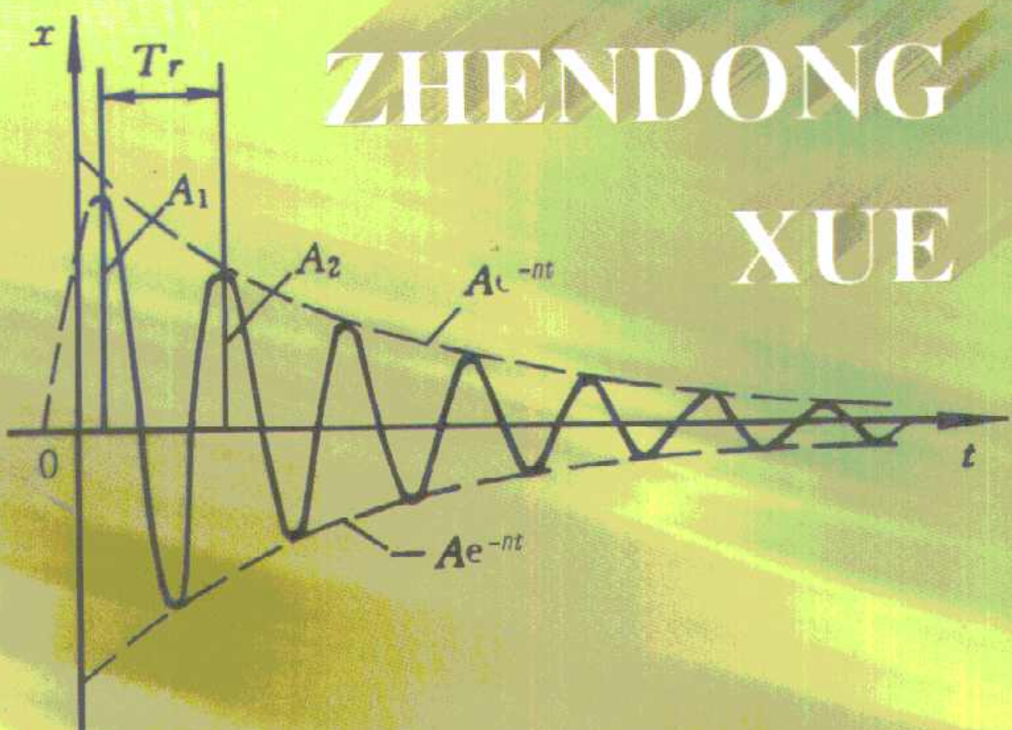
机械振动学

闻邦椿 刘树英 张纯宇 编著

JIXIE
ZHENDONG
XUE



冶金工业出版社

13.1
a1

363

TH11B.1
W.63a1

机 械 振 动 学

闻邦椿　刘树英　张纯宇　编著

A0925534

北　京
冶 金 工 业 出 版 社
2000

内 容 提 要

本书是为高等院校机械类专业本科生编写的简明教材。主要内容有：第一章叙述了机械振动的基本概念、振动力学模型及振动的分类；第二章及第三章叙述了单自由度系统的振动，包括无阻尼、有阻尼的自由振动和受迫振动及其应用；第四章叙述了无阻尼、有阻尼二自由度系统的自由振动和受迫振动，着重介绍振动方程的建立和求解的一般方法及其在工程中的应用；第五章介绍多自由度系统的振动，着重介绍用矩阵法建立系统的振动方程、矩阵迭代法求固有频率及振型、坐标变换与解耦，并举出了若干应用实例。第六章介绍单自由度非线性系统的振动。书后附有一定量的习题及参考答案。

本书可作为高等院校本科生有关专业的基础课或技术基础课教材，也可作为研究生参考教材，还可供从事机械振动领域研究和设计的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

机械振动学/闻邦椿等编著. —北京：冶金工业出版社，2000.2

ISBN 7-5024-2438-5

Ⅰ.机… Ⅱ.闻… Ⅲ.机械振动-动力学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.TH113.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 00930 号

出版人 卿启云(北京沙滩嵩祝院北巷 39 号，邮编 100009)

责任编辑 方茹娟 美术编辑 李 心 责任校对 白 迅

北京梨园彩印厂印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销

2000 年 2 月第 1 版，2000 年 2 月第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16；12.25 印张；291 千字；188 页；1-3000 册

19.50 元

冶金工业出版社发行部 电话：(010)64044283 传真：(010)64044283

冶金书店 地址：北京东四西大街 46 号(100711) 电话：(010)65289081

(本社图书如有印装质量问题，本社发行部负责退换)

前　　言

振动理论及其应用技术的发展已经取得了引人注目的成就，有力地推动了新设计与新产品的不断出现。随着现代工业对工程质量、产品精度及其可靠性方面要求的提高，振动理论已经成为工程技术人员正确进行产品设计、结构优化以及开发新产品等必备的基础知识。因此，机械振动学课程已经成为高等工科院校机械工程类专业学生必修的基础理论课之一。目前，国内出版发行的几种教材和著作均已使用多年，根据国家教委新近颁布的专业目录和高等学校机械工程类专业四年制本科教学大纲的要求，我们编写了这本教材。

本书内容：第一章概论，叙述了振动的基本概念、振动力学模型、振动的分类、振动在国民经济建设中的应用及地位；第二章及第三章叙述了单自由度系统的振动，包括无阻尼、有阻尼的自由振动和受迫振动、隔振原理及其应用，重点是建立起振动学基本概念及对其重要性的认识；第四章叙述了无阻尼及有阻尼二自由度系统的自由振动和受迫振动，着重介绍系统振动方程的建立和求解的一般方法及其在工程中的应用；第五章叙述多自由系统的振动，着重介绍矩阵法建立系统振动方程，求固有频率及固有振型的矩阵迭代法，坐标变换与解耦，并举出了若干应用实例。第六章介绍单自由度非线性系统的振动。书中带“*”号部分可留给学生自学。书后给出了一定量习题与答案，以便巩固和消化课程的基本内容。

