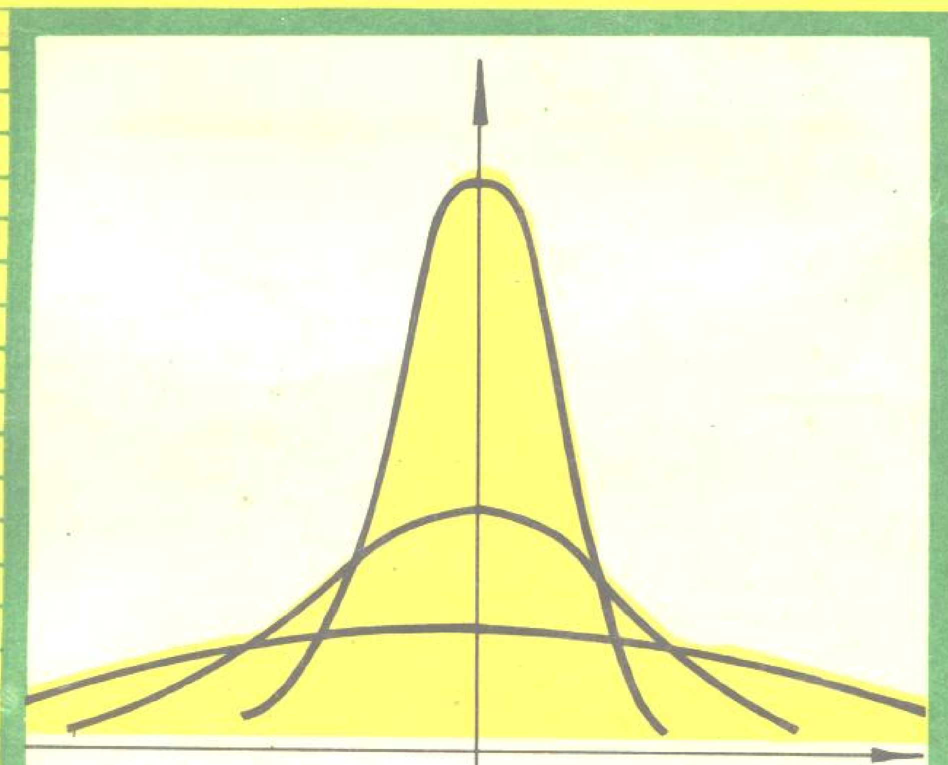
概率论与数理统计常用方法

• 韩普宪　王向东　徐赐文　主编 • 重庆大学出版社

GAILULUN YU SHULI TONGJI CHANGYONG FANGFA



概率论与数理统计常用方法

重庆大学出版社

概率论与数理统计常用方法

主　编　韩普宪　王向东　徐赐文
副主编　谭祖林　张双奎　李民安　纪玉卿
编　委　王向东　李培录　李民安
李冬辉　李柳辰　张双奎
纪玉卿　徐赐文　胡晓山
韩普宪　鲁孟琳　谭祖林

重庆大学出版社

内 容 简 介

本书简明扼要地介绍了概率论与数理统计所依据的必须的基本知识和基本理论，举例分析了各类常用方法，并针对某一类问题的解决方法进行了归纳、总结。本书涉及的内容有随机事件与概率、随机变量及其分布、数字特征与特征函数、极限定理、数理统计的基本概念、假设检验与区间估计、方差分析和回归分析。

本书可作为普通高校与各类成人高校学生的学习参考书，同时可供有关工程技术人员阅读。

概率论与数理统计常用方法

韩普宪 王向东 徐赐文 主编

责任编辑 刘茂林

*

重庆大学出版社出版发行

新 华 书 店 经 销

重庆通信学院印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/16 印张：13.75 字数：343 千

1996 年 8 月第 1 版 1996 年 8 月第 1 次印刷

印数：1—5000

ISBN 7-5624-1226-X/O·135 定价：11.80 元

(川)新登字 020 号

前　言

20世纪现代数学的特征之一是，概率论与数理统计迅速普及，几乎渗入所有的科学分支．“作为一个现代社会中的普通居民，不懂些统计已经应付不了大量的数据和信息．有人认为，统计知识还将进一步普及，它一定会比解二次方程更为人所知，这恐怕不是言过其实的．”(张莫宙、赵斌编著《二十世纪数学史话》)

为了使概率论与数理统计方法进一步普及，我们编写了《概率论与数理统计常用方法》．本书的侧重点是介绍方法和应用，而不是证明．我们相信，一个不会证明概率统计定理的人，还是可以学会其中的方法并用来解决实际问题的．正像使用电视机，不掌握电视机结构的人，只要会开关、选台，就能收看电视节目．

