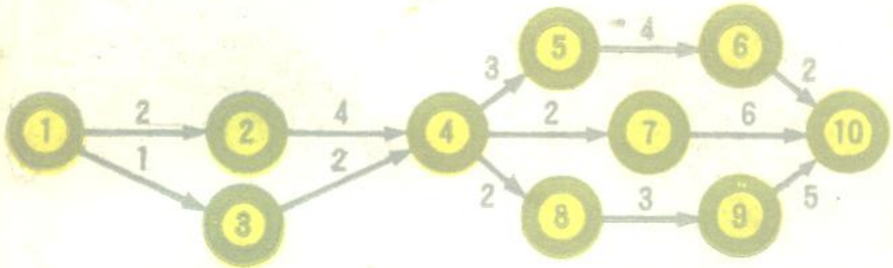

管理科学的最优化方法

马国瑜 编著

化学工业出版社

管理科学的最优化方法

马国瑜　编著

化学工业出版社

内 容 简 介

本书是一本学习管理科学的最优化方法的基础读物，内容包括线性规划、灵敏度分析、运输问题、整数规划、网络方法、动态规划、非线性规划、目标规划等。每种方法均从数学模型入手，由浅入深地介绍许多简易可行的方法，尤其着重通过实际应用问题，力求使读者尽快掌握方法的实质。书末附有计算机FORTRAN程序。

本书适宜作为高中和高中以上文化水平、各厂矿、企业的管理人员、一般技术人员和工程师学习管理科学的自修读物，也可作为企业管理专业及有关专业大学生和研究生的教学用书或参考书。

管理科学的最优化方法

马国瑜　编著

责任编辑：任文斗

封面设计：季玉芳

*

化学工业出版社出版发行

（北京和平里七区十六号楼）

化学工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所经销

*

开本850×1168 1/32 印张 18　字数 511 千字

1989年 5 月第 1 版　1989年 5 月北京第 1 次印刷

印数 1 —3，200

ISBN 7-5025-0385-4/TP·12

定价：8.90 元

前　　言

第二次大战以后，世界的经济有了迅速的发展。总结其发展的原因，除了政治和社会因素之外，主要就是现代的科学技术和现代管理方法，这两个决定性的推动力量。

最优化方法是现代管理方法的一个重要部分，它主要是对于工程技术和管理中的许多问题，运用数学方法，通过对数学模型的分析，在有限资源和条件下，科学地选定最优方案或满意的方案，谋求最好的经营决策，以达到最大的经济效益。不仅这些方案为管理部门领导人员对问题的决策提供科学依据，而且所用的方法的基本思路，对于解决或处理企业生产、经营管理的许多问题，都是有帮助的。

近三十年来，工业发达国家在现代管理中，应用最优化方法已经日益普遍，取得了许多成果。但国内这种书籍还不多见，有的著作用了许多抽象的概念和高深的数学，使广大读者望而却步，因此一些好的方法得不到应用和推广。本书就是针对这种情况，编写的一本现代管理科学最优化方法的基础读物。本书注重通过例子，介绍最需要懂得和便于应用的基本方法，使读者能在学习本书后使用这些方法，以提高企业的科学管理水平，掌握用现代科技手段，处理信息、寻求决策的能力。

本书具有以下特点：

1．采用多年的教学方法，以具体例子引出概念和方法，使读者能由浅入深地掌握内容的实质；

2．避开较深的数学理论，着重介绍最需要和简易可行的方法，每种方法都有简单的例子，以帮助读者掌握方法的要点，并用了很大篇幅讨论应用问题；

3．附有一些行之有效的计算机FORTRAN程序，使掌握基本原理又懂得使用计算机的读者，可以立即着手解决较大规模的问题。

本书有一些超过中学水平的小节，这些小节用“*”号标出，主要应用了矩阵理论和微积分的知识。略去这些小节，仍保持全书的完整性和系统性。

本书的初稿曾作为教材，多次在企业管理人员、工程师的进修班上讲授，取得了很好的效果，因此它特别适合一般工程技术人员学习的需要。

本书承北京化纤学院张立昂副教授审阅，杨丰梅同志也详细地校阅了书稿，对他们的宝贵意见，作者谨表示衷心的谢意。但限于水平，错误之处难免，敬希读者批评指正。

谨以本书献给有志于学习和使用现代管理方法的企业决策者和工程师们！

目　　录

第一章　数学模型和研究方法

第一节　几 个 实 例

例1　生产计划的制定

一个工厂要用两台机器（机器A与机器B）生产两种产品（产品1与产品2）。在一个确定的时间内，机器A可以提供24小时的工作时间，机器B可以提供16小时的工作时间。按照工艺要求，每生产1个单位的产品1，机器A与机器B分别要用2小时和3小时的工作时间，每生产1个单位的产品2，机器A与机器B分别要用2小时和1小时的工作时间。上面的已知条件，可以列成表1-1-1。