本书曾作为东北大学本科生内部教材使用多年。此次出版是在原有基础上进行了重新编写。书中吸收了作者多年积累的教学经验和本学科科学研究的成果，使其更具科学性和实用性。本书的特点是简明扼要，既突出重点又照顾一般，能够在有限的课时内提供尽可能多的信息和本科生应具有的必要的知识。在编写过程中，我们特别注意了有关理论基础与工程用机械的联系，使理论的应用更具有典型性和鲜明性，并且尽量反映近年来国内外有关的最新研究成果，使本教材具有先进性。

担任本书主审的有：大连理工大学马孝江教授，东北大学张维屏教授、关立章教授。在此对三位教授表示衷心感谢。

本书在编写出版过程中，得到东北大学等院校许多老师的指导并提供资料，冶金工业出版社教材编辑室同志给予大力帮助和支持，在此一并表示感谢！

由于时间仓促以及我们的水平所限，对书中可能存在的疏漏之处，恳切希望师生及读者不吝赐教。

编　者
1999 年 10 月

1 概　　论

随着科学技术的发展，现代工业对工程的质量、产品的精度及可靠性等都提出越来越高的要求。这就是说，在现代设计中不仅要考虑静力效应，而且还要考虑到动力效应问题，即所谓“动态设计”问题。动态设计中的一个重要方面就是振动分析。因此，振动问题已经在工程领域中日益被重视，振动分析已经成为进行机械设计、制造和机器使用过程中不可缺少的内容。

所有的机械都处在运动（运转）的过程中，而且常常伴随着振动。但是，以往的一个漫长时期中，人们往往“忽视”了振动问题，使得依据静力学理论作出的机械设计的强度和刚度虽然绰绰有余，但实际使用过程中却往往“过早地”损坏了。其中之一就是振动所引起的不良作用。

振动是一个复杂的物理过程。要解析这个过程，建立振动理论并且用来解决工程实际问题，是艰巨而漫长的任务。过去人们只能在允许的条件下进行简化求解，满足部分工程问题的要求。近年来由于电子计算机的飞速发展和应用，人们解决复杂振动问题和进行大量浩繁的运算成为可能。近二十多年来，振动理论的研究有了许多重要的发展，并且在许多方面得到越来越广泛的应用。

1.1　机械振动的基本概念

机械振动是一种特殊形式的机械运动。可以解释为：机器或结构物在其静平衡位置附近所作的“往复运动”。这个往复运动的机器或结构物称为振动体。实际中为了便于说明问题，人们总是把振动体假设成没有弹性而只有集中质量的刚体，并且把它与一个被忽视了质量而只具有弹性的弹簧联系在一起，组成一个“弹簧-质量”系统，称为振动系统，简化后的单自由度弹簧-质量系统力学模型如图 1-1 所示。

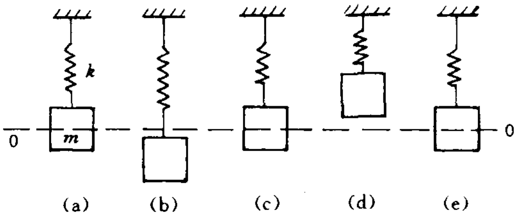


图 1-1　弹簧-质量系统力学模型

如图 1-1，当物体（振动体）处于静力平衡位置（即 1-1a 位置）时，物体的重力与支持它的弹簧的弹性恢复力相互平衡，其合力 $F=0$，故物体处于静止状态，物体的速度 $v=0$，加速度 $a=0$。

当物体受到向下的冲击力作用即向下运动，弹簧被拉伸。随着弹簧越来越拉长，其弹簧恢复力逐渐增大，物体作减速运动，当物体的运动速度减少到 $v=0$ 时，物体运动到最低位置（1-1b 位置），此时由于弹簧的恢复力大于物体的重力，故合力 F 的方向向上，物体产生向上的加速度 a，物体即转而向上运动。

当物体返回到平衡位置（图 1-1c 位置）时，它所受的重力与弹簧弹性力的合力 F 又为零。但由于物体的惯性作用，物体继续向上运动；随着物体向上运动，弹簧逐渐被压缩，则弹性恢复力渐渐增大，且与重力的合力方向向下，故物体又作减速运动；当物体向上运动的速度减少到零时，物体即运动到最高位置（图 1-1d 位置），此时由于被压缩弹簧的弹性恢复力

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

与重力的合力 F 大于惯性力，物体又开始向下运动，直至再次回到平衡位置（图 1-1e 位置）；此后，由于惯性的作用，物体继续向下运动，重复前面的运动过程。如此物体在其平衡位置附近往复运动。当系统内无阻尼存在时，这种往复运动将进行无穷次。

物体从平衡位置起始，向下运动到最低位置，然后向上运动，经过平衡位置继续向上运动至最高位置，然后再向下运动回到平衡位置，即从图 1-1a 到图 1-1e，算作完成一次振动。物体完成一次振动所占用的时间长度称为周期。振动物体每经过一个周期后，便重复前一个周期全部过程。周期以 T 表示，单位为秒(s)。

单位时间内振动的次数称为频率，它是周期的倒数。以 f 表示频率，即

$$f=\frac{1}{T} \tag{1-1}$$

频率的单位为赫兹(Hz)或 1/s。

在大多数情况下，振动是有害的。当振动量超出容许的范围后，振动将会影响机器的工作性能，使机器的零部件产生附加的动载荷，从而缩短使用寿命；强烈的机器振动还会影响周围的仪器仪表正常工作，严重影响其度量的精确度，甚至给生产造成重大损失；振动往往还会产生巨大的噪声，污染环境，损害人们的健康，这已成为最引人关注的公害之一。例如，某矿井多绳提升机，由于其减速装置产生强烈振动，曾被迫降速减载运行，严重影响了该提升机的工作性能；露天矿用潜孔钻机冲击器的缸体，曾因冲击振动而导致缸壁产生纵向裂纹；风动凿岩机的高频冲击产生强烈的噪声，严重影响作业环境卫生和工人的健康。