《概率论与数理统计常用方法》一书的每一章都设有主要内容和常用方法举例两个栏目．在主要内容栏目中，扼要介绍了常用方法所依据的必需的基本知识和基本理论；在常用方法举例栏目中，努力作到所选例子新颖、内容全面、方法多样．同时，结合例子，以评注形式，归纳了一类问题的一般形式，总结了各种运算的主要方法，明确了解答典型问题的一般步骤，指出了各种可能发生的常见错误．

本书充分考虑正在学习概论统计课程的大学生的需要，具有必要的深度和广度．为了帮助大学生解决好“书好读，题难做”这一带有普遍性的矛盾，本书还特别注意解题分析和方法总结．本书可作为普通高校学生、成人高校学生、业余大学学生在学习概率统计课程时的参考书．

编写本书时，我们参阅了大量的国内外的有关著作，选用了其中一些例子．在此向有关作者表示真挚的谢意！

由于时间仓卒和作者水平有限，书中缺点、错误难免，请各位专家、读者赐教．

作　者

1993年5月于郑州

目　录

第一章 随机事件与概率

第一节 随机事件及其运算

一、主要内容

1. 确定性现象、随机现象

在一定条件下必然发生或必然不发生的现象称为确定性现象．在一定条件下具有多种可能发生的结果，而事先不能肯定究竟发生哪一种结果，这类现象称为随机现象．

随机现象在大量重复试验中所呈现出的固有规律性称为随机现象的统计规律性．

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科．

2. 随机试验

一个试验如果满足下列条件：

(1) 试验可以在相同条件下重复地进行；

(2) 试验的可能结果不止一个，并且事先明确试验的所有结果；

(3) 每次试验总是恰好出现这些结果中的一个，但在试验之前却不能肯定这次试验会出现哪一个结果．

就称这样的试验是一个随机试验，今后简称试验．

这里指的试验，不但包含一般意义下的科学试验，而且包含对某一事物的某一特征的观察．

3. 基本事件、样本空间、样本点

试验的每一个可能结果称为基本事件．所有基本事件的全体称为样本空间，记作 Ω．每一个基本事件叫做样本点，记作 $\omega, \omega \in \Omega$.

样本空间的一个重要特点：在一次试验中，样本空间中有一个，而且只有一个基本事件出现．

4. 必然事件、不可能事件

随机事件是样本空间 Ω 的子集，常用字母 A, B, C 等表示．随机事件，在一次试验中，可能发生，也可能不发生．在一次试验中一定发生的事件称为必然事件，记作 Ω；而在一次试验中一定不发生的事件称为不可能事件，记作 Φ. 必然事件和不可能事件，是一种确定性事件．但是为了讨论方便，今后必然事件和不可能事件也称作随机事件．随机事件常简称为事件．

5. 子事件

若事件 A 发生时，事件 B 也必定发生，则称事件 B 包含事件 A，事件 A 是事件 B 的子事件，记作 $A \subset B$. 如图 1-1.

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 A、B 两事件相等，记作 $A = B$.

6. 和事件、积事件、对立事件、差事件

事件 A 发生或事件 B 发生的事件，称为 A、B 二事件的和事件，记作 $A + B$ 或 $A \cup B$，事

件 $A+B$ 发生，意味着 A、B 二事件至少一个发生．一般地，事件 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 发生当且仅当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生．更进一步，可列个事件的和事件 $A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots$ 发生当且仅当 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生．

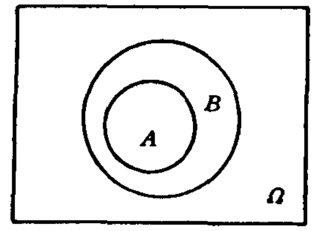


图 1-1

事件 A 发生且事件 B 发生的事件，称为 A、B 二事件的积事件，记作 AB 或 $A\cap B$．事件 AB 发生意味着 A、B 二事件同时发生．一般地，事件 $A_1A_2\cdots A_n$ 发生当且仅当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生．更进一步，可列个事件的积事件 $A_1A_2\cdots A_n\cdots$ 发生当且仅当 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生．

事件 A 不发生的事件，称为事件 A 的对立事件，记作 $\overline{A}$，显然对立事件是相互的，即有 $\overline{\overline{A}}=A$．

事件 A 发生且事件 B 不发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的差事件，记作 $A-B$．

应当指出的是，对于事件差的运算，关系式 $(A-B)+B=A$ 一般不成立．

7. 事件间的不相容与互斥

若事件 A 与 B 不能同时发生，即 $AB=\Phi$，则称 A、B 二事件互不相容或互斥．进而，若一组事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则称事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是互不相容的或互斥的．

显然同一样本空间中的样本点是互斥的．

8. 完备互斥事件组

若一事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足条件：

(1) 完备性：$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$；

(2) 互斥性：$A_iA_j=\Phi \quad (1\leqslant i\neq j\leqslant n)$，

则称它是完备互斥事件组．

9. 事件域

设 $\mathscr{F}$ 是样本空间 Ω 的一个事件集合，若其满足条件：

(1) $\Omega\in\mathscr{F}$；

(2) 若 $A\in\mathscr{F}$，则 $\overline{A}\in\mathscr{F}$；

(3) 若 $A_i\in\mathscr{F}, i=1,2,3,\cdots$，则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$，则称 $\mathscr{F}$ 为 Ω 上的一个事件域．

