应用数学译丛

第1号

人寿保险数学

〔瑞士〕汉斯 U·盖伯 著

成士学 严颖 译

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

人寿保险数学/(瑞士)盖伯(Gerber,H. U.)著;成世学,严颖译. —北京:世界图书出版公司北京公司,1996. 3

(应用数学译丛/章祥荪等主编)

书名原文:Life Insurance Mathematics

ISNB 7—5062—2862—9.

Ⅰ.人… Ⅱ.①盖… ②成… ③严… Ⅲ.人寿保险—数学 Ⅳ.F840. 62

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 22718 号

Hans U. Gerber

LIFE INSURANCE MATHEMATICS

Springer-Verlag, Swiss Association of Actuaries, 1990

人寿保险数学

〔瑞士〕汉斯 U. 盖伯 著

成世学 严 颖 译

程 侃 校

*

世界图书出版公司北京公司出版

北京朝阳门内大街 137 号

邮政编码:100010

北京昌平百善印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经销

*

1996 年 5 月第一版	开本:850×1168 1/32
1996 年 5 月第一次印刷	印张:5
印数:0001—2000	字数:120 千字

ISBN 7—5062—2862—9/O · 177

著作权合同登记号 图字:01—95—870 号

定价:14. 00 元

应用数学译丛

中文版序

当我获悉，我的朋友与同事，中国人民大学的成世学与严颖愿意将我的著作译成中文时，我感到非常高兴与骄傲。将一本科学著作从一种语言译成另一种语言，是一件极富挑战性的任务。我非常赞赏他们为这一任务的成功实施所付出的努力与智慧。为此，我对他们致以十分诚挚的谢意。

我也要对世界图书出版公司北京公司为出版这本著作所做的大量工作，以及瑞士再保险公司对这一项目的鼓励与支持表示感谢。本书最初是由德国斯普林格出版社与瑞士精算协会共同以德文与英文发表的。我谨以这两个组织的名义，对该书的中文版致以最良好的祝愿，并衷心地希望，此书中文版的出版将会继续促进中国与欧洲精算师之间富有成果的学术交流。

译 者 的 话

保险业在西方发达国家很盛行。自 Edmund Halley 于 1693 年构造了世界上第一张生命表算起，至今已有三百多年的历史。当今，在西方一些发达国家，差不多 90%以上的居民购买了不同险种的保险。

随着我国经济改革的逐步深入，保险事业越来越受到国家与全社会的关注，势必在不久的将来会有很大的发展。国外许多著名的保险公司也纷纷看好中国的潜在市场，到中国寻求发展。在这样的大环境下，我们决定在中国人民大学开设精算数学等课程，以配合保险业在我国的这一发展潮流。我们遇到的一个问题是，我国这方面的教材极为匮乏。为此，我们写信给国际精算界颇享盛誉的专家、1995 年度 Centennial 奖获得者、瑞士洛桑大学商学院教授兼精算研究所所长盖伯教授，希望得到他的帮助。盖伯教授很快就寄来了他的两本著作，其中的一本即是现在翻译出版的《人寿保险数学》。

人寿的偶然性本质上是一种随机现象，可是直至十余年前(即 80 年代初)，保险精算大体上却仍以确定性模型为基础。这一不协调的情形，直至盖伯教授所著的《人寿保险数学》发表后，才有了根本的改观。作者一反传统观点，在该书中彻底采用了能更好地反映保险机制实质的随机模型。国际保险界最具权威性的杂志《保险：数学与经济》(《Insurance：Mathematics & Economics》)于 1987 年发表了长篇书评，指出该书是“第一本关于人寿保险数学的现代教材”，“它与经典教材之间最明显的差别是采用概率的途径”。《保

险:数学与经济》又于 1991 年对该书的英文版发表了书评,其中指出,自该书德文版发表后的“不多几年中,新的概率途径已在国际精算界获得了普遍的认可”。这表明《人寿保险数学》一书已彻底更新了精算数学的基础,是精算数学领域中一本有里程碑意义的教材。我们相信,《人寿保险数学》中文版的出版,将有助于国内读者在较高的起点上迅速掌握这门学科的精髓。