另一方面，振动也是可以被利用的。在很多工艺过程中，振动起着特有的良好作用。例如，利用振动可以使物料在振动体内运动，输送或筛分物料；利用振动可以减少物料的内摩擦及物料的抗剪强度，进行充填或将物料密实；利用振动还可降低松散物料对贯入物体的阻力，从而提高作业机械的生产率；利用振动可以提高物料在烘干箱（振动体）内的干燥效率，节省能源。此外，利用振动还可以完成破磨、粉碎、沉拔桩等各种工艺过程。因此，随着各种不同的工艺要求，就出现了各种类型的振动机械，如振动输送机，振动筛分机，振动装载机，振动捣实机，振动研磨机等等，已经在不同的生产工艺过程中发挥了重要作用。

研究振动问题的目的是：根据生产实际中提出的各种各样的振动问题，不断地认识和掌握各种情况下机械振动的规律，以便控制振动的危害，发挥其有益的作用。由此就提出了进行机械或结构的振动分析和振动设计这两个方面的问题。前者的问题大致可分为三类：第一类是固有特性问题，如振动系统的固有频率、固有振型等等；第二类是振动的响应问题，即振动系统受外界激励作用而产生的振动效应，其中一方面是研究振动引起的结构动态变形，其加速度是否超出允许值以及所产生的噪声等；另一方面是研究构件动应力，结构疲劳强度或其寿命等问题；第三类问题是振动的稳定性问题，即研究影响系统稳定性的主要因素以及确定稳定性临界条件等。

振动设计或振动控制是振动分析的逆问题，其主要任务是在产品设计中采取必要措施来满足振动要求，如避开共振，限制振动响应水平，不使发生自激振动等等。但由于问题的复杂性，一般仍将问题转化为振动分析问题来处理，即先根据经验选取振动系统的质量，确定其系统刚度分布以及必要时外加减振装置等。然后再分析其固有特性、振动响应及其振动稳定性问题。

1.2 机械振动的分类

对机械振动，可根据不同的特征把它加以分类：

(1)按产生振动的输入特性，可分为自由振动、受迫振动和自激振动 3 类

自由振动　系统受到初始激振作用后，仅靠其本身的弹性恢复力“自由地”振动，其振动的特性仅决定于系统本身的物理特性(质量 m、刚度 k)；

受迫振动　又称强迫振动，系统受到外界持续的激振作用而“被迫地”进行振动，其振动特性除决定于系统本身的特性外，还决定于激振的特性；

自激振动　有的系统由于具有非振荡性能源和反馈特性，从而引起一种稳定的振动。

(2)按振动的周期性，可分为周期振动和非周期振动两大类

周期振动　振动系统的某些物理量(如位移、速度、加速度等)，在相等的时间间隔内作往复运动。往复一次所需的时间间隔称为“周期”；每经过一个周期以后，运动又重复前一周期的全过程(如图 1-2 所示)。

非周期振动　即瞬态振动，振动系统的物理量的变化没有固定的时间间隔，即没有一定的周期(如图 1-3 所示)。

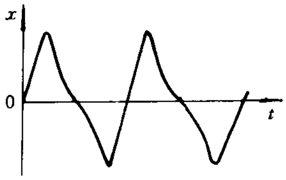


图 1-2　周期振动

图 1-3　非周期振动

(3)按振动的输出特性，可分为简谐振动，非简谐振动和随机振动

简谐振动　可以用简单正弦函数或余弦函数表述其运动规律的振动(如图 1-13)。显然，简谐振动属于周期性振动。

非简谐振动　不可以直接用简单正弦函数或余弦函数表述其运动规律的振动，如图 1-2 所示的振动。非简谐振动也可能是周期性振动。

随机振动　不能用简单函数或简单函数的组合来表述其运动规律，而只能用统计的方法来研究其规律的非周期性振动(如图 1-3)。

(4)按振动系统的结构参数的特性，可分为线性振动和非线性振动

线性振动　振动系统的惯性力、阻尼力、弹性恢复力分别与加速度、速度、位移成线性关系，能够用常系数线性微分方程表述的振动；

非线性振动　振动系统的阻尼力或弹性恢复力具有非线性性质，故只能用非线性微分方程表述的振动。

(5)按振动系统的自由度数目分类，可分为单自由度和多自由度系统振动

单自由度系统的振动　确定系统在振动过程中任何瞬时的几何位置，只需要一个独立坐标的振动；

多自由度系统的振动　确定系统在振动过程中任何瞬时的几何位置，需要多个独立坐标的振动。

弹性体具有无限多个自由度，因此需用无限多个独立坐标确定系统在振动过程中任何

瞬时的几何位置。

(6)按振动位移的特征分类,可分为纵向振动、横向振动、扭转振动和摆振动

纵向振动　振动体上的质点沿轴线方向发生位移的振动,如图 1-1 所示的振动。

横向振动　振动体上的质点在垂直于轴线方向发生位移的振动,如图 1-8 所示的振动。

扭转振动　振动体上的质点作绕轴线方向发生位移(角位移)的振动,如图 1-9、图 2-3。纵向振动和横向振动又统称为直线振动,扭转振动又称为角振动。

摆振动　振动体上的质点在平衡位置附近作弧线运动,如图 1-4。

1.3　振动系统的简化及其力学模型

1.3.1　振动系统的简化与自由度

实际的振动系统往往是很复杂的,给研究解决振动问题带来很大困难。因此,在处理实际工程问题时,必须根据所研究问题的实际情况,抓住系统中的主要影响因素,忽略那些次要的因素,把复杂的振动系统加以合理的简化和抽象,研究起来就方便多了。有时候对那些不能够研究的复杂问题,经过简化以后就能够研究解决了。经过简化抽象以后的振动系统,在振动学上称为力学模型。

