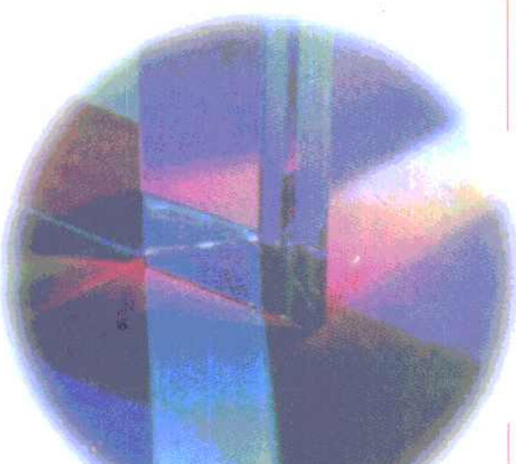
◆中学教师继续教育教材◆

数学教学基本功

栾树源 蒋永晶
刘长华 包文华 编著



辽宁师范大学出版社

数学教学基本功

栾树源　蒋永晶
刘长华　包文华　编著

辽宁师范大学出版社

前　言

《数学教学基本功》是中学数学教师继续教育的教学用书。

数学基本功作为一门课程是一个新课题，研究领域众多，内容十分丰富，对数学基本功的内涵众说纷纭，在其他继续教育用书中所涉及的诸如研究教材的基本功，运用教法的基本功，表达方面（语言、板书、徒手画图等）的基本功等，本书不再重复。本书的选题以中学数学方法论和初中数学解题研究为主要内容，作为数学教师内在教学基本功，与其他继续教育用书相辅相成。本书的主要读者为中学数学教师，希望通过对本书阅读，使读者在数学教学中重视数学方法论和解题研究，总结一般规律，摆脱“题海”，提高课堂教学的质量。

本教材按《中学数学教师继续教育培训纲要》编写。第一讲由栾树源、蒋永晶撰写，第二讲由包文华、刘长华撰写。

书中采用了国内同仁的观点和资料，这里一并致谢。

由于我们才疏学浅，时间仓促，不足之处望读者不吝赐教。

编著者

2000 年 2 月

第一讲　中学数学方法论

一、绪论

1.什么是数学方法论

数学方法论是研究数学发展规律、数学的思想方法、以及数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问。

数学发展的历史过程表明数学的发展一直受两方面因素的推动。一方面是社会生产实践及科学技术发展的客观要求(外部因素);其二是数学自身内部的矛盾运动(内部因素)。在整个发展过程中,这两个因素相互交叉渗透。宏观的数学方法论主要是研究数学发展的外部动力,探索数学发展的普遍规律,数学应用的广阔前景,数学人才的成长规律等问题。如果只就数学内部的特定矛盾进行研究、探讨、总结数学发现的原理和法则,数学创造的方法和技巧,以及数学各个分支的发展模式等,则是属于微观的数学方法论。

中学数学方法论是一门既与数学方法论紧密相关又独具特点的学科。中学数学方法论以初等教学为背景,面向中学教学实际,从微观数学方法论的角度,在数学解题的理论和实践的结合上,对中学数学方法进行比较系统的研究。

中学数学方法论应包括的内容,从其功能考虑应有以下几方面:

(1)当前中学数学教学内容所涉及的数学方法;

(2)中学教师从事数学教学工作应掌握的数学方法;

(3)数学中有可能引入到中学数学教学中去的数学方法;

(4)为了使中学数学方法能够形成系统而需要引入的某些数学方法。

这几部分内容会有重复,但从整体上看可以覆盖中学数学方法论的主要内容。

2.学习和研究中学数学方法论的目的和意义

中学数学方法论是关于中学数学内容的数学方法论,它的目的在于力图深刻地揭示中学数学内容的本质和规律性,力图总结数学家们发现发明和组织整理属于目前中学数学的或与之有关的数学理论所运用的种种方法及思维活动过程,以探求在中学数学教学中提高教与学质量的途径。

著名的法国数学家阿达玛(Hadamard)在其名著《数学领域的发明心理学》中指出:“一个学生解决某一代数或几何问题的过程,与数学家发现或创造的过程具有相同的性质,而至多只有程度上的差异。”

