高等数学证题方法

GAODENGSHUXUEZHENGTIFANGFA

张自兰　崔福荫　编

陕西科学技术出版社

高等数学
证题方法

张自兰　崔福荫　编

陕西科学技术出版社

责任编辑　赵生久

高等数学证题方法

张自兰　崔福荫　编

陕西科学技术出版社出版

（西安北大街131号）

陕西省新华书店发行　空军工程学院印刷厂印刷

787×1092 毫米 32 开本　$13\frac{1}{2}$ 印张　288 千字

1985年9月第1版　1985年9月第1次印刷

印数：1—6000

统一书号：7202·120　定价：2.85元

前　言

高等数学中的证明题目，对于初学者来讲，往往感到证明困难，缺少证题方法，掌握不住其证题的规律。但证明题目是高等数学中一个很重要的组成部分，通过解证明题目的练习，可以帮助读者弄清概念、命题、定义、条件、结论之间的本质联系，可以加深对微积分学基本理论的理解；同时有助于培养学生的逻辑思维和抽象思维能力，从而提高分析问题和解决问题的能力．为此，我们本着强调重点、辅导难点的宗旨编写了这本高等数学证题方法．

本书着重介绍了证题的基本规律和十种常用的证题方法，每种方法均举示了有代表性的证明题目．

本书中400余道有代表性的证明题目系选自国内外教材，教学参考书、历届硕士研究生入学考题等．适用于电大、夜大、工科院校、经济类院校的学生参考使用，同时由于采用了大量研究生入学考题，因而可以帮助报考硕士研究生的同志熟悉和掌握各类学校对证明题所要求的深度和广度．对于从事高等数学教学的教师，也可作为一本查阅证明题目证法的工具书。

本书由全国工科数学教材编审委员、西北工业大学副教授孙家永同志主审，西安交通大学蒋传璋老师仔细阅读了初稿，并提出了宝贵意见，在此一并致谢．

由于编者水平有限，错误遗漏在所难免，敬请读者批评指正．

编者

1985年7月

目　录

第一章　高等数学中证明题目常用重要概念及概念之间的关系

§1·1　函　　数

1．常见的三种函数定义

定义1　设有两个变量x和y，如果对于x的变化范围内的每一个值，y按一定规则有一个确定的值与之对应，则称y是x的函数，记作$y=f(x)$。

定义2　设A和B是两个集合，如果对于每个A的元素x，依照某一法则，总有确定的一个B的元素y和它对应，那么这个对应法则就叫做一个函数。

定义3　设A和B是两个集合，函数f是一个序对(x、y)的集合，其中$x\in A$，$y\in B$，并且任何两个不同序对都没有相同的第一个元素。

以上三个定义的特点是：定义1是把函数概念建立在"变量"和"对应"的基础上，并且把一个变量叫做另一个变量的函数；定义2用集合A和B取代了两个变量x和y，把函数概念建立在"集合"和"对应"的基础上；而定义3是为了适应现代数学中对于函数概念的需要，把函数的直观观念同数学的严格表述恰当的结合起来，用集合的观点所给

函数的定义.

2. 分段函数

不能用一个解析式子表示的函数，即在自变量的不同变化范围内，用不同的解析式子表式的函数，称为分段函数，例如：

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\geqslant 0,\\ x, & x<0.\end{cases}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant \pi,\\ \pi-x, & x>\pi.\end{cases}$$

注意 （1）分段函数是一个函数，并不是几个函数；

（2）分段函数不是初等函数.

3. 函数的性质

（1）函数的单值性与多值性

函数的自变量在其定义域内任取一个值时，若仅有一个函数值与之对应，则称为单值函数；若有两个或两个以上的函数值与之对应，则称为多值函数.

（2）函数的奇偶性

若$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数；若$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数.

另外在判断函数奇偶性时，还可利用以下事实

偶$\pm$偶$=$偶

偶$\overset{\times}{\div}$偶$=$偶

奇$\pm$奇$=$奇

$$奇 \underset{+}{\times} 奇 = 偶$$

$$偶 \underset{\div}{\times} 奇 = 奇$$

（以上运算均对两个不同函数而言）．

而且$f(x)+f(-x)$是偶函数，$f(x)-f(-x)$是奇函数，其中$f(x)$可以为任意函数．

偶函数的图形对称于y轴，奇函数的图形对称于坐标原点．

例如：符号函数

$$f(x)=\mathrm{sgn}x\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

是奇函数．

（3）函数的单调性

若函数$y=f(x)$在区间（a，b）内随x的增加而增加，即设x_1、x_2是（a，b）内任意两点，而$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数在区间（a,b）内为单调增加．

若函数$y=f(x)$在区间（a，b）内随x增加而减少，即设x_1、x_2是（a，b）内任意两点，而$x_1<x_2$时，有$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数在区间（a，b）内为单调减少．

同样可以在无限区间上定义单调增加（或减少）的函数．

在整个区间上为单调增加（或减少）的函数称为单调函数．

（4）函数的有界性

设函数$y=f(x)$在æ上有定义（æ可以是函数$f(x)$的整个定义域，但也可以只是定义域的一部分）．如果存在一个正数M，使得当x取æ内的任一值时，对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