用以描述振动系统的运动规律所必须的独立坐标数目,称为该振动系统的自由度数。如前节所述,只需要一个独立坐标就可以描述其运动规律的系统称为单自由度振动系统;需要两个独立坐标才能描述清楚其运动规律的系统,称为二自由度振动系统;必须用多个独立坐标,才可以描述清楚其运动规律的系统称为多自由度振动系统。

当分析实际的振动系统的自由度数目时,情况要复杂得多,因为实际系统是由许多构件组成的,而每个构件都具有分布的质量和弹性。因此严格地讲,实际的振动系统都是无限多自由度的系统。为使问题得以研究解决,必须在对系统的各因素进行全面分析的基础上,把握主要因素,忽略次要因素,建立合理的力学模型。例如,将质量较大、弹性较小的构件简化为不计弹性的集中质量;将振动过程中弹性变形较大的构件简化为不计质量的弹性元件;将较小位移的振动忽略不计或只考虑某一方向的振动而暂不考虑其他方向的振动等等。这样处理以后,实际的无限多自由度的系统就可以简化为有限个自由度系统,甚至单自由度系统,这样分析研究起来不仅方便得多,而且所得到的结果仍具有足够的精度。

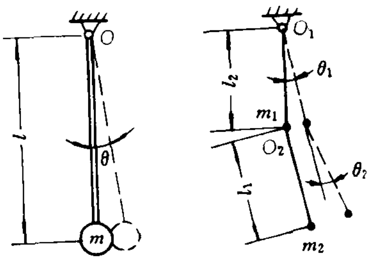


图 1-4　单摆振动与复摆振动

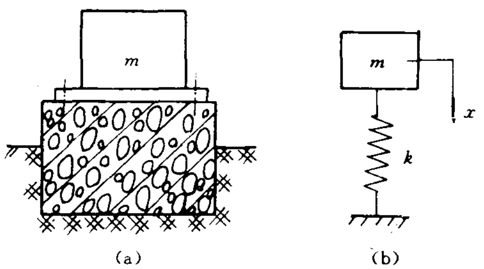


图 1-5　机器及其力学模型

可见,所研究系统的自由度数目,不仅决定于系统本身的机械性质,而且还决定于人们要着重研究系统中的主要方面及要求的精确度。

1.3.2 力学模型的建立

下面举例说明振动系统力学模型的建立方法。

图 1-5a 所示为一台机器安装在混凝土基础上。在机器工作时，由于离心载荷的作用，机器与基础一起产生振动。通常机器与基础的变形远小于地基土壤的变形，因此可把机器与基础看成一个刚性质量块，基础正下方的地基土壤看成为无质量的弹簧。若我们只研究垂直方向的振动情况，那么该振动系统便可简化成如图 1-5b 所示的力学模型。图中 k 为弹簧的刚度，它表示产生单位变形所需施加的力，单位是 N/cm。

图 1-6a 为悬臂梁式提升设备。当绞车提升重物时，由于某种原因突然紧急制动，整个提升系统悬臂梁——绞车——钢丝绳——重物将沿着垂直方向产生振动。在振动过程中，绞车与重物可看作无弹性变形的质量块，钢丝绳和悬臂梁变形较大，可当作无质量的弹簧来处理。当只研究垂直方向的振动时，其简化后的力学模型如图 1-6b 所示。在这个模型中，k_1 为悬臂梁的刚度，由材料力学可知

$$k_1 = 3EJ/l^3 \tag{1-2}$$

式中 E——弹性模量；

J——悬臂梁截面惯性矩；

l——重物距悬臂梁固定端的距离。

k'_2 为钢丝绳的刚度，它指钢丝绳产生单位长度变形所需加的外力。m_1 与 m_2 分别为绞车与重物的质量，对图 1-6b 所示的力学模型还可作进一步简化。用一个弹簧代替 m_1 与 m_2 之间的两个弹簧，其刚度为

$$k_2 = 2k'_2$$

简化后的模型如图 1-6c 所示。

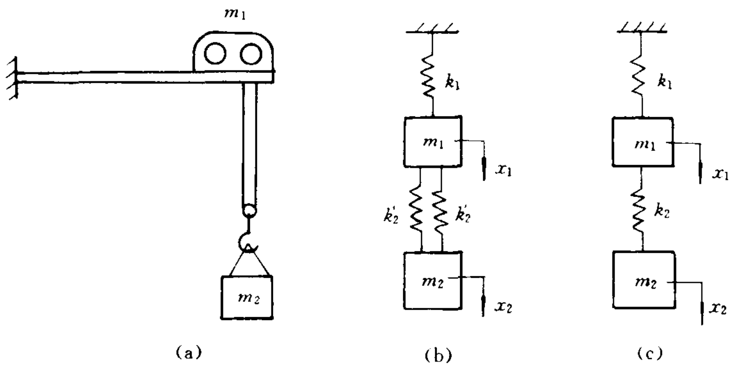


图 1-6 悬臂梁式提升机及其力学模型

图 1-7a 所示的运输汽车是由许多构件组成的机械系统，当研究包括全部构件的振动时，它是一个有无限多个自由度的系统。当把车身、车斗等看成一个刚体，并且各构件的质量集中到一点，将弹性较大的轮胎看成为刚度为 k 的弹簧来研究这个刚体的振动时，则这个汽车振动系统就被简化为一个仅具有刚性的刚体坐落在四个弹簧上的振动系统(图 1-7b)。当汽车在凸凹不平的道路上行驶时，将会引起较为复杂的振动。

如图 1-7a，当把汽车车身、车斗等作为一个刚体研究时，汽车将会发生沿 x、y、z 三个轴向的直线振动和绕这三个轴的转角振动。系统被简化为具有六个自由度的振动系统。实际表明，对汽车行驶影响最大的是沿 z 轴的垂直振动和绕 y 轴的角振动。因此，六个自由度可以简化成两个自由度问题来研究。

