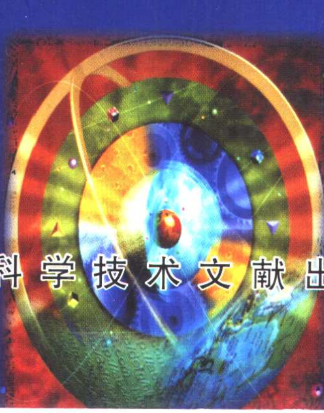
怎样提高
高中数学综合应用能力

主编 鲁鹤鸣 编者 鲁鹤鸣 孙忠东 项 军 王小海



上海科学技术文献出版社

怎样提高

高中数学综合应用能力

主　编　鲁鹤鸣

编　者　鲁鹤鸣　孙忠东

项　军　王小海

上海科学技术文献出版社

图书在版编目(CIP)数据

怎样提高高中数学综合应用能力/鲁鹤鸣著. - 上海:上海科学技术文献出版社,2001.8
ISBN 7-5439-1769-6

Ⅰ.怎… Ⅱ.鲁… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第032011号

怎样提高高中数学综合应用能力

主编 鲁鹤鸣

*

上海科学技术文献出版社出版发行
(上海市武康路2号 邮政编码200031)
全国新华书店经销
常熟人民印刷厂印刷

*

开本850×1168 1/32 印张9.75 字数270 000
2001年8月第1版 2001年8月第1次印刷
印数:1-6 000
ISBN 7-5439-1769-6/O·125
定价:12.80元

丛书前言

教育不能脱离社会的需要。现代教学愈来愈迫切地要求学生提高综合应用能力.

高中教学中哪些是综合应用能力？高中理科(数、理、化)教学中哪些内容需要综合？怎样提高综合应用能力？

现代的高中学生已不是游离于现代科学技术、现代文化氛围之外的幼稚学童，时代的进步使得他们身处现代化的大环境中，他们的思想、思维方式，乃至学习的行为、技能、方法业已融入由现代化引发的“现代教育”之中.

反观当前的中学教学，因袭的传统教学理念和方法仍滞后于时代的要求.

近几年来高考改革步伐的加快，数、理、化考题的内容、题型屡见创新. 高考考纲还明确指出：要考查学生的综合应用能力. 这是时代对高中教学提出的要求.

数、理、化的综合内容，包括人文、社会科学与自然、理科科学的综合，以及自然科学之间的交叉综合，特别是本学科内的全面贯通综合. 而客观上不论是现行教材还是高中的课堂教学，显然还跟不上形势发展的需要.

我们于 1999 年编写的《怎样学》丛书，就是想从学习的方法与途径的角度向学生提供更贴近现代教学规律的启示. 出版后深受广大学生、教师的欢迎，已多次重印. 这次我们编写《怎样提高》丛

书，试图与高中学生探讨怎样提高高中阶段数、理、化综合应用能力.

本丛书的例题、说明及习题(附有答案)，取材于大量的社会现象、科学实践、工农业生产以及广泛的生活问题，并有机地与高中数、理、化知识结合起来，既有学科之间的综合交叉，又有本学科内在的综合运用，特别适合高三毕业班学生阅读.如果说《怎样学》丛书能解决高中数、理、化的学习方法与途径，打好学科基础，减轻学生的学习负担，那么《怎样提高》丛书可以让学生提高学科的综合应用能力.具体地说，就是想让学生在高考时比较顺利地解答与实际紧密结合的应用问题，以及学科内部的综合大题，为在高考中取得优异成绩提供可能.

本丛书是由浙江大学附属中学在第一线辛勤耕耘的特级教师、高级教师及教坛新秀积多年教学实践经验编写而成的，其中还包括浙大附中近年来理科实验班的教学成果.我们相信本丛书会更贴近学生的实际需要，更贴近高考大纲对考试的要求.

本丛书还编进了2001年将在全国推广的新教材的教学要求，能帮助广大高中毕业生尽快适应新大纲的要求.

