新標準

大学入学高中會考指導

遵照

部頒高中課程標準

各大學入學試題

各科問題精解

大中學升學會考指導社編輯

上海新中國出版社發行

新標準

大学入学高中會考指導

遵照

部頒高中課程標準

各大學入學試題

各科問題精解

大中學升學會考指導社編輯

上海新中國出版社發行

新標準大學入學高中會考指導

每冊定價國幣

主編人	浦漪人　吳　滄
編輯者	大中學升學會考指導社
編校者	趙　型　俞養和　施懿德　徐宗駿 賈冰如　沈永廉　江楝成　浦永昌 顧　琨　鮑文希　凌廷堡　陸仁壽 鄢鳳璋　承士林　江學珠　吳珠還 周　芬
發行人	祝　福　堂
發行者	新中國出版社 地址　上海中正北二路四一弄四四號
總經售處	上海新生書店 地址　上海中正北二路八七號

中華民國三十六年五月出版

新　　標　　準

大學入學高中會考指導

編　輯　大　意

一、本書以部頒高中課程標準爲經，以近年來全國各大學入學試題爲緯，編輯而成。

一、本書編輯時，復憑編者多年教學及指導升學會考之經驗，加以適宜之補充。

一、各科先列定理公式或指導要訣，次列問題及解答，閱覽極便，一目瞭然。

一、本書專供高中學生準備升學會考之用，務使讀者以極經濟之時間而得極完善之指導。

一、本書內容分三角，幾何，高等代數，解析幾何，物理，化學，生物，英文，國文，公民，本國歷史，外國歷史，本國地理，外國地理，等十四編，選題扼要，解答精詳，務使讀者有具體的了解，充分的準備。

一、本書各編，均從P1排起，以便逐年將重要新材料補入。

一、本書爲應讀者需要，匆促出版，忽略脫漏，在所難免，倘蒙海內明達，加以指正，尤所歡迎。

大學入學指導

總目錄

數　學

(I) 三　角　之　部

(1) 三角函數及基本關係式

$\sin A \csc A = 1,$ $\qquad$ $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A},$

$\cos A \sec A = 1,$ $\qquad$ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1,$

$\tan A \cot A = 1,$ $\qquad$ $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A,$

$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A},$ $\qquad$ $\csc^2 A = 1 + \cot^2 A,$

1. 試證 $(1-\sin^2 A)\tan^2 A = \sin^2 A.$

證：$\quad$ 左式$=\cos^2 A \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \sin^2 A.$

2. 試證 $\tan^2 A - \sin^2 A = \tan^2 A \sin^2 A.$

證：$\quad$ 左式$=\tan^2 A - \tan^2 A \cos^2 A = \tan^2 A(1-\cos^2 A) = \tan^2 A \sin^2 A.$

3. 試證 $\sec^2 A + \csc^2 A = \sec^2 A \csc^2 A$

證：$\quad$ 左式$=\dfrac{1}{\cos^2 A} + \dfrac{1}{\sin^2 A} = \dfrac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos^2 A \sin^2 A} = \dfrac{1}{\cos^2 A \sin^2 A}$

$= \sec^2 A \csc^2 A.$

4. 設：$\quad \sin\theta = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\qquad$ 求 $\cot\theta = ?$（東吳大學）

解：$\quad \because \sin\theta = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad \therefore \csc\theta = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2},$

$\therefore \cot\theta = \sqrt{\csc^2\theta - 1} = \sqrt{\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)^2 - 1} = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}.$

5. 試證 $\cos A(2\sec A + \tan A)(\sec A - 2\tan A) = 2\cos A - 3\tan A.$(中大)

證：$\quad$ 左式$=\cos A\left(\dfrac{2+\sin A}{\cos A}\right)\left(\dfrac{1-2\sin A}{\cos A}\right) = \dfrac{(2+\sin A)(1-2\sin A)}{\cos A},$

右式$=2\cos A - \dfrac{3\sin A}{\cos A} = \dfrac{2\cos^2 A - 3\sin A}{\cos A} = \dfrac{2-2\sin^2 A - 3\sin A}{\cos A}$