因此,中学数学方法论对中学数学教学有着重要的指导作用。

学习中学数学方法论,有助于数学教师获得传授数学知识、发展学生数学思维和数学能力、培养学生对数学的爱好和兴趣的方式、方法和途径。数学教师以心理学、方法论为指导,通过深入分析教材的知识结构、学生的心理发展特点、学生的认知结构,根据教学大纲所规定的目的要求和教学论所阐明的教学原则,才有可能选择恰当的教学方法,合理地设计出发展中学生数学思维、数学能力的教学方案,逐步引导学生思索、发现和创造,使发展思维和能力寓于其中,从而提高教

师的教学水平。

许多数学家认为,问题是教学的心脏,数学的真正组成部分是问题和解;解决问题最困难的部分之一是提出正确的问题。系统地研究解答数学问题的各种方法和技巧,有助于深刻理解数学本质,自觉掌握数学规律,全面提高数学的发现、创造能力。许多数学家在解决数学问题的过程中产生了许多卓越的创造性方法。数学方法论中的许多方法和原理是从数学发展历史中,从数学家的发明发现中总结归纳出来的。

数学教师借助于数学方法论和有关数学史的学习,让学生了解数学家的发现、创造数学的过程以及为此付出的艰苦卓绝的努力,这样,既可以激发学生们对学习数学的爱好和兴趣,又可以让学生从中培养毅力,受到献身科学的教育。

通过数学方法论的学习,还可以培养我们坚持真理、勇于创造的良好品质。众所周知数学家们对欧氏几何第五公设的不满并想证明它,一千多年来,消耗了许多数学家的宝贵精力,最终导致"非欧几何"的产生。虽然这种几何学在逻辑系统内没有矛盾,演绎论证的严格性也无懈可击,但由于它的背景与人们的直观常识所不容,所以在非欧几何产生的初期受到人们的冷嘲热讽。当它在物理学科(广义相对论)中得到验证和实用后,才获得了巩固的地位,并成为现代数学中形式公理化方法的起源。

二、数学的发现方法

1.观察法和试验法

观察法和试验(实验)法是自然科学研究中十分重要的方

法，也是数学方法论中最基本的方法之一。

(1)观察法

观察法是人们对周围世界客观事物和现象在其自然条件下，按照客观事物本身存在的实际情况，研究和确定它们的性质和关系从而获取经验材料的一种方法。

观察法在中学数学教学中的应用是极为广泛的。数学教学过程离不开观察，通过观察认识数学的本质、揭示数学的规律、探求数学方法。在教学中，恰当地运用观察来收集材料、发现新事物、探求解题方法与途径，这对于培养学生的观察能力，提高教学效果有很大作用。

观察法可用于数学概念的形成中。数学概念是现实世界中事物、现象的数量关系、空间形式的基本属性在人们头脑中的反映。大多数数学概念特别是中学数学中的有关数、形、函数的概念，在周围环境中都有它的现实原型，都可以用观察法发现得到。数学概念又是高度概括、高度抽象的产物，只有从学生接触过或认识过的事物入手，密切联系实际原型、实物和图表等，才能使学生较容易地理解、掌握数学概念。

运用观察法可以发现数学定理、公式。数学中的定理、公式等，都是数学对象之间关系的反映，而数学对象间的关系很多就是从对数学对象的直接观察得来的。

在中学数学中也常常通过观察数学对象的“形”，来认识数学对象的性质。如为了研究一些函数的性质(单调性、周期性、奇偶性等)，往往观察这些函数的图象。

观察法更是广泛地应用于探索解题方法及途径。通过对问题条件的认真观察，可以找出已知与未知的连结点，挖掘条件的内在规律，从而促进问题的解决。当然，这中间免不了要

进行一些分析、联想、猜想等。一般来说，观察多从问题条件的特点入手、从观察已知和结论的关系(联系与差异)入手、从观察分析条件的隐含关系入手。在数学教学中，教师要特别注意培养学生的观察能力，它是培养学生综合数学能力的前提，要特别注意那些连问题还没有看明白就贸然动手解题的学生，让他们一定养成认真观察题目的条件和结论的习惯，并通过具体的例题使他们体会到仔细观察、认真审题的效果。现举几例：