10. 事件运算的规律

事件运算满足下列规律：

(1) 交换律 $A+B=B+A,\quad AB=BA$；

(2) 结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$，
$(AB)C=A(BC)$；

(3) 分配律 $(A+B)C=AC+BC$，
$AB+C=(A+C)(B+C)$；

(4) 等幂律 $A+A=A,\quad AA=A$；

(5) 同一律 $A+\Omega=\Omega,\quad A+\Phi=A$，
$A\Omega=A,\quad A\Phi=\Phi$；

(6) 互补律　$A+\overline{A}=\Omega, A\overline{A}=\Phi$;

(7) 对偶律　$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.

二、常用方法举例

例 1.1.1　写出下列试验的样本空间：

(1) 掷一颗骰子，考虑它出现的点数；

(2) 掷一颗骰子，考虑它出现的点数的奇偶性．

解　(1) 明显，本试验的基本事件为 A_i:"出 i 点"，$i=1,2,3,4,5,6$；样本空间为：$\Omega=\{A_1,A_2,A_3,\cdots,A_6\}$　且 $A_iA_j=\Phi(i\neq j, i、j=1,2,3,4,5,6)$.

(2) 明显，本试验的基本事件为：B_1:"出现 1、3、5 点"；B_2:"出现 2、4、6 点"．于是样本空间 $\Omega=\{B_1,B_2\}$，　$B_1B_2=\Phi$.

[评注]　由本例知，同一试验的样本空间 Ω 可有不同的划分．一般说来，样本空间的划分是相对依赖于所考虑的随机事件．在解决问题时，恰当选取基本事件，常常有利于问题更快解决．

例 1.1.2　将事件 $A=A_1+A_2+\cdots+A_n$ 分解为 n 个互不相容事件和．

解　令 $B_1=A_1$，　$B_2=A_2-A_1$，　$B_3=A_3-(A_1+A_2)$，……，　$B_n=A_n-\sum_{i=1}^{n-1}A_j$.

图 1-2 是其示意图．由 $B_1,B_2,B_3,\cdots,B_n$ 的构造知它们互不相容，从而知 $A=A_1+A_2+\cdots+A_n=B_1+B_2+\cdots+B_n$，其中 $B_i=A_i-\sum_{j=1}^{i-1}A_j$.

[评注]　图示只画了三个事件，其中竖条阴影部分为 B_2，方格阴影部分为 B_3.

这种将有限个事件的和分解成若干个互不相容的事件之和的方法叫依次进入分解法．这种方法较少单独用，常与其它方法联合使用．而此法常用于解题的第一步，使后面的解法简单．

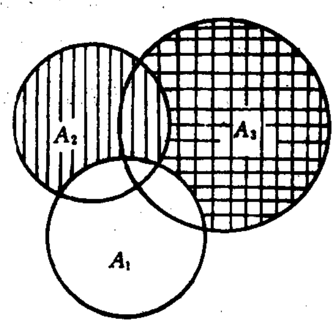


图 1-2

例 1.1.3　判断等式 $A-(B-C)=(A-B)+C$ 是否成立．

解　如图 1-3、图 1-4 选取 A、B、C.

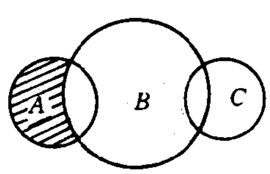


图 1-3

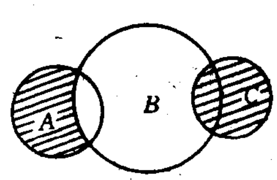


图 1-4

在图 1-3 中阴影部分为 $A-(B-C)$；

在图 1-4 中阴影部分为 $(A-B)+C$.

由 Venn 图易知：$A-(B-C)\neq(A-B)+C$.

[评注]　由本例可清楚地看出，采用 Venn 图解题是很直观的．

在代数中，有 $a-(b-c)=(a-b)+c$ 成立．但对于事件，$A-(B-C)\neq(A-B)+C$．这说明在事件运算中不能随意添去括号或移项．

例 1.1.4　对立与互不相容有何异同？试举例说明．

解　取 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，

$A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5,6\}$．

明显，A、B 互为对立事件，且有 $AB=\Phi$　即互为对立事件一定不相容．

另取 $C=\{5,6\}$，明显 $AC=\Phi$，但 $C\neq\Omega-A=\{4,5,6\}$　故 C 不是 A 的对立事件，即互不相容事件不一定是对立事件．