表 1-1-1

	每单位产品1要求的工作时间	每单位产品2要求的工作时间	机器可提供的工作时间
机器A	2	3	24
机器B	2	1	16

在两台机器提供的工作时间之内，如何制定生产计划呢？

1．约束条件和可行解

考虑到机器A的生产能力，可以任意安排产品1和产品2的生产数量，只要它们在机器A上所用的生产时间，不超过机器A所能提供的总时间。例如可以安排生产4个单位的产品1和5个单位的产品2，这时，生产4个单位的产品1，机器A要用去$2\times 4=8$小时，生产5个单位的产品2，机器A要用去$3\times 5=15$小时，机器A共用去$8+15=23$小时的工作时间，对机器A来说，没有超过它所提供的总时间，所以是可以安排的。如果安排生产5个单位的产品1和5个单位的产品2，那就要求机器A提供$2\times 5+3\times 5=25$小时的工作时间，根据已知条件，

这是办不到的，它超过了机器A所提供的总时间。

为了表示机器A生产能力的要求，可设x_1为产品1的生产数量，x_2为产品2的生产数量。那么，根据每单位产品1和每单位产品2要求机器A的工作时间，生产x_1个单位的产品1，机器A要用去$2x_1$小时，生产x_2个单位的产品2，机器A要用去$3x_2$小时，即机器A共用去$2x_1+3x_2$小时，因为机器A只能提供24小时的工作时间，所以安排生产计划时，产品1和产品2的生产数量x_1和x_2，就不能任意取值，而要满足条件

$$2x_1+3x_2\leqslant 24$$

同理，生产x_1个单位的产品1和x_2个单位的产品2，机器B共用去$2x_1+x_2$小时，因为机器B只能提供16小时的工作时间，所以产品1和产品2的生产数量，要满足条件

$$2x_1+x_2\leqslant 16$$

这两个不等式，都是在安排生产时，产品1和产品2的生产数量x_1及x_2，应同时满足的限制条件。此外，根据实际意义，x_1和x_2不能是负数，因此，x_1及x_2应满足的条件为

$$2x_1+3x_2\leqslant 24$$
$$2x_1+x_2\leqslant 16$$
$$x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0$$

通常，称这些条件为约束条件，前两个条件称为约束不等式，后两个称为变量非负的条件。

制定生产计划，就是要确定产品1和产品2的产量x_1及x_2，只有它们满足上述的约束条件，生产计划才是可行的。若x_1和x_2，满足约束条件，则称它们是约束条件的一个解。所以，制定生产计划，就是求约束条件的解，或者说，求满足约束不等式的非负解，这样的解，又称为可行解。这样一来，制定生产计划的问题，从数学上说，就是求约束条件的可行解。

对于上述约束条件，若$x_2=0$，则两个约束不等式成为

$$2x_1\leqslant 24 \quad 及 \quad 2x_1\leqslant 16$$

即

$$x_1 \leqslant 12 \quad 及 \quad x_1 \leqslant 8$$

这意味着，若不生产产品 2(即 $x_2 = 0$)，由机器A的生产能力，产品 1最多可以生产12个单位，由机器B的生产能力，产品1最多可以生产8个单位。将两个要求同时考虑，产品1的生产量应不多于8个单位。所以，任意的 x_1、x_2，只要满足

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 8, \quad x_2 = 0$$

就是约束条件的可行解。特别地，若取 $x_1 = 8$，则得一个可行解

$$x_1 = 8, \quad x_2 = 0$$

它表示了产品1生产8个单位，产品2不生产这样一个生产计划。这时，机器A共用去16小时，还剩余 $24 - 16 = 8$ 小时的工作时间，或者说，机器A还有8小时的松驰时间，而机器B的工作时间全部被利用了，不再有剩余时间。