例 1　若 a、b、c 都是非零实数，并且方程

$$(a^2+b^2)x^2+2b(a+c)x+b^2+c^2=0$$

有实数根．求证：$b^2=ac$．

分析：看到本题的条件，在一般情况下，容易想到利用判别式来解．但若通过 $4b^2(a+c)^2-4(a^2+b^2)(b^2+c^2)\geqslant 0$ 推出 $b^2=ac$ 中间需要进行不少的变形．如果仔细观察所给方程的特点，不难发现 x^2 项的系数与常数项都含平方，而且 x 项的系数又分别是 $2ab$、$2bc$，因此联想到具有完全平方的形式．于是通过简单变形即可证出．

证明：将已知方程变形为

$$a^2x^2+b^2x^2+2abx+2bcx+b^2+c^2=0,$$

即

$$(ax+b)^2+(bx+c)^2=0.$$

$\because a$、b、c 均为非零实数，

$$\therefore \begin{cases} ax+b=0 \\ bx+c=0, \end{cases}$$

$$\therefore x=-\frac{b}{a}=-\frac{c}{b}, \qquad \therefore b^2=ac.$$

例 2　在实数范围内解方程

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x}+y-2=0.$$

分析:所给方程含有两个未知数,却只有一个方程。一个方程一般只相当于一个独立条件,怎样才能求出需两个独立条件才能确定的两个未知数的值呢?注意题目的隐含条件。题目强调在实数范围内解方程,因此方程中两个二次根式下的被开方数应该非负,即由 $2x-1\geqslant0$ 及 $1-2x\geqslant0$ 同时成立可得 $x=\frac{1}{2}$,代回原方程即可求出 $y=2$,原方程得解.

例 3　已知 $x=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$、$y=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$,求 $2x^4-5x^2y^2+2y^4$ 的值.

分析:如果将 x、y 的值直接代入待求的式子中去,显然计算将很复杂.有的学生不认真观察已知条件的特点和关系,而又去将待求的式子因式分解.

$$2x^4-5x^2y^2+2y^4=(2x^2-y^2)(x^2-2y^2).$$

这样做并没有根本解决计算的复杂性.如果注意 x、y 数字关系,容易发现:

$$x+y=\sqrt{7}、x-y=\sqrt{3}、xy=1.$$

那么将待求的式子转化为 $x+y$、$x-y$、xy 的关系式来计算那就容易得多了.

解:$2x^4-5x^2y^2+2y^4=2(x^4+y^4)-5x^2y^2$

$=2(x^2+y^2)^2-9x^2y^2$

$=2[(x+y)^2-2xy]^2-9x^2y^2=2(7-2)^2-9$

$=41.$

或　$2x^4-5x^2y^2+2y^4=2(x^2-y^2)^2-x^2y^2$

$=2(x+y)^2(x-y)^2-x^2y^2=2\times7\times3-1=41.$

例 4　已知：a、b、c 为三角形的三边长，并且 $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$，求证：边长为 b 的边所对的角为锐角.

分析：根据本题的条件，容易想到利用余弦定理只要证出 $\cos B>0$ 即可，但这需要进行一系列的变形. 如果注意题目的条件：$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ 可以想到：当 $a=b=c$ 时符合条件，这时结论显然也成立（$B=60^\circ$）；当 b 与 a 或 c 不相等时，可知 b 边的大小必介于 a、c 之间（因如果 b 是最大边，即 $b>a$，$b>c$，$\Rightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{a}$、$\frac{1}{b}<\frac{1}{c}$，相加得 $\frac{2}{b}<\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$，与题设不符；$b$ 为最小边同样可导致矛盾），那么 b 边所对的角必然为锐角了.

例 5　解方程 $(2x+17)(2x+19)=15$.

