(6) 如果 $AB=\varnothing$ 且 $C\subset A$, 那末 $BC=\varnothing$;

(7) 如果 $A\subset B$, 那末 $\bar{B}\subset\bar{A}$;

(8) 如果 $B\subset A$, 那末 $A\cup B=A$.

第二章 随机事件

第一节 随机事件的概念

在科学研究或工程技术中，我们时常要在相同条件下重复进行很多次试验. 经常会遇到这样的情形：尽管试验是在相同条件下进行的，但各次试验结果却不一定相同. 举例如下：

例 1 一口袋中含有编号分别为 $1, 2, \cdots, n$ 的 n 个球，从这袋中任取一球，观察后立即将球放回袋中. 多次做这样的试验，各次取得的球的号数就不一定相同. 每次取得的号数是 $1, 2\cdots, n$ 中的一个数.

例 2 在一个形状为旋转体的均匀陀螺的圆周上，均匀地刻上区间 $[0, 3)$ 上的诸数字. 旋转这陀螺，当它停下时，把圆周与桌面接触处的刻度记下来. 多次做这种试验，各次刻度就不一定相同. 每次的刻度是区间 $[0, 3)$ 上的一个数.

例 3 从次品率为 p 的一批产品中，一件接一件地抽取 n 件产品（抽得一件产品后，立即放回这批产品中去，再抽下一件）. 多次做这样试验，各次取得的 n 件产品中次品的件数不一定相同. 每次取得的次品的件数是 $0, 1, 2, \cdots, n$ 中的一个数.

例 4 多次用指定的测量工具测量某物体的长度，由于种种因素的干扰，各次所量得的数值就不一定相同. 每次的数值是实数范围内的一个值.

例 5 多次用步枪射击靶子上的点目标，由于各种因素的影响，各次枪弹击中的位置就不一定是同一个点. 每次击中的位置理解为包含靶子的平面上的一个点.

所谓随机试验就是指这样的试验，它可以在相同条件下重复试验，试验的所有可能发生的结果是已知的，但每次试验到底是其中哪一个结果预先是不能确定的．以后我们所说的试验都是指随机试验．

在随机试验中，可能出现、也可能不出现的事件叫做随机事件．例如，在例 1 中，“取得的球的号数小于 3”这事件是随机事件；在例 2 中，“陀螺的圆周与桌面接触处的刻度在区间(1,2)内”是随机事件；在例 3 中，“取得的次品件数不超过 3”是随机事件；等等．

在每次试验中必然出现的事件叫做必然事件，必然不出现的事件叫做不可能事件．例如，在例 1 中，“取得的球的号数大于 0”是必然事件，“取得球的号数小于 1”是不可能事件．必然事件与不可能事件本来没有不确定性，也就是说它们不是随机事件，但为了今后讨论方便起见，我们把它们当作一种特殊的随机事件．以后简称随机事件为事件，并用大写拉丁字母 A、B、C 等表示随机事件，用 U 表示必然事件，用 $\varnothing$ 表示不可能事件．

第二节　事件间的关系及运算

在实际问题中，往往要在一个随机试验下同时研究几个事件及它们之间的联系．例如，在检查某些圆柱形产品时，要求它的长度及直径都符合规格才算合格．这时，要考虑“产品合格”、“产品不合格”、“直径合格但长度不合格”等等事件．显然，这些事件相互之间是有联系的．下面来引进事件之间的几种主要关系以及作用在事件上的运算．

如果事件 A 出现必然导致事件 B 出现，那末称事件 A 是事件 B 的子事件，记作 $A\subset B$（或 $B\supset A$）．例如，“直径不合格”必然导致“产品不合格”，所以“直径不合格”是“产品不合格”的子事件．为