则函数$f(x)$在æ内是有界的．若这样的M不存在，就说$f(x)$在æ内是无界的．

有界函数图象的特点是它完全落在平行于x轴的两直线$y=M$和$y=-M$之间．

如三角函数$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$在整个数轴上是有界的，因为对一切实数x，有

$$|\sin x|\leqslant 1 \quad 和 \quad |\cos x|\leqslant 1$$

函数$y=x^3$在$(-\infty,\ +\infty)$上无界，函数$y=x^2$在$(-\infty,\ +\infty)$上仅有下界，因为对任何实数x，都有$x^2\geqslant 0$，（即$y\geqslant 0$）．

（5）函数的周期性

若对函数$y=f(x)$存在一个正数T，使得$f(x+T)=f(x)$，则称$f(x)$是以T（T是满足这种关系的最小正数）为周期的周期函数．

如何判断一个函数$y=f(x)$是否为周期函数呢？

若T为函数$y=f(x)$的周期，则对任何x（定义域内的）都应有$f(x)=f(x+T)$，即

$$f(x)-f(x+T)=0\ , \qquad (1\cdot1)$$

或

$$f(x+T)-f(x)=0\ . \qquad (1\cdot2)$$

在（1·1）或（1·2）两式中，将T看作未知量求解，若

解出的T依赖于自变量x或为零，则$f(x)$不是周期函数；若可以求出不依赖于x的非零常数解（一般地都不唯一），其中最小的正数解就是所求的周期。

例1·1·1 求$f(t)=\sin(\omega t+\theta)$的周期（其中$\omega$，$\theta$为常数，$\omega>0$）。

解 $f(t+T)-f(t)=\sin[\omega(t+T)+\theta]-\sin(\omega t+\theta)$

$$=2\sin\frac{\omega T}{2}\cdot\cos\left(\omega t+\theta+\frac{\omega T}{2}\right),$$

若T为$f(t)$的周期，则应有

$$f(t+T)-f(t)=0.$$

从而
$$\sin\frac{\omega T}{2}=0, \qquad ①$$

或
$$\cos\left(\omega t+\theta+\frac{\omega T}{2}\right)=0. \qquad ②$$

①的最小非零正数解为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$；

②最小的非零正数解为 $\omega t+\theta+\dfrac{\omega T}{2}=\dfrac{\pi}{2}$，

即
$$T=\frac{2\left[\frac{\pi}{2}-(\omega t+\theta)\right]}{\omega}$$

②的解依赖于t，可见这个解不能作为周期。所以，$f(t)=\sin(\omega t+\theta)$的周期是$\dfrac{2\pi}{\omega}$。

同理可求$\cos(\omega t+\theta)$的周期是$\frac{2\pi}{\omega}$，$\mathrm{tg}(\omega t+\theta)$ 和 $\mathrm{ctg}(\omega t+\theta)$的周期是$\frac{\pi}{\omega}$。

例1·1·2 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$是否为周期函数？

解 $f(x+T)-f(x)=\sin\frac{1}{x+T}-\sin\frac{1}{x}$

$$=-2\sin\frac{T}{2x(x+T)}\cos\frac{2x+T}{2x(x+T)}$$

若T为周期，则应有

$$\sin\frac{T}{2x(x+T)}=0 \qquad ①$$

或

$$\cos\frac{2x+T}{2x(x+T)}=0 \qquad ②$$

显然不存在满足①、②两式的非零常数T，所以$f(x)=\sin\frac{1}{x}$不是周期函数。

由上面两例可以看出，若$y=f(x)$为三角函数，讨论其周期性时，通常可利用和差化积公式。将方程$f(x+T)-f(x)=0$的左端分成几个简单的三角函数的积，然后研究关于T的三角方程是否有非零常数解，以确定函数的周期性。

§1.2 数列极限及函数极限

1. 数列极限

设有数列$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$。若对于任意指定的正数$\varepsilon$，总存在一个正整数$N$，使当$n>N$时，不等式

$$|u_n - A| < \varepsilon$$

恒成立，则称数列$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$以$A$为极限。记作

$$\lim_{n\to\infty} u_n = A \quad (\text{或} u_n \to A)$$

若一个数列有一个有限实数作为它的极限，则称该数列是收敛的；否则称该数列是发散的。发散的情况有三种：（1）极限不存在；（2）极限是正无穷大，即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$；（3）极限为负无穷大，即$\lim\limits_{x\to\infty} x_n = -\infty$。

若数列收敛，则必有界，但反之未必成立，例如数列$\{(-1)^n\}$有界而发散.