分析：若按常规将它化为一元二次方程标准式来解，将使计算复杂化. 如果注意到左端两个因式之差为 2，而右端 15 也可以写成差为 2 的两个数之积：3×5，那么我们就可以得到

$$2x+17=3,\qquad \text{解得}\quad x_1=-7;$$

另外还可以写成　$(2x+17)(2x+19)=(-5)\times(-3)$，又可得到

$$2x+17=-5\qquad \text{解得}\quad x_2=-11.$$

(2)　试验（实验）法

试验法是人们根据研究的需要，有时要借助专门仪器工具，人为地变革、控制研究对象，在有利条件下获取经验材料的方法.

试验法是在有目的、有计划的条件下进行的，通过试验（可能是重复多次的），去粗取精、去伪存真、积累经验、总结规

律。当然,试验离不开观察,而观察又依赖及促进试验。回顾数学的发展过程,有许多的数学结论和性质法则是通过实验得来的。如一些图形的面积和体积大多是通过测量求得的;三角形的重心也是通过实验得来的等等。

在中学数学教学中,试验法也有着广泛的应用。

①定性试验。所谓定性试验是指用来判断数学对象间的某种关系或性质是否存在的试验。如在论证某定理的正确性之后,常给学生一些满足定理条件的正向例子,去验证定理。有时也常给学生一些不满足定理条件的反例,从而去强化定理的条件。

②定量试验。定量试验是用来测定某对象的数值、数量之间关系的试验。

例 6　平面几何中的"三角形内角和等于 180°"定理的教学.

教师为使学生对此结论有深刻的印象,引导学生用实验的方法去发现这一结论。

1)让每个学生任意画一个三角形,然后用量角器去量出你画的这个三角形的三个内角,学生容易发现这个三角形的三个角之和为 180°.

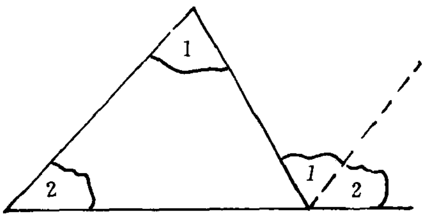


图 1.1

2)用剪纸拼图试验。让学生用纸板任意剪出一个三角形,然后撕下 A、B 两个角,如图 1.1 拼在一起,不难发现:"三角形内角之和等于

180°”的结论。

通过这些实验，不仅使学生掌握了所学的结论，而且也从中学到一种“割补”的证明方法。

③结构分析试验。所谓结构分析试验是指用来测定某对象的内部各种成分间结构的试验。

例 7　试在整数范围内分解因式 $x^2-8x+12$.

分析：要将 $x^2-8x+12$ 分解成两个一次因式的乘积 $(x+a)(x+b)$，实际上就是找出两个整数 a、b，使得 $a+b=-8$，$ab=12$. 因此我们只要将“12”分解成两个整数之积的各种情况都写出来：1×12、2×6、3×4、$(-1)\times(-12)$、$(-2)\times(-6)$、$(-3)\times(-4)$，再试验一下上述六种情况中的哪种情况下两数之和为 -8 即可，显然只有 $(-2)\times(-6)$ 满足了. 这就是平时所说的“十字相乘法”，是一种具体的试验方法.

当然在试验中，再加以观察分析，会使试验的效果更快、更好. 比如上例中，由 $ab=12$，可知 a、b 必为同号，又由 $a+b=-8$，则知 a、b 必同为负，这样我们就可以不去试验 1×12、2×6、3×4 这三组数了.

试验法也是解选择题的一种常用方法.

例 8　下列哪一个数一定不是某个自然数的平方（$n\in N$）？

(A) $3n^2-3n+3$，　　(B) $4n^2+4n+4$，

(C) $5n^2-5n-5$，　　(D) $7n^2-7n+7$.

分析：若直接通过 n 的表达式判定哪个不是某自然数的平方比较困难，因此我们不妨取 $n=1,2,3,\cdots$ 来分别试验，从而判定.

解：当 $n=1$ 时都不是某自然数的平方.

当 $n=2$ 时,(A)的值为 $9=3^2$,可以排除(A).

当 $n=3$ 时,(C)的值为 $25=5^2$,(D)的值为 $49=7^2$,(C)、(D)均可排除,故选(B).