$= \dfrac{(2+\sin A)(1-2\sin A)}{\cos A},$

$\therefore \quad \cos A(2\sec A+\tan A)(\sec A-2\tan A)=2\cos A-3\tan A.$

6. 試證 $\sin^2\theta\tan\theta+\cos^2\theta\cot\theta+2\sin\theta\cos\theta=\tan\theta+\cot\theta.$

證: 左式$=\dfrac{\sin^3\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos^3\theta}{\sin\theta}+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sin^4\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^4\theta}{\cos\theta\sin\theta}$

$$=\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\tan\theta+\cot\theta.$$

7. 試證 $\dfrac{\sin^2 A}{\cot^2 A}-\dfrac{\cos^2 A}{1-\sec^2 A}=\dfrac{\tan^4 A-\tan^2 A+1}{\tan^2 A}.$

證: $\dfrac{\sin^2 A}{\cot^2 A}-\dfrac{\cos^2 A}{1-\sec^2 A}=\dfrac{\sin^2 A}{\cot^2 A}+\dfrac{\cot^2 A}{\sec^2 A-1}=\dfrac{\sin^2 A}{\dfrac{1}{\tan^2 A}}-\dfrac{\cos^2 A}{\tan^2 A}$

$$=\frac{\sin^2 A\tan^4 A+\cos^2 A}{\tan^2 A}=\frac{\dfrac{\tan^2 A}{1+\tan^2 A}+\dfrac{1}{1+\tan^2 A}}{\tan^2 A}=\frac{1+\tan^6 A}{(1+\tan^2 A)\tan^2 A}$$

$$=\frac{(1+\tan^2 A)(\tan^4 A-\tan^2 A+1)}{(1+\tan^2 A)\tan^2 A}=\frac{\tan^4 A-\tan^2 A+1}{\tan^2 A}.$$

(2) 四象限角之化法

(A) 三角函數之正負

函　　數	1st. Q.	2nd. Q.	3rd Q.	4th. Q.
sin　csc	+	+	−	−
cos　sec	+	−	−	+
tan　cot	+	−	+	−

(B) 餘角之三角函數

$\sin(90°-A)=\cos A,\ \cos(90°-A)=\sin A,\ \tan(90°-A)=\cot A,$

定理: 一銳角之函數,等于其餘角之餘函數。

(C) 第二象限角之化法

第 一 法	第 二 法
$\sin(180°-A)=\sin A$	$\sin(90°+B)=\cos B$
$\cos(180°-A)=-\cos A$	$\cos(90°+B)=-\sin B$
$\tan(180°-A)=-\tan A$	$\tan(90°+B)=-\cot B$

(D) 第三象限角之化法

第一法	第二法
$\sin(180°+A)=-\sin A$	$\sin(270°-B)=-\cos B$
$\cos(180°+A)=-\cos A$	$\cos(270°-B)=-\sin B$
$\tan(180°+A)=\tan A$	$\tan(270°-B)=\cot B$

(E) 第四象限角之化法

第一法	第二法
$\sin(360°-A)=-\sin A$	$\sin(270°+B)=-\cos A$
$\cos(360°-A)=\cos A$	$\cos(270°+B)=\sin A$
$\tan(360°-A)=-\tan A$	$\tan(270°+B)=-\cot A$

(F) 負角之化法

$\sin(-\mathrm{A})=-\sin A$, $\cos(-A)=\cos A$, $\tan(-A)=-\tan A$,
$\cot(-A)=-\cot A$, $\sec(-A)=\sec A$, $\csc(-A)=-\csc A$,

8. 寫出下列各式之值：(之江)

(a) $\sin\frac{5}{4}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$

(b) $\cos\frac{10}{3}\pi=\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}.$

(c) $\sin 7\frac{1}{2}\pi=\sin\left(7\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1.$

(d) $\sin\infty$,其值介於 1 與 -1 之間。

(e) $\sin^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$(詳反三角函數)

(f) $\sec^{-1}\frac{1}{2}=?$，不可能,因 sec 之值介於 1 與∞之間。

(g) $\cot^{-1}0=\frac{\pi}{2}.$

(h) $\sin^{-1}(-2)=?$，不可能,因 sin 之值介於 1 與 -1 之間。

9. 求下列各值：(之江)