当然，我们追求的目标是无止境的，丛书中肯定还有不足之处，希望得到同仁及广大读者的指正.

上海科学技术文献出版社

2001年8月

前　　言

1. 熟练掌握高中数学的“双基”是提高综合应用能力的基础

数学学习的第一关,必须熟练掌握知识结构及其发展脉络与数学基本知识、基本技能.在对数学教科书的学习中,数学的知识结构与发展的脉络是很清晰的.教师也必须每单元、每章节地加以系统阐述.这对学生较完整地理解数学会起到事半功倍的作用,会使学生在学习中有“居高临下”的感觉.另一方面数学学习毕竟是操作性很强的学习,它有大量的计算、推理、论证以及类比与归纳.所以加强“双基”的训练还是很必要的.通过“双基”训练不仅能促进学生进一步理解数学知识结构,而且能培养学生缜密的思考问题的习惯,严谨的推理、认真的演算以及对结论的反复比较考查的习惯.加强“双基”训练一直是高中数学教学中的艰苦工作,以往教育主管部门对此一直十分强调,经过多年的努力效果应该是十分明显的.

但上述情况的发展也困惑着广大的师生,使得学生数学综合应用能力的提高失去突破口,迷失方向.那么提高数学综合应用能力的突破口在哪里呢?

2. 必须充分注意加强数学思想与方法的教学

严格上讲数学科学不是自然科学,当然也不是社会科学.那么数学科学到底是怎么样的一门科学呢?

哲学家中的先贤权威论述为:“数学是研究现实世界空间形式

和数量关系的科学."但这历史性的提法已被现代科学的迅猛发展所突破,仍然机械地坚持这一提法已显得不妥.

1988～1991 年,我国数学家两次云集南开大学,召开了世人关注的"21 世纪中国数学展望讨论会".在国家自然科学基金会给大会的报告中明确指出:"今天可以说,数学是关于模式和秩序的科学."

什么是数学模式,简言之,"就是有关的理论和研究方法的数学模型."而且,"整个数学史就是不断发现问题、创造模式、研究模式、使用模式的历史."

什么是数学秩序,简言之,数学模式的组成是一个逻辑有序的系统结构,是一个有机整体.当然数学中每个问题的解决,只能是从已知到目标的一系列逻辑推理、演算的有序过程;否则结果是靠不住的.

这就是我们通常说的数学思想与方法.我们高中数学中的一次函数、二次函数、指数函数、对数函数、三角函数、一元二次方程、一元二次不等式等都是大家熟悉的数学模式及秩序.又如数学中的定义、定理、公式、法则也是人们已经创建的数学模式.这些全是数学的思想与方法——是人类在认识与探索客观世界的过程中抽象而得到的"模式和秩序",而这些模式与秩序又不是封闭的,它们会随着现代科学的发展不断地"创模与建序",从而推动着数学科学向前发展.

一味强调"双基"教学,不去了解数学的本质,会使学生数学综合应用能力的提高遇到障碍.当然没有扎实的"双基",也会使数学思想与方法变成空中楼阁.

3. 本书努力想解决的问题

无论在平时的教学中发现学生存在的问题还是高考中学生对应用题、对综合大题的束手无策,都向我们揭示:怎样来提高数学的综合应用能力成为中学数学教学中的当务之急。

若能用"模式"的数学观组织数学教学,即用"模式与秩序"这样的数学思想与方法来组织教学(包括学生用这样的思想与方法

自学)必定能突破“提高数学应用综合能力”这个难点.

模式的构建 → 模式的认识 → 模式的应用 → 模式的评价

本书力求用这四步的流程解决解应用题问题、解数学综合题的问题.

模式的构建　是指把实际问题对应到已学的数学模式中去.

模式的认识　是指怎么样来处理已建立的数学模式,包括变量的范围,如何围绕所求的目标进行数式的等价变形等等.

