中学数学实用手册

（初中版）

奚定华 主编

复旦大学出版社

中学数学实用手册

（初中版）

主　编　奚定华
副主编　叶锦义　孙兆桂
编写者　叶锦义　孙兆桂　许尉勤
　　　　张文瑾　奚定华　奚高峰
　　　　潘玲玲

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

中学数学实用手册.初中版/奚定华主编.—上海:复旦大学出版社,2001.9
ISBN 7-309-02970-4

Ⅰ.中... Ⅱ.奚... Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第060019号

出版发行	复旦大学出版社 上海市国权路579号 200433 86-21-65102941(发行部) 86-21-65642892(编辑部) fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
经销	新华书店上海发行所
印刷	上海锦佳装璜印刷发展公司
开本	787×1092 1/32
印张	9.375
字数	221千
版次	2001年9月第一版 2001年9月第一次印刷
印数	1-6000
定价	15.00元

前　　言

为了帮助初中学生能更好地掌握数学的基础知识和基本技能，提高运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力和分析问题、解决问题的能力，我们编写了这一本手册。

本手册具有以下几个特点：

(1) 实用性。实用性是本书的主要特点，它既可以在学习新知识时作为辅导读物，又能在复习旧知识时作为参考读物。不仅能帮助读者理解数学概念，掌握定理、公式和法则，而且还能使读者逐步掌握解数学问题的规律和方法。

(2) 选择性。本书面向全体学生，可供各种不同层次的学生选择使用。书中既注重基础知识和基本技能，使基础较差的学生通过学习能掌握基本的内容，达到基本的要求；又注意选取综合的、提高的、灵活性较强的内容，使基础较好的学生通过学习能进一步提高数学的水平。

(3) 简便性。本书精选初中数学重点的内容和典型的例题，内容精要，篇幅简短，便于查阅，携带方便。

为了体现上述几个特点，书中设置了以下几个栏目。

知识提要：将每一单元的数学概念、定理、公式和法则进行系统的整理，列出要点。

概念辨析：将每一单元的重要概念结合例题进行辨析，指出容易混淆的地方，使读者对有关概念有清晰的认识。

解题指导：对初中数学的各种基本问题适当加以归类，选择典型例题进行分析，总结解题规律，指出解题时应该注意的问题和容易产生错误的地方，使学生阅读本书后能掌握各种基本类型问题的解法；并适当选择一些综合问题，分析解题思路，提高学生综合运用数学知识解决问题的能力。

本书第一、二、四章由孙兆桂老师编写，第八、九、十、十一章由叶锦义老师编写，第三、五章由奚高峰、张文瑾老师编写，第七章由许尉勤、潘玲玲老师编写，最后全书由奚定华老师修改和统稿。

由于时间仓促，书中的错误和不足之处在所难免，欢迎读者批评指正。

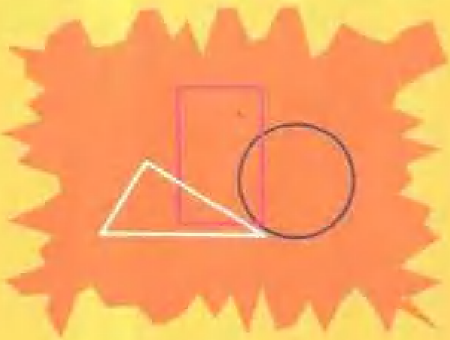
编　者

2001 年 6 月

责任编辑 范仁梅

策划编辑 顾 潜

封面设计 张霄磊



ISBN 7-309-02970-4

9 787309 029703 >

O·249 定价:15.00元

目　　录

第一章　数　与　式

一、实　　数

知识提要

1. 实数的概念

(1) 实数：有理数和无理数统称为实数.

(2) 有理数：整数和分数统称为有理数.

(3) 无理数：无限不循环小数叫做无理数.

(4) 实数的分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left.\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\ \text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

(5) 数轴：规定了原点、正方向和长度单位的直线叫数轴.

(6) 相反数：像 a 和 $-a$ 只有符号不同的两个数，就说其中一个数是另一个数的相反数．规定零的相反数是零.