若设 $x_1 = 0$，同理可以得到可行解

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 8$$

它表示了产品1不生产，产品2生产8个单位的生产计划。这时，机器A的工作时间全部被利用了，而机器B还剩余 $16 - 1 \times 8 = 8$ 小时的工作时间，即机器B还有8小时的松驰时间。

若将两个约束不等式写成等式的形式

$$2x_1 + 3x_2 = 24$$
$$2x_1 + x_2 = 16$$

求解可得

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 4$$

又得到了一个可行解。(注意：在一般情况下，这样得到的解，不一定满足变量非负的条件，所以不一定是可行解)。这时的生产计划，机器A和机器B的全部工作时间都被利用了，都没有松驰时间。

从上面的讨论可以看出，上述约束条件的可行解有无穷多个。例如：

(1) $x_1 = 0$，$x_2 = 0$

(2) $x_1 = 1$，$x_2 = 1$

(3) $x_1 = 0.5$，$x_2 = 0.7$

(4) $x_1=2.333$ ， $x_2=1.787$
都满足约束条件，所以都是可行解。

2．目标函数和最优解

在制定生产计划时，如何在众多的生产方案（即可行解）之间进行选择呢？也就是说，如何比较这些可行解的优劣呢？这就要看工厂在制定生产计划时，是以什么为目标的。例如，已知单位产品1的售价为5元，单位产品2的售价为7元，工厂的目标是获得最大的收入。那么就可以以总收入的大小作为判别各个可行解优劣的标准。表1-1-2给出了四种生产安排。

表 1-1-2

可行解	$x_1=0$ $x_2=0$	$x_1=8$ $x_2=0$	$x_1=0$ $x_2=8$	$x_1=6$ $x_2=4$
收　入	$5\times0=0$ $7\times0=0$	$5\times8=40$ $7\times0=0$	$5\times0=0$ $7\times8=56$	$5\times6=30$ $7\times4=28$
总收入（元）	0	40	56	58

上述四个可行解中，最后一个可行解是最好的，按照这种生产安排，工厂可以得到58元的收入。

一般地说，由于x_1及x_2表示产品1及产品2的产量，所以总收入可表示为

$$p=5x_1+7x_2$$

要使总收入最大，就是使p取最大值，函数p称为生产计划制定问题的目标函数。使目标函数P取最大值可记为

$$\max p=5x_1+7x_2$$

因此，制定生产计划的问题，就是安排一个最优的生产方案，确定产品1和产品2的产量，使目标函数p取最大值。这样的生产方案，称为生产计划问题的最优解。利用下一章的方法可知，上述生产计划制定问题的最优解为

$$x_1=6,\quad x_2=4$$

即产品1生产6个单位，产品2生产4个单位，可使工厂得到最大的

收入58元。

3．数学模型

总结以上对制定生产计划问题的讨论，可以归结以下几点。

(1) 产品所要求的机器的生产时间和机器的生产能力之间的供求关系，可用不等式描述，即

$$2x_1+3x_2\leqslant 24$$
$$2x_1+x_2\leqslant 16$$

这组不等式称为约束条件。

(2) 上述约束条件有无穷多解，它的非负解表示一个可执行的生产方案，称为可行解。

(3) 根据产品的售价，可以确定总收入和产量之间的关系为

$$p=5x_1+7x_2$$

因为工厂制定生产计划的目标是使总收入最大，所以这个关系就是目标函数。

(4) 使目标函数取最大值的可行解称为最优解。它表示了最优的生产计划，也就是既满足机器生产能力的限制，又使总收入最大的生产计划。

上述寻求最优生产计划的问题，可用如下数学模型表示：

$$\max p=5x_1+7x_2$$

约束条件

$$2x_1+3x_2\leqslant 24$$
$$2x_1+x_2\leqslant 16$$
$$x_1,\ x_2\geqslant 0$$

制定生产计划，就是求上述问题的最优解。

例 2　购买原油问题

一个石油炼制厂购进两种原油：原油 A与原油 B。这两种原油每桶的单价分别为 110元及90元。该厂将原油炼制成汽油、煤油及特制汽油供应市场。每桶原油可炼制的产品数量如表1-1-3所示。由此可以看出，每炼一桶原油 A及原油 B，分别损失 5％及 8％。市场上对三种产品的需求量分别为500 000桶、400 000桶及350 000桶。该厂应该购进多少原油 A及原油 B，才能使购买原油的支出最少？