模式的应用　是指同样或类似的问题如何推而广之,找出一定范围内的普遍意义.

模式的评价　是指该模式在应用中优劣的判别,及是否还存在另外的可解决同类或类似问题的数学模式.

用数学模式来解物理、化学及其他学科有关问题以及数学内部的综合问题,是本书帮助读者解题所遵循的一条思路.

本书将尽可能地把能用高中数学模式解决的应用问题作为专题论述,也针对对高考中最后几道大题即综合题做专题论述.每一例题基本上均有:分析、解、说明(即评价).每一大单元之后附有读者可以根据一定数学模式操作的习题(附有答案).想使读者通过本书的阅读在提高高中数学综合应用能力上上一个台阶.本书还根据新教材编排了概率、统计等新的内容.

对于用模式论的数学思想与方法来组织数学教学,我们还在不断尝试,并在今后的实践中逐步完善.也希望能得到同仁们的帮助与指教.

编者 2001 年于求是村

作者简介

鲁鹤鸣 浙江大学附属中学数学特级教师 毕业于浙江大学，系中国数学会会员，浙江省中学数学研究会会员 从事高中数学教学30余年 发表论文数10篇，曾获论文一等奖、二等奖，编写的《中学生数学学习手册》获全国首届教育图书三等奖，编著的《高中数学怎样学》受到广泛好评。近年来致力于浙江大学附属中学理科实验班数学教学，注重学生思维能力、学习方法及数学综合能力的培养，获得可喜的教学成果。

目　　录

一、方程应用

用方程来解实际问题是学生一开始学习数学就接触到的方法.但在学生的高考及其他考试解题中发现学生对方程的本质还是缺乏理解——怎么样利用条件写出含有未知数的等式,怎么样理解方程根的含义.所以我们想通过下面的例题及习题论述怎么样设未知数才能顺利写出方程;怎么样解方程,评价方程的根来理解根的意义.更进一步理解方程的思想,确立方程的思想,使它内化为学生的自身数学素养.

概念 含有未知数的等式——方程.

【例 1】 两个或以上方程的联列——方程组,有浓度为 8%和 5%的两种食盐水,要配成 600 g 浓度为 7%的食盐水,问两种食盐水各需要多少 g?

分析 关键是混合前后的纯盐重量相等.

解 设 8%的盐水为 x g,则 5%的盐水为 $(600-x)$ g.根据题意,得

$$x \times 0.08+(600-x) \times 0.05=600 \times 0.07.$$

解方程:得 $x=400,\ 600-x=200.$

答 8%的食盐水 400 g,5%的食盐水 200 g.

【例 2】 有若干克 4%的盐水,蒸发了一些水分后变成了 10%的盐水,再加进 300 g 4%的盐水,混合成为 6.4%的盐水,问最初的盐水多少 g?

解 设最初的盐水为 x g,蒸发掉的水分为 y g,则最初含盐量 $\frac{4}{100}x$ g,蒸发掉 y g 水后的盐水为 $(x-y)$ g,此时的含盐量应为 $\frac{10}{100}(x-y)$ g.根据题意,得

$$\frac{4}{100}x=\frac{10}{100}(x-y).$$

加入 4% 的盐水 300 g 后，得

$$\frac{4}{100}x+\frac{4}{100}\times 300=\frac{6.4}{100}[(x-y)+300].$$

则 $\begin{cases}\dfrac{4}{100}x=\dfrac{10}{100}(x-y),\\ \dfrac{4}{100}x+\dfrac{4}{100}\times 300=\dfrac{6.4}{100}[(x-y)+300].\end{cases}$

化简，得

$$\begin{cases}y-\dfrac{3}{5}x=0,\\ 8y-3x=900.\end{cases}$$

解方程组，得 $\quad x=500.$

答　最初的盐水为 500 g.