一般地说,数学不是试验科学,数学的一些理论不是单纯靠试验就可以建立起来的。因此,观察与试验不是数学的主导方法。观察与试验用来判断所研究对象的性质正确与否,而不能看作数学的严格论证。但观察与试验提供的研究的素材与方向,一些试验的结果可能形成某种猜想,为研究者提示探讨的方向,会促使研究者去进一步研究、推广和论证。历史证明,往往能得到满意的结果。

2. 数学抽象法

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的科学。它有三个显著的特点:一是高度的抽象性;二是严谨的逻辑性;三是应用的广泛性。这几个特点是互相联系的。数学的高度抽象性,决定了它的严谨的逻辑性,也保证了它的应用广泛性。因此,学习和研究数学,必须理解并掌握数学抽象方法。

从认识论和方法论上来分析,任何事物都有它的现象和本质。现象是指事物的外部形态、外部联系;本质是指事物的内部的矛盾运动,内部联系;本质常常隐于现象的背后,不易为人们直接感知。抽象,就是透过事物的现象,深入事物的内部,把事物的本质抽取出来的过程和方法,通过抽象分析,人们才能就事物的内部联系,对现象作出统一的科学的说明。

数学抽象,是抽象分析方法在数学中的具体运用,也就是利用抽象的分析方法,把大量的现实世界空间形式和数量关系的直观背景材料,进行去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里的加工和制作,提炼数学概念,构造数学模型,建立数学

理论。

数学抽象的基本过程，大体是从所考察的问题出发，通过对各种经验事实（或已有基本概念、基本理论）的观察、分析、综合和比较，排除事物现象的、外部的、偶然的东西，抽出事物本质的、内在的、必然的东西，揭示客观对象的本质和规律。

进行数学抽象，一般应注意以下几点：首先要分辨事物的真象和假象，避免为假象所迷惑；其次，要撇开与所考察的问题无关的内容，排除那些模糊的过程、掩盖普遍规律的干扰因素，在纯粹的状态下考察事物；第三，要区分基础的东西与派生的东西，深入事物的内部，发掘决定事物性质的基础内容；第四，要从基础的东西出发，把事物的各种属性和关系综合起来，把事物的本质作为一个完整的体系抽象出来。

例1　关于点的概念。几何学中点的概念，是从现实世界中抽象出来的，日常生活中经常遇到的水点、雨点、万米长跑的起点、河流的交会点、某学校所在的地点、地球上的城市、宇宙中的星体等，都可以作为“点”的现实原型。这些例子中的点的物理性质各不相同，大小也不一样，但它们有一个共同的特征，即各自占据着一定的位置。几何学中的点，舍弃了事物的物理性质，更无大小可言，仅仅表示位置，也就是纯属观念性的东西。点是几何学中的基本元素，除了表示位置，还有其它作用。比如，点的集合可以构成直线、曲线，也可以构成平面、曲面，甚至还可以构成整个空间。

例2　关于自然数的概念。自然数的概念是在具体的计数过程中经过数学抽象得来的。在原始社会，人类以狩猎、捕鱼和采集野果为生。人们所关心的问题，就是野兽、鱼、果实的有和无。有了食物要进行分配，人们就要关心食物的多与

少。这样,就逐渐产生了数的概念。开始,人们对数目的认识都是和具体的事物联系在一起,例如,一条鱼,一个果子等,没有抽象的数的概念。后来人们采用一些方法来表示被数物品,如小石块、绳结、刻痕等,这时数学发生了第一次原始的抽象,由“一一对应”原则,每一个被数物品选择一个相应的东西(如石块、绳结)作为计算工具。随着大量的实践,人们意识到自己的手指是天生的计算器。人们用“扳指头”的方法,一个一个地数集合中的物品,以后逐渐发展到用一只手表示五,双手表示十,整个人表示二十等。随着实践活动的发展,人们逐渐发现了量的共同特征。比如,一头野兽与一条鱼是完全不同的两个量,可它们有共同的地方,都表示一个东西。一条鱼再添上一条鱼是两条鱼,一只野兽再添上一只就是两只野兽,也就是说,一个东西添上一个同类的东西总是两个东西。这样一来,把一只野兽、两条鱼、三个矛头等具体内容抛开,可以用一个抽象的数来表示它的共同特征。这些一、二、三等等的数,在不同的场合,就可以表示各类量的多少。引进了数字符号后,就变成 1,2,3……等等数的系统,形成了作为集合标志的自然数的概念。