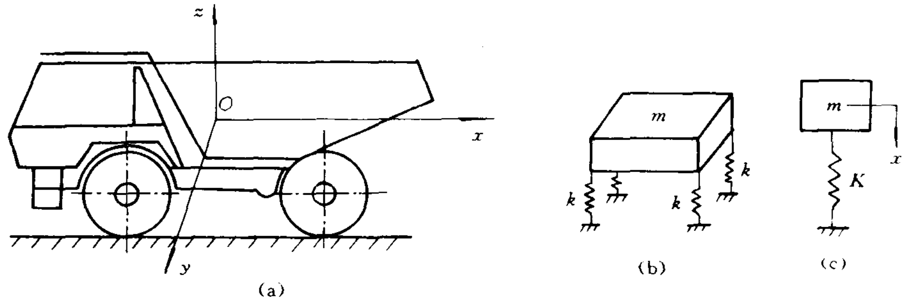


图 1-7　运输汽车及其力学模型

当只研究汽车垂直方向的振动时，图 1-7b 所示的力学模型可以进一步简化，即用一个刚度为 $K(K=4k)$ 的弹簧代替四个刚度为 k 的弹簧，则系统又简化成如图 1-7c 所示的单个自由度的力学模型了。

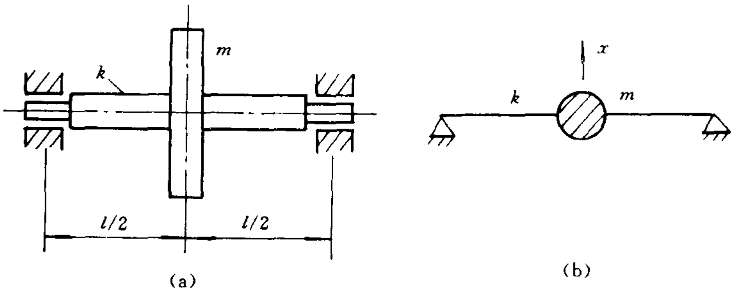


图 1-8　单圆盘转子系统及其力学模型

一单圆盘转子系统如图 1-8a 所示。当圆盘在其静平衡位置附近产生横向振动时，转轴的弹性很大，系统弹性变形主要是转轴产生的，故可将转轴当作无质量的弹性体处理，其弹性刚度 k 为圆盘所在位置时转轴的刚度。对质量为 m 的圆盘，由于其弹性很小，则可认为是一个没有弹性的集中质量。这样，图 1-8a 所示的单圆盘转子系统即被简化为图 1-8b 所示的力学模型。它与图 1-7c 所示的力学模型本质上是一致的。

扭转振动也是工程实际中常遇到的振动问题，需用角位移作为独立坐标来描述其运动状态(图 1-9a)。

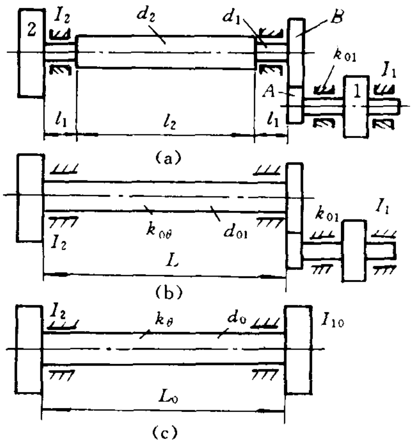


图 1-9　扭振系统及其力学模型

根据运动特点，可以把转轴简化为无质量的扭转弹簧；将工作叶轮 2 与齿轮 B 间的阶梯轴用一等直径的当量轴代替(图 1-9b)；把 I_1 向低速轴简化为 I_{10}；用刚度为 k_θ 的当量转轴代替图 1-9b 中的两根轴，k_θ 称为扭转刚度，意义为单位转角所需的力矩(N・cm/rad)；将转动惯量为 I_{10}及 I_2 的圆盘看成无弹性的刚体。这样，原扭振系统即被简化为如图 1-9c 所示的力学模型。

1.4 各种弹性元件的刚度特性及刚度的计算

当质量的位移(即弹性元件的变形)为 x，弹性元件的弹性力(等于施加的外力)为 Q_k，弹性力和位移的关系为

$$Q_k=f(x) \tag{1-3}$$

称为弹性元件的刚度特性。各种弹性元件的刚度特性如图 1-10 所示。

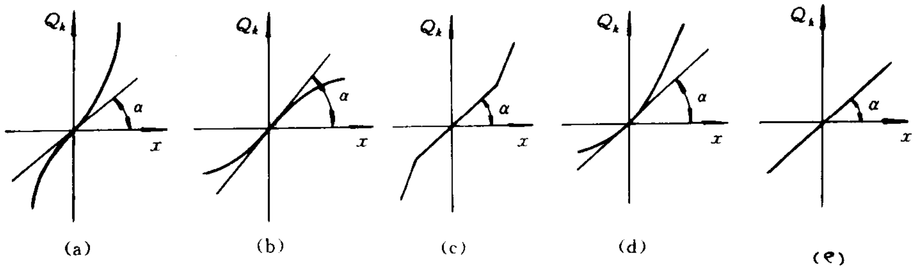


图 1-10 各种刚度特性曲线

(a)硬特性；(b)软特性；(c)分段特性；(d)不对称特性；(e)线性

由图可见，当位移很小时，作为一阶近似，各种刚度特性曲线均可用过原点的切线代替，即

$$Q_k=kx$$

上述将弹性元件的弹性力与位移的关系简化为线性关系，称为线性化。如果线性化以后改变了振动系统的性质，则应按非线性特性处理。

上式表明，弹性元件的弹性力 Q_k 与位移 x 的一次方成正比，其比例系数 k 即产生单位位移(线位移或角位移)所需的载荷(力或力矩)称为刚度，其单位是 N/cm，或 N・cm/rad。