(a) $\sin 150°=\sin(180°-30°)=\sin 30°=\frac{1}{2}$

(b) $\cos 900°=\cos 180°=-1$

(c) $\tan 600°=\tan 240°=\tan(180°+60°)=\tan 60°=\sqrt{3}$

(d) $\cot(-1200°)=-\cot 1200°=-\cot 120°=-\cot(180°-60°)$

$=\cot 60°=\frac{\sqrt{3}}{3}.$

(e) $\sec 300° = \sec(360° - 60°) = \sec 60° = 2.$

10. 寫出下列諸式之值：(東吳)(中大)

(a) $\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\tan 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\sec 180° = -1$,

$\csc 225° = -\csc 45° = -\sqrt{2}$,

$\cot 135° = -\tan 45° = -1.$

11. $\csc(-1465°) = -\csc(4 \times 360° + 25°) = -\csc 25°$, (東吳)

12. 求下列各三角函數之值：(北大)

(a) $\cos 315° = \cos(360° - 45°) = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

(b) $\tan 570° = \tan 210° = \tan(180° + 30°) = \tan 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

(c) $\cos\dfrac{23}{6}\pi = \cos\dfrac{11}{6}\pi = \cos\left(2\pi - \dfrac{}{6}\pi\right) = -\cos\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

13. 化簡 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right)\sin(\pi + \theta) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right)\cos(\pi - \theta)$,

解：原式 $= \cos\theta(-\sin\theta) - \sin\theta(-\cos\theta) = 0$,

14. 化簡 $\cos(90° + \theta)\cos(270° - \theta) - \sin(180° - \theta)\sin(360° - \theta)$。

解：原式 $= -\sin\theta(-\sin\theta) - \sin\theta(-\sin\theta) = 2\sin^2\theta.$

(3) 二角或三角之函數，倍角或半角之函數．

(A) 兩角和及差之三角函數：

$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$,

$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$,

$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$,

$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$,

$\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$, $\cot(A+B) = \dfrac{\cot A\cot B - 1}{\cot A + \cot B}$,

$\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$, $\cot(A-B) = \dfrac{\cot A\cot B + 1}{\cot B - \cot A}$,

(B) 兩角函數之和與差：

$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$,

$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\sin B$,

$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A\cos B$,

$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B,$

$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2},$

$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2},$

$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2},$

$\cos C-\cos D=-2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}.$

(C) 三角之三角函數:

$\sin(A+B+C)=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C$
$+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C,$

$\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C$
$-\sin A\cos B\sin C-\sin A\sin B\cos C,$

$\tan(A+B+C)=(\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C)$
$/(1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan A\tan C),$

(D) 倍角之三角函數:

$\sin 2A=2\sin A\cos A,$

$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=2\cos^2 A-1=1-2\sin^2 A,$

$\tan 2A=2\tan A/(1-\tan^2 A),$

$\cot 2A=(\cot^2 A-1)/2\cot A,$

$\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A,$

$\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A,$

$\tan 3A=(3\tan A-\tan^3 A)/(1-3\tan^2 A),$

$\cot 3A=(\cot^3 A-3\cot A)/(3\cot^2 A-1),$

(E) 半角之三角函數:

$\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},$ $\cos\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}},$

$\tan\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}},$ $\cot\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}.$

15. 應用公式 $\sin 15°=\sin\frac{30°}{2}$ 及 $\sin 15°=\sin(45°-30°)$ 均可求得 $\sin 15°$ 之值,形式雖異,實際相同,試藉代數化法,以驗斯言之不謬。(復旦)

解: $\sin 15^\circ=\sin\frac{30^\circ}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$

$=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{8}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1}{8}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,

$\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,

16. 設 $\cos A=\frac{3}{4}$，求 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{5A}{2}$之值。(浙大)

解: $\because\ \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$,

$\sin\frac{5A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 5A}{2}}=\sqrt{\frac{1-(16\cos^5 A-20\cos^3 A+5\cos A)}{2}}$

$=\sqrt{\frac{1-\frac{243}{64}+\frac{135}{16}-\frac{15}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{121}{128}}=\frac{11}{8\sqrt{2}}$

$\therefore\ \sin\frac{A}{2}\sin\frac{5A}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{11}{8\sqrt{2}}=\frac{11}{32}$.

17. 求證 $\frac{\sin 3A+\sin A}{\cos 3A+\cos A}=\tan 2A$. (交大)

證: 左式$=\frac{2\sin 2A\cos A}{2\cos 2A\cos A}=\frac{\sin 2A}{\cos 2A}=\tan 2A$.