《人寿保险数学》一书最初是在 1986 年由斯普林格出版社与瑞士精算协会共同以德文出版的,由于出版后在国际精算界引起很大的反响,继而于 1990 年发行了英文版。我们基本上是根据英文版译出的,个别处也参考了德文版。在翻译过程中,盖伯教授详尽地回答了我们遇到的若干难点问题,在此我们深表感谢。

盖伯教授还主动为我们联系版权事宜,并为中文版的出版争取了赞助。可以这样说,如果没有盖伯教授自始至终给予我们的热情帮助,《人寿保险数学》中文版的出版是绝无可能的。为此我们谨向他表示最诚挚的谢意。

本书的第一、三、五、七、九与十一章由成世学翻译;第二、四、六、八、十章及两个附录由严颖翻译,程侃校阅了全部译稿。

本书的出版得到了瑞士再保险公司的赞助,也承蒙斯普林格出版社与瑞士精算协会为中文版的出版提供了最大的方便,在此我们一并向他们表示热忱的谢意。

最后,我们要感谢世界图书出版公司北京公司为《人寿保险数学》中文版的出版所做出的努力,特别是王炜同志做了大量工作,我们由衷地感激她的热情相助。

译　　者

1995 年 10 月

序

在过去的几个月中，许多报刊以显著的版面报道了哈雷(Halley)彗星[①]。76 年以来它首次闪现在今冬的夜空中，清晰可辨，这是一个合适的场合指出这样一个事实，Edmund Halley 先生还在 1693 年构造了世界上第一张生命表，从而奠定了人寿保险的基础。哈雷的生命表以及它的后续研究成果被视为是一种确定性规律，即任何一组指定的人群在预定年度中的死亡数被认为是一个充分确定的数目，它可借助生命表计算出来。不过，在现实中这一数据却是随机的。于是人寿保险的任一数学处理均必将越来越多地用到概率论。

瑞士精算协会希望通过提倡这本专著，以表达对于人寿偶然性这一"现代"概率观点的支持。我们感到很幸运，盖伯(Gerber)教授作为一位有国际声誉的专家接受了撰写此专著的任务。我们感谢斯普林格出版社(Springer－Verlag)，并希望这一专著将是成功的精算系列教材中的第一本。

瑞士精算协会主席

汉斯・贝赫尔曼

(Hans Bühlmann)

1986 年 3 月于苏黎世

---

① 哈雷彗星是以发现它的天文学家艾德蒙德・哈雷(Edmund Halley)而得名的.——译者注

前　言

两个重要的进展影响了精算数学的环境:其一是高效与价格适宜的计算机的问世,这使得一度曾是重要的计算问题在许多场合都几乎变得微不足道了;其二是这样一种事实,在直观的意义下,当今一代人已十分熟悉概率论,许多中学已向学生传授了概率论的基本知识。在讲授与学习精算数学时,必须考虑到这二种因素。譬如,由于前一种因素的影响,现已认为(关于解的)递推算法和借助转换函数表述的解是等效的,因此在许多精形下,计算是容易的。于是,"为何"要进行某项计算的问题就显得比"如何"实施这项计算的问题更为重要。另外,由于后一种因素的影响,可以舍弃多少有点令人困窘的确定性模型;眼下已听不到反对使用随机模型的言论。事实上,随机模型能更贴切地反映保险的机制。于是,讨论不必局限在期望值的范围内,而可延伸至讨论偏离期望值的程度,这就在适当的意义下量化了风险。

本书即是遵循这种观点写成的。它是为这样的年轻读者(应在操作时间①的意义下理解"年轻"的含意)准备的,他们喜欢应用数学,并渴望对人寿保险数学的基本概念有所了解。

第一章概要地介绍了复利理论。第二至第六章讨论了基本模

---

① 操作时间的英文原词为 operational time,作者在与译者的私人通信中解释道,"operational time"是风险论中的术语。"在操作时间的意义下是年轻的"实指"在观念上是年轻的"。因此,本书是为所有年龄段的读者而写的,只要他"在观念上是年轻的",亦即"是具有开放意识的"。——译者注