下面举例说明根据此定义计算弹性元件的刚度。

如图 1-11 所示，悬臂梁端部作用一物体，若不计梁质量的影响，求梁端点的弯曲刚度。

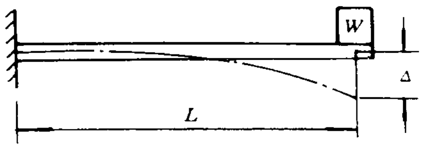


图 1-11 悬臂梁的刚度计算图

由材料力学知，梁端受物体的重力作用产生的弯曲挠度(变形)为

$$\Delta=\frac{WL^3}{3EJ}$$

式中 E——梁材料的弹性模量；

J——梁截面对中性轴的惯性矩；

W——物体的质量；

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

L——梁的计算长度。

所以梁端点的弯曲刚度应为

$$k_{\Delta}=\frac{W}{\Delta}=\frac{3EJ}{L^3}$$

实际系统中的同一构件，所受载荷不同，在研究不同方向的振动时，构件具有不同的刚度表示。

一简支的等截面轴如图 1-12 所示，轴的截面面积为 $A(\mathrm{cm}^2)$，长度为 $L(\mathrm{cm})$，轴截面惯性矩为 $J(\mathrm{cm}^4)$，极惯性矩为 $J_{\mathrm{p}}(\mathrm{cm}^4)$，材料的弹性模量为 $E(\mathrm{N/cm}^2)$，剪切弹性模量为 $G(\mathrm{N/cm}^2)$。

当轴受到轴向载荷 $Q_1(\mathrm{N})$ 的作用时，产生的轴向变形为

$$\delta=\frac{Q_1L}{EA}$$

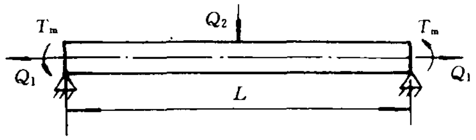


图 1-12　轴的刚度计算图

所以轴向刚度为

$$k_1=\frac{Q_1}{\delta}=\frac{AE}{L} \tag{1-4}$$

当轴端受到扭矩 $T_{\mathrm{m}}(\mathrm{N\cdot cm})$ 作用时，扭转变形 $\theta(\mathrm{rad})$ 为

$$\theta=\frac{T_{\mathrm{m}}L}{GJ_{\mathrm{p}}}$$

故扭转刚度为

$$k_{\theta}=\frac{T_{\mathrm{m}}}{\theta}=\frac{GJ_{\mathrm{p}}}{L} \tag{1-5}$$

当轴的中点受到径向载荷 $Q_2(\mathrm{N})$ 的作用时，在该点的位移（挠度）为

$$y=\frac{Q_2L^3}{48EJ}$$

可得轴中点的横向刚度为

$$k_2=\frac{48EJ}{L^3}$$

对于同一个弹性元件，当选择的参考点不同时，其刚度的值也不相同，读者可以自行计算验证。

综上所述，对单一弹性元件的刚度计算是比较容易的，但在实际中经常是若干个弹性元件组合使用。关于组合元件的刚度计算将在下一章叙述。

1.5　简谐振动及其表示法

1.5.1　简谐振动的运动学特征

简谐振动是最简单而又最重要的一种周期振动。

如前所述，简谐振动是指机械系统的某个物理量（如位移、速度、加速度等）按时间的正弦或余弦函数规律变化的振动，其数学表达式如

$$x=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_0\right)$$

或
$$x=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_0\right)$$

式中 A——振幅，表示振动体离开平衡位置的最大位移(cm)；

T——周期，为振动体完成一次振动所占的间隔时间(s)；若用 $t+T,t+2T,\cdots,t+nT$ 代替式中的 t，则所得的 x 值不变，故运动每间隔时间 T 就重复一次；

φ_0——初相位，即 $t=0$ 时的相位，表示振动体的初始位置。

上式中令 $\omega_n=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$，称为“角频率”或“圆频率”，则上式可写成

$$x=A\sin(\omega_n t+\varphi_0) \tag{1-6}$$

式中 $\omega_n t+\varphi_0$——相位角，是决定振动物体在 t 时刻运动状态的重要参量。

对简谐振动的位移表达式(1-6)式求一阶和二阶导数，可得简谐振动的速度和加速度表达式

$$\dot{x}=A\omega_n\cos(\omega_n t+\varphi_0)=A\omega_n\sin\left(\frac{\pi}{2}+\omega_n t+\varphi_0\right) \tag{1-7}$$

$$\ddot{x}=-A\omega_n^2\sin(\omega_n t+\varphi_0)=A\omega_n^2\sin(\pi+\omega_n t+\varphi_0) \tag{1-8}$$

比较式(1-6)、(1-7)及(1-8)可知，简谐振动具有如下运动学特征：

(1)简谐振动的速度、加速度也是简谐函数，而且与位移函数(简谐函数)具有相同的频率；

(2)速度的相位较位移的相位超前 $\frac{\pi}{2}$，加速度相位较位移相位超前 π；

(3)由于 $\ddot{x}=-\omega_n^2 x$，表明简谐振动的加速度与位移恒成正比而方向相反。

1.5.2 简谐振动的表示法

1 矢量表示法

简谐振动可以用旋转矢量在坐标轴上的投影表示。

如图 1-13，矢量 ***OP*** 以等角速度 ω 反时针旋转，其模为 A。起始位置与水平轴夹角 φ_0，在任一瞬时，矢量与水平轴的夹角为 $\omega t+\varphi_0$，那么该旋转矢量在垂直轴上的投影为

$$x=A\sin(\omega t+\varphi_0) \tag{1-9}$$

或表示为旋转矢量在水平轴上的投影

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0) \tag{1-10}$$

可见，旋转矢量在垂直轴(或水平轴)上的投影，可用来表示简谐振动。旋转矢量的模 A 就是简谐振动的振幅；旋转矢量的角速度 ω 就是简谐振动的圆频率；旋转矢量与水平轴(或垂直轴)的夹角 $\omega t+\varphi_0$ 就是简谐振动的相位角；简谐振动的初相位角 φ_0 则是 $t=0$ 时旋转矢量与水平轴(或垂直轴)的夹角。