[评注]　一般地，事件 A、B 在满足互不相容的条件 $AB=\Phi$ 之外，还要满足 $A+B=\Omega$ 才是相互对立的．

例 1.1.5　A、B、C 三事件互不相容，是否一定有 $ABC=\Phi$？反之如何？

解　若 A、B、C 三事件互不相容，一定有 $ABC=\Phi$．因 $AB=\Phi$，$BC=\Phi$，$CA=\Phi$，则这三事件不会同时发生．即 $ABC=\Phi$．

反之，若 $ABC=\Phi$，A、B、C 不一定两两互不相容，如从编号为 1、2、…、20 的 20 张大小相同的卡片中随机地抽取一张，记 $A=\{$抽到的号码为奇数$\}$，$B=\{$抽到的号码为 3 的倍数$\}$，$C=\{$抽到的号码为 7 的倍数$\}$，则 $ABC=\{$抽到的号码是 21 的奇倍数$\}$，这显然是不可能事件．即 $ABC=\Phi$．但 $AB=\{3,9,15\}\neq\Phi$，$CA=\{7\}\neq\Phi$，故 A 与 B，C 与 A 都不是互不相容的．

例 1.1.6　若 $AB=\Phi$，$BC=\Phi$，能否得到 $AC=\Phi$？

解　不一定．如在样本空间 Ω 中，令 $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，$C=\{5,7,9,10\}$ 则 $AB=\Phi$，$BC=\Phi$，但 $CA=\{5,7\}\neq\Phi$，即 C、A 不互不相容．

[评注]　事件的互不相容性不具有传递性．

第二节　古 典 概 型

一、主要内容

1．频率

若在 n 次试验中，事件 A 发生 m 次，则称比值 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 在 n 次试验中的频率，记作 $P_n(A)=\frac{m}{n}$．

由定义可知频率有以下性质：

(1)　$0\leqslant P_n(A)\leqslant 1$；

(2)　$P_n(\Omega)=1$，$P_n(\Phi)=0$；

(3)　若 $AB=\Phi$，则 $P_n(A+B)=P_n(A)+P_n(B)$．

2．概率

若事件 A 的频率 $P_n(A)$ 当试验次数 n 很大时，稳定地在某一数值 p 的附近摆动，并且一般说来，摆动的幅度随试验的次数的增加而愈来愈小，则称数值 p 为事件 A 的概率，记作

$P(A)=p$.

简单说，事件的频率具有稳定性，频率的稳定值叫做事件的概率．这一对概率的直观描述，通常称为概率的统计定义，它的理论基础是大数定律．

3*．概率测度、概率空间

设 $P(A)$ 是定义在样本空间 Ω 的事件域 $\mathscr{F}$ 上的实值集函数，若其满足下列条件：

(1) 非负性　$P(A)\geqslant 0$ 对任 $A\in\mathscr{F}$;

(2) 规范性　$P(\Omega)=1$;

(3) 完全可加性　若 $A_i\in\mathscr{F}, i=1,2,3,\cdots$，且 $A_iA_j=\Phi,(i\neq j)$，则

$$P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) \tag{1.2.1}$$

则称集函数 $P(A)$ 为 $\mathscr{F}$ 上的概率测度，简称概率，三元总体 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 称为概率空间．

这是概率的公理化定义．

由概率的完全可加性，易得

有限可加性．若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一组互斥事件，则

$$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{1.2.2}$$

特别地，若二事件 A、B 互斥，则有

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1.2.3}$$

关于事件的概率的实际计算，统计定义本身给出了一种近似求法，即做大量的试验，计算事件 A 的频率．但对某些类型的概率问题，如古典概型、几何概型、贝努里概型等，可以根据其特征直接计算事件的概率，下面先讨论古典概型．

4．古典概型

若随机试验的样本空间 Ω 中，基本事件的个数是有限的，而且每个基本事件出现的可能性是相同的(等概)，则称其为古典概型．

设古典概型的样本空间 Ω 的基本事件为：$A_1,A_2,\cdots,A_n$，则由

$$\sum_{i=1}^{n}P(A_n)=P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=P(\Omega)=1$$

和　$P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_n)$，易得

$P(A_i)=\frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$．若事件 A 中包含有 m 个基本事件，则

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1.2.4}$$

这就是古典概型的计算公式．

5．概率的加法公式

对于任意二事件 A、B，有概率的加法公式

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.2.5}$$

二、常用方法举例

例1.2.1　设有一批产品共100件，其中有5件次品，现从中任取50件，问：无次品的概率

是多少?

解 从100件产品中任取50件,一次抽取便构成一个基本事件,共有C_{100}^{50}种方法,因而样本点的个数为$n = C_{100}^{50}$. 由于抽取是任意的,故每一个样本点的出现是等可能的. 问题可用古典定义来解决.