18. 設: $A+B+C=180^\circ$,

求證 $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$. (暨大)

證: $\because\ A+B=180^\circ-C$, $\therefore\ \frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2}$,

$\therefore\ \cos\frac{A+B}{2}=\cos\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}$.

故左式$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}+1$

$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A+B}{2}+1$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

19. 求證 $\dfrac{1+2\sin x\cos x}{\cos^2x-\sin^2x}=\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$（上海商學院）

證：左式 $=\dfrac{\cos^2x+2\sin x\cos x+\sin^2x}{\cos^2x-\sin^2x}=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{\cos^2x-\sin^2x}$

$$=\frac{\left(\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos x}\right)^2}{\dfrac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x}}=\frac{(1+\tan x)^2}{1-\tan^2x}=\frac{(1+\tan x)^2}{(1+\tan x)(1-\tan x)}$$

$$=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}.$$

20. 設 $A+B+C=180°$,

求證 $\cos 4A+\cos 4B+\cos 4C=4\cos 2A\cos 2B\cos 2C-1$,

（上海醫學院）

證：$\because\ A+B=180°-C$,　　$\therefore\ 2(A+B)=360°-2C$,

$\therefore\ \cos 2(A+B)=\cos 2C$.

故左式 $=2\cos 2(A+B)\cos 2(A-B)+2\cos^2 2C-1$

$=2\cos 2C\cos 2(A-B)+2\cos 2C\cos 2(A+B)-1$

$=2\cos 2C\,[\cos 2(A-B)+\cos 2(A+B)]-1$

$=4\cos 2A\cos 2B\cos 2C-1$

21. 求證 $\dfrac{\sin 75°+\sin 15°}{\sin 75°-\sin 15°}=\tan 60°$（聖約翰）

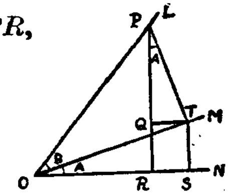
證：左式 $=\dfrac{2\sin 45°\cos 30°}{2\cos 45°\sin 30°}=\cot 30°=\tan 60°$.

22. 證明 $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$.（滬江）

證：設 $\angle LOM=B$, $\angle MON=A$,

作 $PT\perp OM$, PR 及 $TS\perp ON$, $TQ\perp PR$,

則 $\angle QPT=A$,



故：$\sin(A+B)=\sin POS=\dfrac{PR}{OP}$

$$=\frac{RQ+QP}{OP}=\frac{ST}{OP}+\frac{QP}{OP}$$

$$=\frac{ST}{TO}\cdot\frac{TO}{OP}+\frac{PQ}{PT}\cdot\frac{PT}{OP}=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

23. 求證 $\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A$,（東吳）

證: 左式$=\dfrac{2\sin A\cos A}{1+2\cos^2 A-1}=\dfrac{2\sin A\cos A}{2\cos^2 A}=\tan A.$

24. 求　$\sin 37.5^\circ\ \cos 7.5^\circ$ 之值.（東吳）

解: 原式$=\dfrac{1}{2}(2\sin 37.5^\circ\cos 7.5^\circ)=\dfrac{1}{2}(\sin 45^\circ+\sin 30^\circ)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}(\sqrt{2}+1).$

25. 求　$\cos 52.5^\circ\cos 7.5^\circ$ 之值.（東吳）

解: 原式$=\dfrac{1}{2}(2\cos 52.5^\circ\cos 7.5^\circ)=\dfrac{1}{2}(\cos 60^\circ+\cos 45^\circ)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{4}(\sqrt{2}+1)$

26. 設　$A+B+C=180^\circ$,

求證 $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$.（復旦）

證: $\because\ A+B=180^\circ-C,$

$\therefore\ \sin(A+B)=\sin(180^\circ-C)=\sin C,$

$\cos(A+B)=\cos(180^\circ-C)=-\cos C,$

故左式$=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$=2\sin C\cos(A-B)-2\sin C\cos(A+B)$

$=2\sin C\,[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$

$=4\sin A\sin B\sin C.$

27. 已知 $\cos A=\dfrac{3}{5}, \tan B=\dfrac{3}{4}$,

求　$\tan(A-B)$ 及 $\sin(A+B)$ 之值,（復旦）

解: $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}=\dfrac{\dfrac{4}{3}-\dfrac{3}{4}}{1+\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3}{4}}=\dfrac{7}{24}.$