若数列为无穷大量，则必无界，但反之也未必成立，例如数列$\{1+(-1)^n\}$无界，但并不是无穷大量. 可以用集合表示如下：

$$\{\{x_n\}:\{x_n\}\text{收敛}\} \subset \{\{x_n\}:\{x_n\}\text{有界}\},$$

$$\{\{x_n\}:\{x_n\}\text{为无穷大量}\} \subset \{\{x_n\}:\{x_n\}\text{无界}\}.$$

2. 函数极限

若对于任意指定的正数ε，总存在一个正数δ，使当$0<|x-x_0|<\delta$时，不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

恒成立，则称当x趋于x_0时，$f(x)$以A为极限。记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad (\text{或} f(x)\to A\ (x\to x_0)).$$

在研究函数极限时，自变量的变化过程，除$x\to x_0$外，还有$x\to x_0+0$，$x\to x_0-0$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$等五种，下面将这几种情况下的定义，用一个对照表表示出来：（参看下页表）。

函数$f(x)$在x_0处的左、右极限存在且相等，是函数$f(x)$当$x\to x_0$时极限存在的充要条件。

数列极限，函数极限统称为变量的极限，在研究变量极限时，应当注意两点，一是要注意自变量的变化过程，二是要考察变量的变化趋势。

3．极限存在准则

准则Ⅰ　若在点x_0的某个邻域内（除去点x_0），有

$$F(x)\leqslant f(x)\leqslant \Phi(x),$$

而且
$$\lim_{x\to x_0}F(x)=\lim_{x\to x_0}\Phi(x)=A$$

则
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A，$$这个准则也叫夹逼定理．

准则Ⅱ　如果数列$\{u_n\}$单调增加，以M为上界，则数列有极限，而且极限值不大于M。

如果数列$\{u_n\}$单调减小，有下界m，则此数列有极限，而且极限不小于m。

4．两个重要极限

（1）
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

对于任给	总存在着一个正数	当自变量变化到	恒有关系式成立	结论	记作
$\varepsilon>0$	N (整数)	$n>N$	$\|u_n-A\|<\varepsilon$	当$n\to\infty$时，数列u_n的极限为A	$\mathop{\mathrm{lin}}\limits_{n\to\infty}u_n=A$
$\varepsilon>0$	δ	$0<\|x-x_0\|<\delta$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$	当$x\to x_0$时，$f(x)$以A为极限	$\mathop{\mathrm{lin}}\limits_{x\to x_0}f(x)=A$
$\varepsilon>0$	δ	$x>x_0$ $0<\|x-x_0\|<\delta$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$	当x大于x_0而趋向x_0时，A称为$f(x)$的右极限	$\mathop{\mathrm{lin}}\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$
$\varepsilon>0$	δ	$x<x_0$ $0<\|x-x_0\|<\delta$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$	当x小于x_0而趋向x_0时，A称为$f(x)$的左极限	$\mathop{\mathrm{lin}}\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$
$\varepsilon>0$	N	$\|x\|>N$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$	当$x\to\infty$时，$f(x)$以A为极限	$\mathop{\mathrm{lin}}\limits_{x\to\infty}f(x)=A$
$\varepsilon>0$	N	$x>N$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$	当$x\to+\infty$时，$f(x)$以A为极限	$\mathop{\mathrm{lin}}\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$
$\varepsilon>0$	N	$x<-N$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$	当$x\to-\infty$时，$f(x)$以A为极限	$\mathop{\mathrm{lin}}\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$

(2) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

§1·3 函数的连续性

1. 函数在一点连续的几种定义

定义1 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$，那末$f(x)$在点$x_0$连续。

定义2 如果$f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$，那末$f(x)$在点x_0连续。

定义3 （柯西）如果对于任意小的$\varepsilon>0$，都存在正数$\delta>0$,使得当$|x-x_0|<\delta$时，恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

那末$f(x)$在点x_0连续。

定义4 当自变量的改变量Δx为无穷小量时，函数的改变量Δy也是无穷小量，或者写为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x=x-x_0\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

那末$f(x)$在点x_0连续。

定义5 （海涅）如果对任何以x_0为极限的序列$\{x_n\}$恒有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$$

那末$f(x)$在点x_0连续。

以上几种定义都是等价的。

若$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0+0)=f(x_0)$，则称$f(x)$在点$x_0$右连续。

若$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0-0)=f(x_0)$，则称$f(x)$在点$x_0$左连续。

设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上有定义，如果$f(x)$在开区间(a,b)内连续，并且

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a),\qquad \lim_{x\to b^-}f(x)=f(b)$$

我们就说函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续。

2. 间断点的定义和分类

定义 设函数$f(x)$在x_0的一个邻域内有定义（x_0也可以除外），如果$f(x)$在x_0处不是连续的，则称x_0为函数$f(x)$的间断点。

间断点分为两类：

(1) 两个极限$f(x_0-0)$及$f(x_0+0)$都存在，而等式$f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0)$不成立，这种间断点称为第一类间断点。

(2) 上面两个极限中至少有一个不存在，这种间断点称为第二类间断点。

3. 连续函数的性质

(1) 关于连续函数的构成性质

1° 如果$f(x)$与$g(x)$在共同区间Ⅰ连续，则$f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$f(x)/g(x)$ $(g(x)\neq 0)$在此区间Ⅰ上也连续。

2° 两个连续函数复合起来的函数仍是连续函数。