设A = {任取50件其中无次品}. 明显,要所取的50件中无次品必须是从那95件正品中取来的. 可见这种无次品的取法共有C_{95}^{50}种,所以,

$$P(A) = C_{95}^{50}/C_{100}^{50} = \frac{95!(50!45!)}{100!(50!50!)} = \frac{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot 46}{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{47}{99}\cdot\frac{46}{97} = \frac{1081}{38412} = 2.8\%.$$

[评注] 解决一个问题,能用古典方法的前提是样本点必须有限;每个样本点等概.

利用古典方法求一事件的概率,关键在于算出样本空间所含样本点的个数n及事件所含样本点的个数m,在数目n较大时,往往利用"排列组合"知识求得. 因此,排列组合是计算古典概率的重要工具,读者必须熟练掌握,灵活运用.

例1.2.2 袋中有a个黑球,b个白球,从中逐一将它们取出,求第k次取出的球恰为黑球的概率.

解一 设事件A = "第k次取出的球恰为黑球"

将袋中的球依次编号,黑球为$1,2,\cdots,a$号,白球为$a+1,a+2,\cdots,a+b$号,从而样本空间中基本事件总数为$(a+b)!$. 有利于事件A的基本事件数为:$a(a+b-1)!$故

$$P(A) = \frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b}$$

解二 视各白球之间无区别,各黑球之间无区别,则相当于将$a+b$个"格子"分成两类,基本事件总数可认为$a+b$个格子中a个为黑球所占,而这a个位置是任意的. 有利于A(本解法一中A同)的情况可认为在$a+b$个格子中除第k个位置必须放一个黑球外,其余的在余下的$a+b-1$个格子中有任意$a-1$个位置放黑球,从而:

样本空间基本事件总数为:C_{a+b}^{a}

有利于事件A的基本事件数为:C_{a+b-1}^{a-1}

故 $$P(A) = \frac{C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^{a}} = \frac{a}{a+b}$$

解三 视逐一取出为两步完成:前k次为从$a+b$个球中任取k个放在k个位置,要考虑次序,故为排列问题. 共有A_{a+b}^{k}种放法,剩余的从$a+b-k$个球中取$a+b-k$个球放在后$a+b-k$个位置上,故样本空间中基本事件总数为:

$$A_{a+b}^{k}\cdot A_{a+b-k}^{a+b-k} = A_{a+b}^{k}.$$

而有利于事件A的基本事件数为如下计算:在第k个位置放黑球,共有a种取法,在前$k-1$个位置上有A_{a+b-1}^{k-1}种放法,余下的$a+b-k$个位置有A_{a+b-k}^{a+b-k}种放法,从而由乘法原理有利于事件A的基本事件数为:$a\cdot A_{a+b-1}^{k-1}\cdot A_{a+b-k}^{a+b-k} = a\cdot A_{a+b-1}^{k-1}$

所以 $$P(A) = \frac{a\cdot A_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^{k}} = \frac{a}{a+b}.$$

解四 因为每一个球都有同样可能的机会放在第k个位置上(即被第k次抽取时抽到),

而只有当 a 个黑球之一出现在第 k 个位置上时事件 A 才发生，从而：

样本空间中基本事件总数为：$a + b$；

有利于事件 A 的基本事件数为：a，

故
$$P(A) = \frac{a}{a+b}.$$

[评注] 由本例明显看出，由于样本空间的构造不同，解决问题的方法也不同，解法四的样本空间最简单，答案就一目了然．

用古典定义求概率时，值得注意的是，m 与 n 必须用同样办法求，即要用组合知识都用组合知识求；若用排列知识都用排列知识来求，否则容易出错误．

例 1.2.3 设有 3 对夫妻参加舞会，若由男方抽签从 3 位女方中决定舞伴，试求至少有一位男的未与其妻共舞之事件 A 的概率．

解 假定三位男的排成一列，则所谓三位男方抽签决定其女伴，相当于三位女方作全排列，其可能排法有 $3! = 6$ 种，此即为样本空间全体样本点的个数，且此 6 种机会均等．

令 A_1 = "恰有一位男方未与其妻共舞"．此事件显然不可能，故 $P(A_1) = 0$.

令 A_2 = "恰有二位男方未与其妻共舞"，A_3 = "恰有三个均未与其妻共舞"，于是 $A = A_2 + A_3$，由于 $A_2A_3 = \Phi$，故

$$P(A) = P(A_2) + P(A_3).$$

但是求 $P(A_2)$，$P(A_3)$ 比较麻烦，由于 $P(A) + P(\overline{A}) = 1$．故求出 $P(\overline{A})$ 即可求出 $P(A)$，而 $\overline{A}$ 表示：每人皆与其妻共舞的事件，它只有一种方法，从而：

$$P(\overline{A}) = \frac{1}{6}, \quad 故\ P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

[评注] 本例告诉我们，在用公式时，若所求的概率不易求（通常是有利场合数不易求）时，可以考虑将其改写为其它易求的事件概率之和或差（当然也可以用其它关系，不过和、差较常用）避免直接计算的困难．