例 3　哥尼斯堡七桥问题。数学中的图论,最早就开始于哥尼斯堡七桥问题。这个问题在很长时间没有解决,后来在 1736 年瑞士数学家利用数学抽象方法,成功地作出了解答。(参见《数学模型方法》中的例 1)。

例 4　等比数列概念的建立。在中学数学教学中,为了帮助学生建立等比数列的概念,可引导学生观察几个与下面类似的数列:

①3,6,12,24,……

②2, −4, 8, −16, 32, ……

③$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots\cdots$

④4, 4, 4, 4, ……

可以发现,尽管在上述例子中出现了正数、负数、整数、分数等等,但它们有共同的性质:后项与前项之比是常数.如果我们舍弃它们的具体内容,保留它们的本质属性,就得到了等比数列的概念.用符号 a_n 表示数列的第 n 项($n = 1, 2, \cdots$),q 表示公比,则有关系式:$a_n = a_{n-1} \cdot q$.这就是抽象化的产物.

从上面的几个例子可以看出,数学抽象具有三个显著的特征:

①数学抽象有着明确的目标,都是撇开对象的具体内容,仅仅保留其空间形式或数量关系。

②数学抽象适用范围广泛,既有以提炼数学概念为基本目的的表征性抽象,又有旨在探索数学理论的原理性抽象。

③数学抽象有着丰富的层次,不仅表现为直接从现实世界中抽象出相应的空间形式和数量关系,而且还表现在已有数学知识的基础上,抽象新概念,建立新理论。

数学抽象有多种具体方法,常用的有理想化抽象、等价抽象、强抽象与弱抽象、存在性抽象等。

(1)理想化抽象

理想化抽象是建立数学概念的一种基本方法。它是在纯粹的理想的状态下,对事物进行简单化、完善化的加工处理,撇开事物的具体内容,排除事物的次要的、偶然的因素,保留事物的一般的、本质的属性,抽象出相应的数学概念。几何中的点、线、面等基本概念的引进,就是理想化抽象的典型例子。

由理想化抽象得来的数学概念，与其现实原型本身未必相符。例如，在现实世界中，根本找不到“没有长、宽、高的点”、“没有宽度和厚度的线”、“没有厚度的面”等。理想化抽象是主观的抽象形式与客观的具体内容的辨证统一，它不是远离了客观事物，而是更接近于事物，抓住了事物的本质，是对客观事物更深刻、更正确、更完全的反映。

理想化抽象不仅对于数学概念的引进是十分重要的，而且对于由实际问题去构造数学模型，也是不可缺少的。欧拉正是利用理想化抽象方法，把哥尼斯堡七桥问题转化为一笔画问题，从而使问题得以顺利解决。

例5　7只茶杯，杯口朝上。将其中4只翻转过来（杯口朝上的变为杯口朝下，杯口朝下的变为杯口朝上），称为一次“运动”。试问是否能经过有限多次运动，使得茶杯的杯口全部朝下？

从表面上看，本题不像是数学问题。为能用数学方法求解，可以运用理想化抽象的基本思想，把问题“数字化”，对杯口的朝上或朝下赋以数学意义。比如，把杯口朝上记为 $+1$，杯口朝下记为 -1；每次运动将其中4个数改变符号，相当于将其中的4个数各“乘以” -1. 这里的 $+1$ 或 -1，显然满足普通乘方的运算规则：

$$(+1)^n = +1, \qquad (-1)^{2n} = +1,$$
$$(-1)^{2n+1} = -1. \ (n \in N)$$

经过这样的处理，本题就等价于：能否经过有限次运动，将7个 $+1$ 变为7个 -1？

解：将茶杯的杯口朝上记为 $+1$，杯口朝下记为 -1，则开始时相当于7个数全为 $+1$，它们的“乘积”是 $+1$，每作一次运