【例 3】 A 桶中有盐水 5 L，B 桶中有水 10 L，现在分别从 A、B 两桶中各取 x L 倒入对方的桶中，然后再各取 x L 倒入对方桶中，这时两桶中的盐水浓度相等，求 x.

分析　仍应从含纯盐水量的角度考虑问题.

解　第一次操作后，A 桶中的盐水是 $(5-x)$ L，B 桶中的盐水是 x L，第二次操作后 A 桶的盐水为

$$5-x-\left(x\cdot\frac{5-x}{5}\right)+\left(x\cdot\frac{x}{10}\right).$$

B 桶的盐水为

$$5-\left[5-x-\left(x\cdot\frac{5-x}{5}\right)+\left(x\cdot\frac{x}{10}\right)\right].$$

又知 A、B 两桶含盐水浓度相等，

$$\therefore\quad \frac{5-x-\left(x\cdot\frac{5-x}{5}\right)+\left(x\cdot\frac{x}{10}\right)}{5}$$

$$=\frac{5-\left[5-x-\left(x\cdot\frac{5-x}{5}\right)+\left(x\cdot\frac{x}{10}\right)\right]}{10}.$$

化简，得

$$9x^2-60x+100=0.$$

解方程，得 $\quad x=\frac{10}{3}.$

答 x 为$\frac{10}{3}$ L.

【例 4】 有一污水处理池，每分钟有一定的污水流入，现在水池中已盛满污水，为了将池中的污水一次排尽，若用甲管单独排放时间可比用乙管提前 10 min 将污水排尽，若先用甲管排 10 min，然后改用乙管排 15 min，就可将池中的污水排尽，问单独使用甲管，将池中污水排尽需要多少时间？

分析 首先考虑到排出量必大于流入量. 其次，它们的差值与时间的乘积是这段时间内的绝对排出量. 可从一池污水的绝对排出量着手写出等式，即建立方程.

解 设甲管每分钟的排水量与流入水量的差为 a，乙管每分钟的排水量与流入水量的差为 b，又设甲管单独排水所需时间为 t，根据题意，得

$$ta=(t+10)\cdot b=10a+15b.$$

$\therefore\quad b=\frac{t}{t+10}\cdot a.$

$\because\quad ta=10a+\frac{15t}{t+10}\cdot a$，又 $a>0$.

$\therefore\quad t^2-15t-100=0.$

解方程，得 $\quad t_1=20$，$t_2=-5$.

$\because\quad t>0$，$\therefore\quad t=20$.

答 甲管单独需要用 20 min 将污水排尽.

【例 5】 有一水库，在单位时间内流进一定量的水，同时也向外放水. 按现在的放水量，水库中的水可使用 40 天，因最近在水源

的地方降雨，流入水库的水量增加 20%，如果放水量增加 10%，则仍可使用 40 天，问如果按原来的放水量放水，可正常使用多少天？

分析 应该按照三种不同情况分别列式：① 原来水库水量及流入水量与放水量写出一个等式；② 按降水增加及放水增加写出一等式；③ 按降水增加，放水量按原来情况写出一等式. 总之用一组方程组来解题.

解 设现在水库中的水量为 a，每日流入的水量为 b，每日放出的水量为 c，又设若按原来的放水量放水可用 x 天.

根据题意，得

$$\begin{cases} a + 40b = 40c, \\ a + 40(1 + 0.2)b = 40(1 + 0.1)c, \\ a + (1 + 0.2)bx = cx. \end{cases}$$

解方程组，得 $x = 50$.

答 按原来的放水量放水可使用 50 天.

说明 应注意时间——天数，流入与放出水的天数是一致的.

【例 6】 沿河有相距 8 km 的 A、B 两城镇，汽船以每小时 10 km的速度，在两镇间往返一次需 1 h 45 min，求水流速度.

分析 以时间写出等式.

解 设水速为 x km/h，则船的顺流速度为 $(10 + x)$ km/h，逆流速度为 $(10 - x)$ km/h.