例 1.2.4 设有 n 个球，每个球都能以同样的概率 $\frac{1}{N}$ 落到 N 个格子（$N \geqslant n$）的每一个格子中，试求：(1) 某指定的 n 个格子中各有一球的概率；(2) 任何 n 个格子中各有一个球的概率．

解 这是一个古典概型问题．由于每个球可落入 N 个格子中的任一个，所以 n 个球在 N 个格子中的分布相当于从 N 个元素中选取 n 个进行有重复的排列，故共有 N^n 种可能分布．

在第一个问题中，有利场合相当于 n 个球在那指定的 n 个格子中全排列，总数为 $n!$，因而所求概率为：$P_1 = \frac{n!}{N^n}$.

在第二个问题中，n 个格子可以任意，即可以从 N 个格子中任意选出 n 个来，这种选法有 C_N^n 种，对于每种选定的 n 个格子，有利场合正如第一个问题一样为 $n!$，从而所求概率为：

$$P_2 = \frac{C_N^n \cdot n!}{N^n} = \frac{N!}{N^n(N-n)!}.$$

[评注] 这个例子是古典概型中一个很典型的问题，不少实际问题可以归结为它．如：在 n 个人中，求无两人同生日的概率，即是在上例中将 n 个人视为 n 个球，而将一年的 365 天作为格子（不考虑闰年、闰月的情况，例如不考虑某人生于闰二月的最后一天的情况）．则 $N = 365$

从而 P_2 即为所求；又如统计物理学中的马克斯威尔 —— 波尔茨曼统计问题则是相当于上例中将球解释为粒子，将格子解释为粒子所处的能量状态(能级)的模型．

例 1.2.5 投掷 4 个骰子，试求出现的点数之和是 9 的概率．

解一 设想对这 4 个骰子已经分别编上号码 1、2、3、4，用 (a_1, a_2, a_3, a_4) 表示事件："第 i 个骰子出现 a_i 点，$i = 1、2、3、4$"，投掷 4 个骰子，基本事件为：(1,1,1,1)，(1,1,1,2)，(1,1,1,3)，……，(6,6,6,6) 等共有 6^4 个，这些基本事件是等概的，其中 4 个点数之和是 9 的有下面几种情形：

(1) 一个六点，三个一点的情形(6,1,1,1)，(1,6,1,1)，(1,1,6,1)，(1,1,1,6) 共有 4 个．

(2) 一个五点，一个二点，两个一点的情形：(5,2,1,1)，(2,5,1,1)，(5,1,2,1)，……，(1,1,2,5) 共有 $A_4^2 = 12$ 个．

(3) 一个四点，一个三点，两个一点的情形共有 12 个．

(4) 一个四点，两个二点，一个一点的情形共有 12 个．

(5) 两个三点，一个二点，一个一点的情形共有 12 个．

(6) 一个三点，三个二点的情形共有 4 个．

总共有 56 个，故所求的概率为：$\dfrac{56}{6^4} = \dfrac{7}{162}$.

解二 把基本事件(6,1,1,1)看作是将 9 个球分配到 4 个房间的一个分配方法：第一个房间有 6 个球，其余房间各有一球．这样，计算四个点数之和是 9 的基本事件有多少个问题就要变为计算将 9 个球分配到 4 个房间，并且没有空房间，有多少种不同分法的问题．如图 1-5 所示，4 个房间有 3 个公共的墙，在 9 个球产生的 8 个缝隙中选择 3 个安装上墙，就产生一个分配方法，对三个缝隙的不同选择就产生了不同的分配方法，在 8 个缝隙中选 3 个共有

$C_8^3 = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$ 种选择方法，故所求概率为：$56/6^4 = \dfrac{7}{162}$.

○○○○○○|○|○|○

图 1-5

例 1.2.6 甲、乙两人掷均匀硬币，其中甲掷 $n+1$ 次，乙掷 n 次，求"甲掷出正面的次数大于乙掷出正面的次数"这一事件的概率．

解 设 A = "甲掷出正面次数 > 乙掷出的正面次数"；

B = "甲掷出的反面次数 > 乙掷出的反面次数"；

则 $\overline{A}$ = "甲掷出的正面次数 ≤ 乙掷出的正面次数" = "甲掷出的反面次数 > 乙掷出的反面次数"

于是 $P(\overline{A}) = P(B)$

而 $1 = P(A) + P(\overline{A})$

从而 $P(A) + P(B) = 1$.

但由于每人掷出正面与掷出反面的机会均等，故 $P(A) = P(B)$，从而 $P(A) = \dfrac{1}{2}$.