$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=1.$

28. 已知 $\cos\phi-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$,　$\sin\phi-\sin\theta=-\dfrac{1}{3}$,

求　$\sin(\theta+\phi)$ 之值.（大同）

解: 求二式平方之和, 得

$$\sin^2\phi+\cos^2\phi+\sin^2\theta+\cos^2\theta-2(\cos\phi\cos\theta-\sin\phi\sin\theta)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}=\frac{13}{36},$$

卽 $2\cos(\theta-\phi)=2-\dfrac{13}{36}$, $\cos(\theta-\phi)=\dfrac{59}{72}$.

求二式之積，得

$$\sin\phi\cos\phi+\sin\theta\cos\theta-\sin\phi\cos\theta-\sin\theta\cos\phi=-\frac{1}{6}$$

卽 $\sin(\phi+\theta)\cos(\theta-\phi)-\sin(\phi+\theta)=-\dfrac{1}{6}$,

卽 $\sin(\phi+\theta)[1-\cos(\theta-\phi)]=\dfrac{1}{6}$,

將上式代入，$\sin(\phi+\theta)\left(1-\dfrac{59}{72}\right)=\dfrac{1}{6}$,

$$\therefore\quad \sin(\phi+\theta)=\frac{12}{13}.$$

29. 設 $\sin\dfrac{A}{2}=\sin\dfrac{B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3}$,

求 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos C & \cos B & 1 \\ \cos C & 1 & \cos A & 1 \\ \cos B & \cos A & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 之值（光華）

解: $\because\ \sin\dfrac{A}{2}=\sin\dfrac{B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3}$,

$\therefore\ A=B=C,\quad \cos A=\cos B=\cos C,$

$$故原式=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cos C-1 & \cos B-1 & 0 \\ \cos C & 1-\cos C & \cos A-\cos C & 1-\cos C \\ \cos B & \cos A-\cos B & 1-\cos B & 1-\cos B \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \cos C-1 & \cos B-1 & 0 \\ 1-\cos C & \cos A-\cos C & 1-\cos C \\ \cos A-\cos B & 1-\cos B & 1-\cos B \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \cos C-1 & \cos B-1 & 0 \\ 1-\cos C & 0 & 1-\cos C \\ 0 & 1-\cos B & 1-\cos B \end{vmatrix}$$

$$=(1-\cos B)(1-\cos C)\begin{vmatrix}\cos C-1 & \cos B-1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(1-\cos B)(1-\cos C)\begin{vmatrix}\cos C-1 & \cos B-1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(1-\cos B)(1-\cos C)\begin{vmatrix}\cos C-1 & \cos B-1\\ 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=(1-\cos B)(1-\cos C)(1-\cos C+1-\cos B)$$

$$=\left(2\sin^2\frac{B}{2}\right)\left(2\sin^2\frac{C}{2}\right)\left(2\sin^2\frac{C}{2}+2\sin^2\frac{B}{2}\right)$$

$$=16\sin^6\frac{B}{2}=\frac{16}{729}.$$

30. 求證 $1+\tan 2x\tan x=\sec 2x$.（大夏）

證： 左式$=1+\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{\cos 2x\cos x+\sin 2x\sin x}{\cos 2x\cos x}$

$$=\frac{\cos(2x-x)}{\cos 2x\cos x}=\frac{1}{\cos 2x}=\sec 2x.$$

31. 等腰△之底爲 20，其面積爲 $100\div\sqrt{3}$. 求其各角。（大夏）

解： 設底上之高爲 h，則 $\dfrac{1}{2}\times 20\,h=\dfrac{100}{\sqrt{3}}$， $\therefore\ h=\dfrac{10}{\sqrt{3}}$.

設底角爲 B，則 $\tan B=\dfrac{10}{\sqrt{3}}\div\dfrac{20}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

$\therefore\ B=30°$， 頂角 $A=180°-2B=120°$.