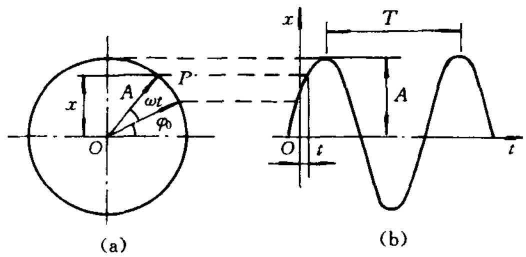


图 1-13 简谐振动的矢量表示

2 复数表示法

简谐振动也可以用复数表示。如图 1-14，一个复数可以表示为复数平面上的一个矢量，

称为复矢量。长度为 A 的矢量 $\boldsymbol{OP}$ 在实数轴和虚数轴上的投影分别为 $A\cos\theta$ 及 $A\sin\theta$，故矢量 $\boldsymbol{OP}$ 就代表了下列复数

$$Z=A(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta) \tag{1-11}$$

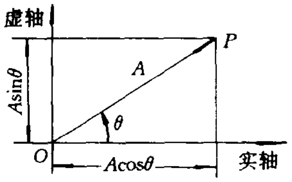


图 1-14 复数的矢量表示

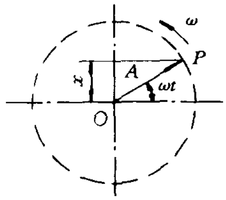


图 1-15 复数旋转矢量

矢量的长度 A 就代表了复数的模，与实数轴的夹角 θ 就是这一复数的复角。

令矢量 $\boldsymbol{OP}$ 绕 O 点以等角速度 ω 在复平面内逆时针旋转，就成为一个复数旋转矢量(如图 1-15)，它在旋转中任一瞬时的复角为 ωt，所以这一旋转矢量的复数表达式又可表示为

$$Z=A(\cos\omega t+\mathrm{i}\sin\omega t) \tag{1-12}$$

根据欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$$

则(1-12)式可改写成

$$Z=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{1-13}$$

如前所述，任一简谐振动都可以表示为一个旋转矢量在直角坐标轴上的投影。因此，同样可以用一个复数旋转矢量在复平面的实轴或者虚轴上的投影来表示这个简谐振动，也就是说可以用复数来表示简谐振动，即把一个简谐振动表示为

$$x=A\sin\omega t=I_m Z=I_m[A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}] \tag{1-14}$$

式中符号 $I_m Z$ 表示取复数 Z 的虚数部分。

当然也可以取复数 Z 的实数部分来表示简谐振动，这时的简谐振动是用余弦函数表达的。为方便起见，以后如不作特别说明时，对复数 $A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 即表示取它的虚数部分，而省去符号 I_m。

这样，简谐振动的复数表达式即写成

$$x=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{1-15}$$

若初相位不为零，则上式应改写成

$$x=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi_0)}=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}=\overline{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{1-16}$$

式中 $\overline{A}=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}$，称为复振幅。

简谐振动的速度和加速度的复数表达式为

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\mathrm{i}\omega A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}=A\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)}\\ \ddot{x}&=-\omega^2A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}=A\omega^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\pi)}\end{aligned} \tag{1-17}$$

可见在复平面内，简谐振动的位移、速度、加速度仍具有前述的超前特征(见 5.1.1)。

2 单自由度系统振动的理论基础

许多工程技术问题在一定条件下，都可以将实际振动系统简化为单自由度振动系统来研究。因此，单自由度系统的振动理论是机械振动学的理论基础，要掌握多个自由度振动的基本规律，也必须首先掌握单自由度系统的基本理论。本章将介绍单自由度系统线性自由振动的基本理论。主要包括振动方程的建立及其求解，系统固有频率的计算以及等效系统的质量和刚度等。

2.1 振动微分方程的建立

如前所述，单自由度振动系统通常包括一个定向振动的质量 m，联接于振动质量与基础之间的弹性元件(其刚度为 k)以及运动中的阻尼(阻尼系数为 r)。振动质量 m、弹簧刚度 k 和阻尼系数 r 是振动系统的三个基本要素。如图 1-5 所示的系统，考虑混凝土基础的阻尼，且在振动系统中还作用有持续作用的激振力 Q，此激振力 Q 可以是简谐的力(以 $Q_0\sin\omega t$ 或 $Q_0\cos\omega t$ 表示)，也可以是任意的力。机器(振动体)的受力示意图如图 2-1 所示。

系统振动时，振动质量的位移 x、速度 $\dot{x}$ 和加速度 $\ddot{x}$ 会产生弹性力 kx、阻尼力 $r\dot{x}$ 和惯性力 $m\ddot{x}$，它们分别与振动质量的位移、速度和加速度成正比、但方向相反(图 2-1)。

应用牛顿运动定律可以建立运动微分方程式。现取 x 轴向为正，按牛顿定律：作用于质点上所有力的合力等于该质点的质量与沿合力方向的加速度的乘积，则

$$m\ddot{x}=Q_0\sin\omega t-r\dot{x}-kx$$

或

$$m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=Q_0\sin\omega t \tag{2-1}$$