型[①]中各种类型的保险及其机制。这里，关键的量，以 T 记之，是年龄为 x 的生命的剩余寿命，它(自然)是一随机变量！第七章将基本模型推广到多重衰减模型，此时引入了导致状态发生变化的不同原因(如死亡与致残)。在第八章中考虑了这样的保单，这时权益将取决于多个生命(譬如，寡妇与孤儿的抚恤金)。在前面提及的各章中，讨论均是针对一张孤立的保单而言的，这种处理方式在随机模型中是允许的。在确定性模型中却行不通，这是因为在确定性模型中，每一张保单皆须视为是一大群相同保单中的一员。在第九章中讨论了由一组保单(称为保单组合)引出的风险。那里给出了索赔总额分布的递推算法。当购买再保险时，有关这一分布的信息是绝对必需的。第十章讨论的主题在保险实务中极为重要；为了表述简单起见，本书仅在这一章内讨论了费用负荷。第十一章考虑了某些统计问题，譬如，如何由观测数据估计出 T 的分布。本书的写作贯穿了概率的观点，不带很多折衷的痕迹；不过，附录体现了作者企求照顾两种观点的意图[②]。鉴于十分类似的理由，至少从现在起就应该立刻提及基本的概率空间(Ω,F,P)！

本书能够出版是由于得到了瑞士精算协会关于精算数学的鼓励基金的支持；我衷心地感谢该委员会的成员，这绝不仅是因为他们在该书出版经费上支持了我，我从中获益远非仅限于此。

我要特别感谢 Bühlmann 教授与 Leepin 教授，他们对本书原稿提出极有价值的意见与建议。自然，本书中尚存在的瑕疵应由我个人负责。

美国精算协会委托 Bowers、Hickman、Jones、Nesbitt 教授和我组成一个写作班子，在这几年内合写一本详尽的教材，估计于

---

① 基本模型指的是，仅考虑单一的投保人，而且假定，引起投保人初始状态发生变化的偶然因素也是单一的。——译者注

② 附录 A 以确定性模型的观点简要地介绍了人寿保险数学的主要概念。——译者注

1987 年定稿出版。对于我来说，与上述四位教授的合作是一段极为珍贵的经历。

最后，我要感谢我的助教 M. Lienhard，他详细地审阅了校样。同时我也对斯普林格出版社给予的良好的合作表示诚挚的谢意。

汉斯 U. 盖伯

1986 年 3 月于洛桑

致　　谢

我衷心地感谢我的同事 Walther Neuhaus 博士(Oslo 大学)，他将本书译成英文，而且以十分干练与有效的方法完成了这一任务。我也衷心地感谢 Hendrik Boom 教授(Manitoba 大学)在出版本书英文版过程中所给予的指教。

汉斯 U. 盖伯

1990 年 4 月于洛桑和温尼伯

目　录

第一章　复利数学

1.1　人寿偶然性的数学基础

作为人寿保险数学的基础，主要有两个数学领域：复利理论与概率论. 本章介绍复利理论. 概率模型将在下一章予以介绍，但假定读者已熟悉概率论中的基本概念.

1.2　实际利率

谈及利率总要同时提到一个基本的时间单位；譬如，某人也许会谈起 6%的年率. 此外，还需提及复利计算期；它是这样一种时间间隔，在它的终止时刻，利息被记入或被“复合”. 若复利计算期与基本的时间单位一致，则称此利率为实际利率；在这种情形，利息在基本时间单位的终止时刻被记入.