根据题意，得

$$\frac{8}{10 - x} + \frac{8}{10 + x} = 1\frac{45}{60}.$$

解方程，得 $x = \sqrt{\frac{60}{7}} \approx 2.93$.

答 水流速度为 2.93 km/h.

【例 7】 一船以 6 km/h 的速度于下午 1 点钟从 A 镇出发，逆流而上，下午 2 点 20 分到达 B 镇，停泊 1 h 后返航，于下午 4 点到达 A 镇，求 A、B 两镇之间的距离及水流速度.

解 设水速 x km/h，A、B 两地相距 y 千米，船的逆水速度为 $(6-x)$ km/h，船的顺水速度为 $(6+x)$ km/h，逆流航行时间为 $\frac{4}{3}$ h，顺流航行时间为 $\frac{2}{3}$ h.

根据题意，得

$$\begin{cases} \frac{4}{3}(6-x)=y, \\ \frac{2}{3}(6+x)=y. \end{cases}$$

解方程组，得 $x=2,\ y=\frac{16}{3}$.

答 水流速度 2 km/h，A、B 两镇相距 $5\frac{1}{3}$ km.

【例 8】 有两艘浮桥船同在一条河的上游处，需要把它们尽快运到下游的 a km 处，一艘拖船不能同时拖两艘浮桥船，因此产生了这样一个计划：让一艘浮桥船随水流漂向下游，同时用拖船拖运另一艘浮桥船某段距离之后，让这艘浮桥船自行漂流到终点；而拖船立即返回去拖漂流下来的第二艘浮桥船，并使两艘浮桥船同时到达指定终点. 如果水流速度是 u km/h，拖船的顺水速度是 $(v+u)$ km/h，逆流速度是 $(v-u)$ km/h，按这个计划整个运输共用了多少时间？

分析 可用拖运（包括自漂）的距离 a km 写出等式.

解

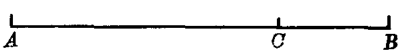


图 1－1

如图 1－1 所示，设由点 A 第一次拖浮桥船用时间为 t_1 到达点 C，再让第一艘浮桥船顺水漂流 t_2 时间到达目的地点 B. 拖船到达点 C 后立即返航，去迎接第二艘浮桥船用的时间是 t_3. 根据题意，得

$$\begin{cases}(v+u)t_1+ut_2=a, & ①\\ u(t_1+t_3)+(v-u)t_3=(v+u)t_1, & ②\\ u(t_1+t_3)+(v+u)(t_2-t_3)=a. & ③\end{cases}$$

解方程组，得

$$t_1+t_2=\frac{3a}{3u+v}.$$

答　整个计划共用时间$\frac{3a}{3u+v}$(h).

说明　方程①表示第一艘浮桥船航行的路程等式．方程②右边表示第一艘浮桥船由 A 到 C 的路程；左边表示第二艘浮桥船由 A 漂流到 A、C 之间某一处，及拖船由 C 逆流而上到该处与第二艘浮桥船相遇时的路程之和；方程③表示第二艘浮桥船航行完 a 路程的等式．

【例 9】 甲、乙两种商品，甲每件价格比乙每件高 30 元，某人带 1 000 元，要购买甲、乙两种商品共 10 件，如果其中买甲 m 件，乙 n 件，则还差 80 元，若买甲 n 件，乙 m 件还差 20 元，问 1 000 元钱买甲、乙两种商品共 10 件，其中甲商品要尽可能多买，每种商品各买几件？

分析　可抓住两个量写等式；一是钱共 1 000 元；商品共 10 件．

解　设甲商品每件 x 元，乙商品每件 y 元．根据题意，得

$$\begin{cases}mx+ny=1\,000+80, & ①\\ m+n=10, & ②\\ nx+my=1\,000+20, & ③\\ x=y+30. & ④\end{cases}$$

由 ④，①，得

$$(m+n)y=1\,080-30m. \qquad ⑤$$

由 ④，③，得