式(2-1)即为单自由度线性振动系统的运动微分方程式的普通式。它又可以分为如下几种情况：

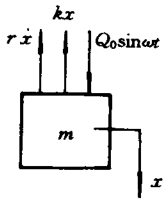


图 2-1 振动体受力示意图

(1)单自由度无阻尼自由振动

$$m\ddot{x}+kx=0$$

(2)单自由度有粘性阻尼的自由振动

$$m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=0$$

(3)单自由度无阻尼受迫振动

$$m\ddot{x}+kx=Q_0\sin\omega t$$

(4)单自由度有粘性阻尼的受迫振动

$$m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=Q_0\sin\omega t$$

下面就分别讨论这几种不同情况的振动。

2.2 无阻尼单自由度系统的自由振动

所谓无阻尼自由振动，是指振动系统受到初始扰动(激励)以后即不再受外力作用，也不受阻尼的影响所作的振动。

如图 2-2，设振动体的质量为 m，它所受的重力为 W，弹簧刚度为 k。弹簧挂上质量块后

的静伸长为 δ_j，此时系统处于静平衡状态，平衡位置为 0-0；由静平衡条件知

$$k\delta_j = W \tag{2-2}$$

当系统受到外界的某种初始干扰以后，静平衡状态被破坏，则弹性力不再与重力相平衡，而产生弹性恢复力，使系统产生自由振动。

取静平衡位置为坐标原点，以 x 表示质量块的位移，并以 x 轴为系统的坐标轴，取向下为正。则当质量块离开平衡位置时，在质量块上作用有重力 W 和弹性恢复力 $-k(\delta_j+x)$，由于受力不平衡，质量块即产生加速度，根据牛顿第二定律建立振动微分方程式

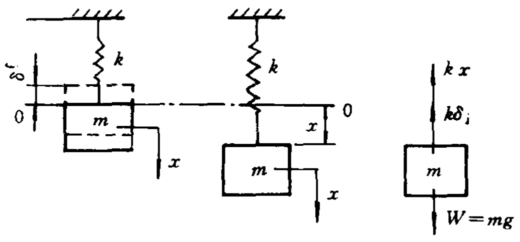


图 2-2　单自由度系统的振动

$$m\ddot{x} = W - k(\delta_j + x)$$

即

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{2-3}$$

在建立振动微分方程时，若取静平衡位置为坐标原点，就已经考虑了重力的影响，而在建立振动方程式过程中不必出现重力 W 和静变形 δ_j。

现将(2-3)式改写为

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{2-4}$$

令 $\frac{k}{m} = \omega_n^2$，代入上式得

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{2-5}$$

这是一个齐次二阶常系数线性微分方程，显然 $x = e^{st}$ 是方程的特解，把它及 $\ddot{x} = s^2e^{st}$ 代入(2-5)式得：$(s^2+\omega_n^2)e^{st}=0$，由于 $e^{st}\neq 0$，否则位移为零没有意义。故必有

$$S^2 + \omega_n^2 = 0 \tag{2-6}$$

称为微分方程的特征方程，其特征根为

$$S = \pm i\omega_n \tag{2-7}$$

式中 $i = \sqrt{-1}$

故振动微分方程的通解是

$$x = c_1 e^{i\omega_n t} + c_2 e^{-i\omega_n t}$$

由欧拉公式，可得

$$\begin{aligned} x &= c_1(\cos\omega_n t + i\sin\omega_n t) + c_2(\cos\omega_n t - i\sin\omega_n t) \\ &= (c_1+c_2)\cos\omega_n t + i(c_1-c_2)\sin\omega_n t \\ &= D_1\cos\omega_n t + D_2\sin\omega_n t \end{aligned} \tag{2-8}$$

式中　$D_1 = c_1 + c_2$，$D_2 = i(c_1 - c_2)$，由初始条件确定。

式(2-8)表明，单自由度系统无阻尼自由振动包含两个频率相同的简谐振动，而这两个简谐振动的合成，仍是一个简谐振动，可用下式表示

$$x = A\sin(\omega_n t + \varphi_0) \tag{2-9}$$

式中　A——振幅，它表示质量偏离静平衡位置的最大位移，cm，

$$A = \sqrt{D_1^2 + D_2^2} \tag{2-10}$$

φ_0——初相位角，rad，

$$\varphi_0=\arctan\frac{D_1}{D_2} \tag{2-11}$$

ω_n——振动系统的固有角频率，rad/s。

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2-12}$$

将振动的初始条件 $t=0, x=x_0, \dot{x}=\dot{x}_0$ 代入式(2-9)中，得

$$x_0=D_1 ; \dot{x}_0=D_2\omega_n$$

则得

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{\dot{x}_0^2}{\omega_n^2}} ; \varphi_0=\arctan\frac{x_0\omega_n}{x_0}$$

系统每秒钟振动的次数，称为系统的固有频率(Hz)，以 f 表示

$$f=\frac{\omega_n}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2-13}$$

振动一次所用的时间称周期(s)，用 T 表示，显然，周期 T 是频率 f 的倒数

$$T=\frac{1}{f}=\frac{2\pi}{\omega_n}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{2-14}$$

由式(2-12)和式(2-13)可知，系统的固有频率(ω_n 或 f)是系统的固有特性，它仅决定于振动系统本身的固有参数(m 和 k)，而与系统所受的初始扰动(初动条件)无关。因此，对相同质量的两个系统，弹簧刚度小的固有频率低，弹簧刚度大的固有频率高；而对刚度相同的两个系统，质量大的系统固有频率低，质量小的系统固有频率高。

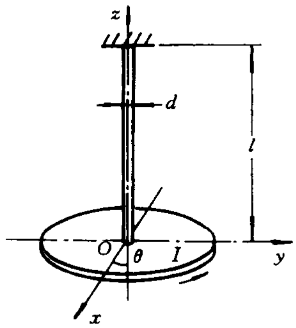


图 2-3　扭转振动

图 2-3 所示为垂直轴的下端固定一个水平圆盘。已知轴长为 l，直径为 d，剪切弹性模量为 G，圆盘的转动惯量为 I(略去轴的质量)。在圆盘平面上施加初始扰动(如一力偶)后，系统作自由扭转振动。若不计阻尼影响，振动将永远继续下去。

由材料力学可知，它的扭转刚度为

$$k_\theta=\frac{\pi d^4 G}{32l}$$

图 2-3 中角位移坐标为 θ，箭头所指方向为正。建立扭转振动微分方程：

$$I\ddot{\theta}=-k_\theta\theta$$

即

$$I\ddot{\theta}+k_\theta\theta=0 \tag{2-15}$$

系统振动的固有角频率

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k_\theta}{I}} \tag{2-16}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com