记 i 是实际的年利率；为简单起见，我们假定 i 对于所有年份来说均是相同的. 我们考虑一个帐户(或一种基金). 假定对其投资的初始本金为 F_0. 又假设，在第 k 年结束时，$k=1,\cdots,n$，附加的投资额为 r_k. 试问第 n 年结束时的结余有多少？令 F_k 是第 k 年结束时的结余，其中包括 r_k 的款额. 因记入前一年结余中的利息为 iF_{k-1}，故有

$$F_k = F_{k-1} + iF_{k-1} + r_k, \quad k = 1,\cdots,n. \qquad (1.2.1)$$

我们可以把这一递推公式改写为

$$F_k - (1+i)F_{k-1} = r_k; \qquad (1.2.2)$$

若以 $(1+i)^{n-k}$ 乘此方程的两端，再对 k 的所有值求和，则除两项

外，左端其余所有的项均相消，由此即得

$$F_n = (1+i)^n F_0 + \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{n-k} r_k. \qquad (1.2.3)$$

$(1+i)$的乘幂称为*累积系数*. 初始本金 C 在 h 年后的*累积值*为 $(1+i)^h C$. 方程(1.2.3)阐明了一个显然的结论：时间间隔结束时的资金等于初始本金的累积值再加上中间诸存入款项的累积值的总和.

*折现系数*定义为

$$v = \frac{1}{1+i}. \qquad (1.2.4)$$

现可将方程(1.2.3)改写成

$$v^n F_n = F_0 + \sum_{k=1}^{n} v^k r_k. \qquad (1.2.5)$$

由此可见，在时间 h 应付的一笔资金的*现值*为 $v^h C$.

如我们把方程(1.2.1)写成

$$F_k - F_{k-1} = iF_{k-1} + r_k \qquad (1.2.6)$$

再对 k 求和，则得

$$F_n - F_0 = \sum_{k=1}^{n} iF_{k-1} + \sum_{k=1}^{n} r_k. \qquad (1.2.7)$$

这表明，基金的增额等于所记入的全部利息与全部存入款项的和.

1.3 名义利率

当复利计算期与基本的时间单位不一致时，便称利率为*名义*的. 以 3 个月为复利计算期的 6%的年利率意味着 6%/4=1.5%的利息在每一季度末被记入. 这样，初始本金 1 在年末会增至 $(1.015)^4 = 1.06136$. 所以，可逐季记息的 6%的名义年利率等价于6.136%的实际年利率.

现设 i 是给定的实际年利率. 我们以 $i^{(m)}$ 表示每年可记息 m 次,且与 i 等价的名义利率. 列出关于一年的累积系数的等式即得

$$(1+\frac{i^{(m)}}{m})^m = 1+i, \tag{1.3.1}$$

由此导出

$$i^{(m)} = m[(1+i)^{1/m} - 1]. \tag{1.3.2}$$

$m \to \infty$ 的极限情形对应于连续地复合. 令

$$\delta = \lim_{m\to\infty} i^{(m)}; \tag{1.3.3}$$

此值称为与 i 等价的利息力度. 将(1.3.2)式写成

$$i^{(m)} = \frac{(1+i)^{1/m} - (1+i)^0}{1/m}, \tag{1.3.4}$$

我们即知 δ 是函数 $(1+i)^x$ 在 $x=0$ 处的导数. 由此可得

$$\delta = \ln(1+i) \tag{1.3.5}$$

或

$$e^\delta = 1+i. \tag{1.3.6}$$

若在(1.3.1)式中令 $m\to\infty$,并利用定义(1.3.3),也可验证这一结论.

这样,持续期为 h 年的累积系数为 $(1+i)^h = e^{\delta h}$;而具有相同持续期的折现系数则为 $v^h = e^{-\delta h}$. 这里持续期的长度 h 可以为任一实数.

直观上不难理解 $i^{(m)}$ 是 m 的递减函数. 严格地说,由(1.3.4)式可视 $i^{(m)}$ 为一条割线的斜率,再利用函数 $(1+i)^x$ 的凸性,即可给出这一事实的正式证明. 以下是关于 $i=6\%$ 的数值说明.

m	$i^{(m)}$
1	0.06000
2	0.05913
3	0.05884
4	0.05870
6	0.05855
12	0.05841
∞	0.05827