(7) 绝对值：规定一个正数的绝对值是它本身，一个负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零．数 a 的绝对值，用符号 $|a|$ 表示，即有

$$|a|=\begin{cases}a & (\text{当 } a>0),\\ 0 & (\text{当 } a=0),\\ -a & (\text{当 } a<0).\end{cases}$$

数的绝对值也可理解为数轴上表示这个数的点到原点的距离．这就是数的绝对值的几何意义．

(8) 倒数：1除以一个不等于零的数的商，叫做这个数的倒数(零没有倒数)．即 a 的倒数是 $\frac{1}{a}(a\neq0)$．

(9) 方根：

① 平方根：如果一个数的平方等于 a，那么这个数叫做 a 的平方根(也可叫二次方根)．正数有两个互为相反数的平方根，零的平方根是零，负数没有平方根．

② 立方根：如果一个数的立方等于 a，那么这个数叫做 a 的立方根(或三次方根)．

③ n 次方根：如果一个数的 n 次方是 a，那么这个数是 a 的 n 次方根．

(10) 实数大小的比较：正数都大于零，也大于一切负数；负数都小于零，也小于一切正数；两个正数，绝对值较大的那个数较大；两个负数，绝对值较大的那个数反而较小．

2. 实数的运算

在实数集内可进行加、减、乘、除、乘方、开方六种基本运算，除开方运算外，其他五种运算的运算法则与有理数的运算法则相同．

(1) 运算法则：

① 加法：同号两数相加，取相同的符号，并把绝对值相加；异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并用较大的数的绝对值减去较小的数的绝对值．互为相反数的两数相加得零；一个数同零相加，仍得这个数．

② 乘法：两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘；任何数同零相乘，都得零．

减法与除法可分别转化为加法与乘法，即减去一个数，等于加上这个数的相反数；除以一个数，等于乘上这个数的倒数．除数不能为零．

乘方：正数的任何次幂都是正数，负数的奇次幂是负数，负数的偶次幂是正数.

开方：负数不能开偶次方.

(2) 运算律：

交换律：$a+b=b+a$，$ab=ba$.

结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$，

$(ab)c=a(bc)$.

分配律：$a(b+c)=ab+ac$.

(3) 运算顺序：

① 有括号的按照先括号内，后括号外；先小括号，再中括号，后大括号的顺序进行运算.

② 无括号或在括号内，先算乘方、开方(第三级运算)，再算乘、除(第二级运算)、最后算加、减(第一级运算).

③ 在同一级运算中，按照从左到右的次序进行运算.

(4) 近似数和有效数字：

① 近似数和准确数：表示量的准确值的数叫准确数.表示量的近似值的数叫近似数.

② 近似数的取法：根据所要求的精确度，用四舍五入法，四舍五入到哪一位，就说这个近似数精确到哪一位.

③ 近似数的有效数字：从左边第一个不是零的数字起，到右边最后一位四舍五入所得到的数字为止，一共有几个数字，就说这个近似数有几个有效数字.

(5) 科学记数法：把一个数写成 $a\times10^{n}$ 的形式，其中 $1\leqslant a<10$，n 为整数，这种记数法，叫做科学记数法.

概念辨析

例 1 给出以下各数：-4，0.3，0，$-\frac{1}{7}$，11，$\sqrt{2}$，

$-\sqrt{\frac{1}{2}}$, $3\frac{3}{4}$, 0.999…, $-\pi$, 0.142 857 和 -10%. 试指出它们分别属于哪个数集:

(1) 属于正数集合的有____________________;

(2) 属于负数集合的有____________________;

(3) 属于整数集合的有____________________;

(4) 属于分数集合的有____________________;

(5) 属于有理数集合的有____________________;

(6) 属于无理数集合的有____________________.

分析 要正确掌握实数的分类.

解 (1) 0.3, 11, $\sqrt{2}$, $3\frac{3}{4}$, 0.999…, 0.142 857.

(2) -4, $-\frac{1}{7}$, $-\sqrt{\frac{1}{2}}$, $-\pi$, -10%.

(3) -4, 0, 11.

(4) 0.3, $-\frac{1}{7}$, $3\frac{3}{4}$, 0.999…, 0.142 857, -10%.

(5) -4, 0.3, 0, $-\frac{1}{7}$, 11, $3\frac{3}{4}$, 0.999…, 0.142 857, -10%.

(6) $\sqrt{2}$, $-\sqrt{\frac{1}{2}}$, $-\pi$.

说明 ① 实数有两种分类法:按有理数、无理数来分或按正、负数来分.

② 0 属于整数,但不是正数,也不是负数.

③ 有限小数与无限循环小数都属于分数,它们也都是有理数,如 0.142 857 和 0.999…, $-\pi$ 是 π 的相反数,它是无理数.