32. 求證 $\tan B\tan C+\tan C\tan A+\tan A\tan B=1$,

已知 $A+B+C=90°$，（清華）

證： 左式$=\tan[90°-(A+B)](\tan A+\tan B)+\tan A\tan B$

$$=\cot(A+B)(\tan A+\tan B)+\tan A\tan B$$

$$=\frac{(\cot A\cot B-1)(\tan A+\tan B)}{\cot A+\cot B}+\tan A\tan B$$

$$=\frac{\cot A+\cot B-\tan A-\tan B+\tan A+\tan B}{\cot A+\cot B}$$

$$=\frac{\cot A+\cot B}{\cot A+\cot B}=1,$$

33. 求證 $\dfrac{\sin 3A}{\sin A}-\dfrac{\cos 3A}{\cos A}=2$,（北平大）

證：　$$\text{左式}=\frac{\sin 3A\cos A-\cos 3A\sin A}{\sin A\cos A}=\frac{\sin(3A-A)}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{\sin 2A}{\sin A\cos A}=\frac{2\sin A\cos A}{\sin A\cos A}=2,$$

34. 試求 $\cos 20^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ$ 之值。(河南大)

解：　$\text{左式}=2\cos 60^\circ\cos 40^\circ+\cos 140^\circ$

$=\cos 40^\circ+\cos 140^\circ=2\cos 90^\circ\cos 50^\circ=0.$

35. 求證 $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$.(北平大)

證：　$\sin 3A=\sin(2A+A)=\sin 2A\cos A+\cos 2A\sin A$

$=2\sin A\cos^2 A+(1-2\sin^2 A)\sin A$

$=2\sin A(1-\sin^2 A)+\sin A-2\sin^3 A$

$=3\sin A-4\sin^3 A.$

36. 已知 $\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，求 $\cos 15^\circ$ 及 $\tan 15^\circ$ 之值。(浙大)

解：　$$\cos 15^\circ=\sqrt{1-\sin^2 15^\circ}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{12}+2}{4^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$$\tan 15^\circ=\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{8-4\sqrt{3}}{4}=2-\sqrt{3}.$$

37. 求證 $\sin^2(A+45^\circ)+\sin^2(A-45^\circ)=1$ (浙大)

證：　$\text{左式}=\sin^2(A+45^\circ)+\cos^2[90^\circ+(A-45^\circ)]$

$=\sin^2(A+45^\circ)+\cos^2(A+45^\circ)=1$

38. 設　A, B, C 為 $\triangle$之三角，

求證 $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$.(東吳)

證：　$$\text{左式}=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right]=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$\left[\because A+B=180^\circ-C,\quad \frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2},\right.$$

$$\left.\therefore \sin\frac{A+B}{2}=\sin\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C}{2},\right]$$

39. 求證 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2+2\cos A\cos B\cos C$. (齊魯)
(設 $A+B+C=180°$)

證: 左式$=1-\cos^2A+1-\cos^2B+1-\cos^2C$

$$=3-(\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C)$$

$$=3-\left[\frac{1}{2}(1+\cos 2A+1+\cos 2B+1+\cos 2C)\right]$$

$$=3-\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)\right]$$

$$=3-\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left\{2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2C-1\right\}\right]$$

$$=3-\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left\{-2\cos C\cos(A-B)-2\cos C\cos(A+B)-1\right\}\right]$$

$$=3-\left\{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[-2\cos C\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}-1\right]\right\}$$

$$=3-\left\{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[-4\cos A\cos B\cos C-1\right]\right\}$$

$$=3-\left[1-2\cos A\cos B\cos C\right]=2+2\cos A\cos B\cos C.$$

40. 求證 $\sin A+\sin B+\sin C-\sin(A+B+C)$

$$=4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{A+C}{2}$$

證: 左式$=(\sin A+\sin B)-\{\sin(A+B+C)-\sin C\}$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B+2C}{2}$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B+2C}{2}\right\}$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cdot 2\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{B+C}{2}$$

$$=4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{B+C}{2}$$

41. 求證 $\cos x+\cos y+\cos z+\cos(x+y+z)$

$$=4\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{y+z}{2}\cos\frac{x+z}{2}$$

證: 左式$=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+2\cos\frac{x+y+2z}{2}\cos\frac{x+y}{2}$

$$=2\cos\frac{x+y}{2}\left\{\cos\frac{x-y}{2}+\cos\frac{x+y+2z}{2}\right\}$$

$$=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot 2\cos\frac{x+z}{2}\cos\frac{y+z}{2}$$