[评注] 本例巧妙地运用了"对称性"使问题迎刃而解，避免了复杂的计算．其实，在古典概型中，所谓"等可能性"是对称性的一种后果，因为各个基本事件处在"对称"的位置上，所以才有"等可能性"．

例 1.2.7 把 1、2、3、4、5 五个数各写在一张小纸片上，然后从中依次取出三张（每次取出后不放回），从左到右排成一个三位数，试求：

(1) 这个三位数的个位是 2 的概率；

(2) 这个三位数的个位是偶数的概率．

解 从 1、2、3、4、5 中依次取出三个数（无放回）从左至右排成一个三位数，就是这三个数的一个全排列，每个这样的排列就是一个基本事件，故基本事件共有 $A_5^3 = 60$ 个，且 60 个基本事件是等可能的，在这 60 个排列中，个位数是 2 的排列有 $A_4^2 = 12$ 个，所以个位数是 2 的概率是：$\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$.

个位数是 2 或 4 的排列有 $2A_4^2 = 24$ 个，所以三位数是偶数的概率是：$\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$.

例 1.2.8 有限样本空间的样本点是否一定等概？

解 不一定．

如：袋中有同样的3个白球和2个黑球，随机取一球，观察其颜色．若将球编上号码1、2、3、4、5，令 A_i = "取到第 i 号球"，$i = 1、2、3、4、5$，　$\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$，则 Ω 的五个样本点是等概的，即有　$P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_5) = \frac{1}{5}$.

但若令 ω_1 = "取到白色球"，ω_2 = "取到黑色球"．$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$．则明显有 $P(\omega_1) = \frac{3}{5}$，$P(\omega_2) = \frac{2}{5}$，　故　$P(\omega_1) \neq P(\omega_2)$.

[评注]　同一随机试验，由于样本空间的选取不同，虽然样本点都有限，可能在一种情况下是等概的，另一种情况却不等概．

例 1.2.9 对任意事件 A、B，是否一定有 $P(A-B) = P(A) - P(B)$？

解 不一定．

如：　令 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$，

$A = \{1,2,3,4\}$，　$B = \{3,4,5,6\}$，

则　$A - B = \{1,2\}$，$P(A-B) = \frac{1}{3}$，而 $P(A) = \frac{2}{3}$，$P(B) = \frac{2}{3}$，$P(A) - P(B) = 0$，

故 $P(A-B) \neq P(A) - P(B)$.

[评注]　若 $A \supset B$，则 $P(A-B) = P(A) - P(B)$ 成立，一般地有 $P(A-B) = P(A) - P(AB)$ 成立．

第三节　几何概型

一、主要内容

设一随机试验的样本空间 Ω 是大小为 S 的几何区域，向 Ω 上任意投点，并且试验的结果由投点落在 Ω 上的点的随机位置来确定的，又在区域内点的任意位置是等可能的．若 Ω 的子区域 A 的大小为 S_A，则事件 A = "投点落在 A 上" 的概率

$$P(A) = \frac{S_A}{S} \tag{1.3.1}$$

此处区域大小 S 可以有任意单位,可能是线段的长度、曲面的面积,空间区域的体积等.

关于区域内点的位置的等可能性,其确切意义是:设区域 Ω 中有任一个小区域 A,其大小为 S_A,则投点落入 A 上的可能性大小只与区域 A 的大小成正比,而与区域 A 的位置、形状无关.

二、常用方法举例

例1.3.1 概率为零的事件是否一定是不可能事件?

解 不一定.

如图1-6,令 $\Omega = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$,

$$A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

若向 Ω 内随机投点,则 $P(A) = \dfrac{A\text{的面积}}{\Omega\text{的面积}} = \dfrac{0}{4\pi} = 0$

但 $A \neq \Phi$(点落在圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上是可能的).

[评注] 对于样本点有限(比如古典概型)或样本点可数的情况,若 $P(A) = 0$,则 $A = \Phi$.

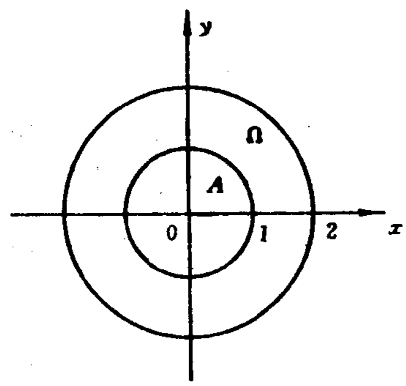


图1-6

例1.3.2 概率为1的事件是否一定是必然事件?

解 不一定.

如前例的几何概型中

$\overline{A} = \Omega - A = \{(x,y): 0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$ 且 $x^2 + y^2 \neq 1\}$

故 $P(\overline{A}) = P(\Omega) - P(A) = 1 - 0 = 1.$

但事件 $\overline{A}$ 显然不是必然事件 Ω(若向 Ω 内随机投点,点可能不落在 $\overline{A}$ 上而落在 A 上.

[评注] 对于样本点有限(比如古典概型)或样本点可数的情况,若 $P(A) = 1$,则 $A = \Omega$.