例 2 已知 a, b 互为相反数, c、d 互为倒数, m 的绝对值等于 5,求代数式 $(a+b)^2-cd+m^2$ 的值.

解 $\because a$, b 互为相反数, $\therefore a=-b$, 即 $a+b=0$. $\because c$ 与 d 互为倒数, $\therefore c=\frac{1}{d}$, 即 $cd=1$. $\because |m|=5$,

$\therefore m^2 = |m|^2 = 25.$

$\therefore (a+b)^2 - cd + m^2 = 0 - 1 + 25 = 24.$

说明　互为相反数的两数之和为零、互为倒数的两数之积为1,这是由它们的定义而得到的. 另外,在实数范围内$|m|^2 = m^2$,这也是一个重要的性质.

例 3　(1) 绝对值不超过5的整数有多少个?

(2) 绝对值小于$\sqrt{60}$的自然数有多少个?

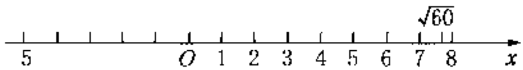


图 1-1

解　(1) 在数轴上可以找到绝对值等于5的数有5和-5两个(见图1-1). 在-5与5两点间的整数点有-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4共9个. $\therefore$绝对值不超过5的整数有11个.

(2) $\because 49 < 60 < 64$, $\therefore \sqrt{49} < \sqrt{60} < \sqrt{64}$. 即$7 < \sqrt{60} < 8$. 由数轴可知(见图1-1),绝对值小于$\sqrt{60}$的自然数有1, 2, 3, 4, 5, 6, 7共7个.

说明　① 先要分清"小于"与"不超过"的含义,"不超过"是指"小于或等于",其次区分"自然数"与"整数"这两个不同的概念,"自然数"就是正整数,而"整数"包括正整数、零和负整数.

② 用数轴来判断实数的大小是一个很直观的方法. 即在数轴上左边的点表示的实数比右边的点表示的实数为小. 但绝对值的大小比较与实数不同,即越靠近原点的点表示的数的绝对值越小. 故第(1)题要先找出-5和5两个点;而第(2)题要先确定表示$\sqrt{60}$的点的位置. 再找原点与点$\sqrt{60}$之间的正整数点.

例 4　如图1-2所示,数轴上A、B、C、D四点分别对应实数a、c、b、d,试化简$|a+b| + |c-a| - |b-c|$

$+|d|$,若已知原点 O 在 C 和 D 点之间,判断其值的符号.

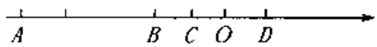


图 1-2

分析　根据"数轴上右边的点表示的实数比在左边的点表示的实数大"和绝对值的定义化简上式.

解　$\because$ 原点 O 在点 C 和点 D 之间,$\therefore a<b<c<0$, $d>0$. $\therefore$ 原式 $=-(a+b)+(c-a)-[-(b-c)]+d$ $=-2a+d$. $\because a<0$, $d>0$. 且 $|a|>|d|$, $\therefore -2a+d>0$. 即原式的值为正.

说明　把实数用数轴上的点表示后,根据点在原点的左或右,可确定该数是负还是正,还可根据点在数轴上的位置来确定两数的大小. 在绝对值符号内的数的正负被确定后,就可按定义把绝对值号化去.

例 5　珠穆朗玛峰海拔 8 848 米,地球赤道半径是 6.40×10^3 千米. 这些都是由四舍五入得到的近似数. 试写出它们表示的准确值的范围.

解　设 8 848 米的准确值是 a,则 $8\,847.5\leqslant a<8\,848.4$.

设 6.40×10^3 千米的准确值是 b, $\because$ 它有三个有效数字 6,4,0, $\therefore 6.395\times10^3\leqslant b<6.404\times10^3$.

$\therefore$ 珠穆朗玛峰的海拔高度大于或等于 8 847.5 米,小于 8 848.4 米;地球赤道半径长度大于或等于6 395 千米,小于 6 404 千米.

说明　① 近似数的有效数字是由四舍五入得到的,因此它代表的准确值与它的差不超过最后一个有效数字所在数位的半个单位.