在学习概率时,常常能够从事件之间的关系推出它们的概率之间的关系,但反过来一般不能用事件之间的概率关系推断出事件之间的关系.

例1.3.3 在线段 $(0,a)$ 上任意投三个点,试求由 O 至三点的三线段能构成三角形的概率等于多少?

解 设 O 到三点的三线段长分别为 x、y、z,(不妨设相应的右端点坐标为 x、y、z 如图1-7(a)). 显然有 $0 < x, y, z < a$,这三条线段构成三角形的充要条件是:

$$x + y > z; \quad x + z > y; \quad y + z > x$$

在线段上任意投三点 x, y, z 与立方体 $0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant a, 0 \leqslant z \leqslant a$ 中的点 (x, y, z) 一一对应,由此可见,所求"构成三角形"的概率等价于在边长为 a 的立方体 Ω 中均匀掷点而点落在 $x + y > z, x + z > y, y + z > x$ 区域中的概率,即落在由 $\triangle ADC$、$\triangle ADB$、$\triangle BDC$、$\triangle AOC$、$\triangle AOB$、$\triangle BOC$ 所围成的区域 G 中的概率.

$$\Omega \text{ 的测度(体积)} = a^3$$

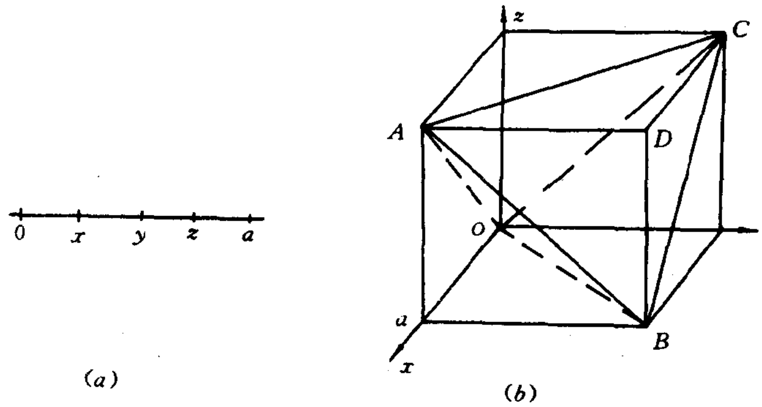


图 1-7

$$G\text{ 的测度(体积)} = a^3 - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{2}$$

所以 $$\text{所求概率} = \frac{G\text{ 的测度}}{\Omega\text{ 的测度}} = \frac{a^3/2}{a^3} = \frac{1}{2}$$

例 1.3.4(会面问题) 两个相约 7 点到 8 点在某地会面,先到者等候另一个 20min,过时就可离去,试求这两个能会面的概率.

解 此例可以认为每个在 7 点到 8 点这段时间到达某地为等可能的,若以 X、Y 分别表示两人到达某地的时刻,由题意知:两人能会面的充要条件为 $|X-Y| \leqslant 20$. 可能结果的全体是边长为 60 的正方形里的点,能会面的"点"的区域如图 1-8 用阴影标出,故所求概率为

$$P = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}$$

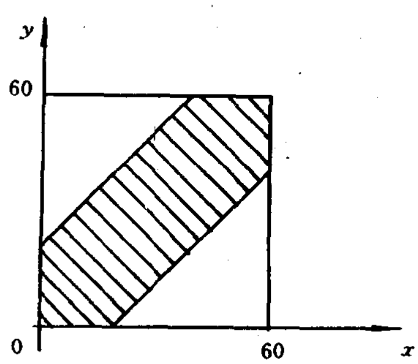


图 1-8

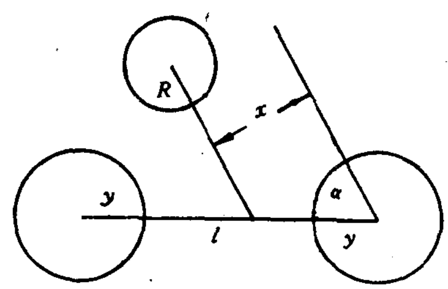


图 1-9

例 1.3.5 在水平面上沿直线 AB 垂直地摆着一些半径为 r 的相同的圆柱体,其中心之间隔为 l,以角度 α 向直线投一半径为 R 的圆球,如果圆球的运动轨迹与直线 AB 等可能地相交于任何一点,求圆球与圆柱体相碰的概率.

解 通过圆柱体中心作与圆球运动轨迹相平行的线,设 x 为圆球中心与最近平行线间的距离,则 x 的可能值由不等式 $0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}\sin\alpha$,求得(如图 1-9),只有当 $0 \leqslant x \leqslant (R+r)$ 时,球与圆柱体相碰,而所求的概率等于 x 的有利值与 x 的所有可能值的线段长之比,所以,如果