② 科学记数法能清楚地表示该近似数有效数字的个数. 如近似数 6.40×10^3 千米和 6.4×10^3 千米的

值一样大．但前者有三个有效数字6,4,0,表示精确到十位,后者只有两个有效数字6,4,表示精确到百位,它所代表的准确值 b' 应满足 $6.35\times10^3\leqslant b'<6.44\times10^3$．显然前者的精确度要比后者高．因此近似数6.40的最后一个数位上的"0"是不能随意舍掉的．

解题指导

1．实数大小的比较

例6 比较下列各组数的大小：

(1) $\frac{5}{6}$，$\frac{8}{9}$，$\frac{11}{12}$；　(2) $-\frac{32}{29}$，$-\frac{12}{11}$，$-\frac{96}{89}$，$-\frac{16}{15}$；

(3) $2\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[3]{-30}$，3；　(4) $-\sqrt{0.2025}$和$-\frac{3}{7}$．

解　(1) $\frac{5}{6}=\frac{30}{36}$，$\frac{8}{9}=\frac{32}{36}$，$\frac{11}{12}=\frac{33}{36}$，

$\because \frac{30}{36}<\frac{32}{36}<\frac{33}{36}$，$\therefore \frac{5}{6}<\frac{8}{9}<\frac{11}{12}$．

(2) $\because -\frac{32}{29}=-\frac{96}{87}$，$-\frac{12}{11}=-\frac{96}{88}$，$-\frac{16}{15}=-\frac{96}{90}$．

$\frac{96}{87}>\frac{96}{88}>\frac{96}{89}>\frac{96}{90}$，$\therefore -\frac{96}{87}<-\frac{96}{88}<-\frac{96}{89}<-\frac{96}{90}$，即 $-\frac{32}{29}<-\frac{12}{11}<-\frac{96}{89}<-\frac{16}{15}$．

(3) $\because (2\sqrt[3]{3})^3=8\times3=24$，$3^3=27$，且 $27>24$，

$\therefore 3>2\sqrt[3]{3}>0$．又 $\sqrt[3]{-30}<0$，

$\therefore 3>2\sqrt[3]{3}>\sqrt[3]{-30}$．

(4) $\because \sqrt{0.2025}=0.45$，$\frac{3}{7}=0.\dot{4}2857\dot{1}$，

$\therefore -\sqrt{0.2025}<-\frac{3}{7}$．

说明　两个正分数比较大小,若分母相同,则分子值较大的分数值较大,如第(1)小题;若分子相同,则分母值较小的分数值较大,如第(2)小题．两个正的二(或三)次方根比较大小,可通过比较它们的二(或三)次幂

的大小来决定.如第(3)小题.当然,如果手边有计算器,也可直接求出各数的值(用小数表示),从而判断大小,如第(4)小题.

2. 实数绝对值的化简

例7 化简下列各式:(1) $|2a-1|$; (2) $|x+1|+\sqrt{(1-x)^2}$ $(-1<x<1)$.

解 (1) 当 $a<\dfrac{1}{2}$ 时, $|2a-1|=-2a+1$;

当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时, $|2a-1|=0$;

当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时, $|2a-1|=2a-1$.

(2) $\because \sqrt{(1-x)^2}=|x-1|$,

$\therefore$ 原式 $=|x+1|+|x-1|$.

$\because -1<x<1$, $\therefore x+1>0$, $x-1<0$.

$\therefore$ 原式 $=x+1-(x-1)=2$.

说明 ① 化简含绝对值符号的式子,应先确定绝对值符号内式子的值的正负,再根据绝对值的意义化去绝对值符号.当绝对值符号内式子的值的正负不能确定时,要进行分类讨论.如 $|2a-1|$,要分 $2a-1<0$, $2a-1=0$, $2a-1>0$ 三种情况进行讨论.当绝对值符号内式子的值的正负能确定时,可直接化简绝对值.如当 $-1<x<1$ 时, $x+1>0$, $x-1<0$,于是即可得到 $|x+1|=x+1$, $|x-1|=-(x-1)$.

② 由于 $\sqrt{a^2}=|a|$,因此 $\sqrt{(1-x)^2}=|1-x|=|x-1|$.

3. 实数的四则运算

例8 计算: $\left(1\dfrac{1}{4}+10\dfrac{1}{7}\right)+\left[-1\dfrac{1}{4}+\left(-5\dfrac{7}{12}\right)\right]-\left[5\dfrac{5}{12}-\left(-2\dfrac{5}{7}\right)\right]$.

解 原式 $=1\dfrac{1}{4}+10\dfrac{1}{7}-1\dfrac{1}{4}-5\dfrac{7}{12}-5\dfrac{5}{12}-2\dfrac{5}{7}$