

測量誤差理論

張叔涵 編譯

中國工業出版社

56.1523
551

测量误差理论

张叔涵 編譯

中国工业出版社
1962.11

本書介紹古典測量誤差理論（以高斯的正態分布定律為基礎），內容包括三種測量（直接測量、間接測量及總和測量）和這三種測量中存在的三種誤差（偶然誤差、系統誤差及疏失誤差）。測量誤差按偶然誤差、系統誤差及疏失誤差分類，是為了便於研究它們的性質，並進而引導出評定和消除它們的方法。

本書比較系統、全面地論述了古典測量誤差理論，並比較注意實際應用。書中有相當數量的物理、電、熱、化學等方面的測量例題，可供參考。

本書可供具有中等以上文化程度和一定實際工作經驗，從事測量工作的人員閱讀。

測量誤差理論

張叔涵 編譯

*

水利電力部辦公廳圖書編輯部編輯（北京阜外月坛南書房）

中國工業出版社出版（北京修鐵廠路丙10號）

北京市書刊出版業營業許可證出字第110號

中國工業出版社第一印刷廠印刷

新華書店北京發行所發行·各地新華書店經售

*

開本 $850 \times 1168^{1/32}$ ·印張 $15^{3/16}$ ·字數398,000

1966年1月北京第一版·1966年1月北京第一次印刷

印數0001—4,640·定價（科四）1.80元

*

統一書號：15165·4201（水電-571）

序

这本书是根据实际工作需要而編写的。书中介紹古典測量誤差理論，包括三种測量（直接測量、間接測量和总和測量）和三种誤差（偶然誤差、系統誤差和疏失誤差）。讀者对象为具有中等以上文化程度和一定实际工作經驗，从事測量工作的人員。为了能比較彻底地了解书中內容，讀者应具备初等微积分的基础。

本书編写时以文献20为主要蓝本。系統誤差和疏失誤差，一般书籍多不讲述（或讲得很少），而該书却給予了足够的重視，这是它很大的一个特点。編写时，还根据其他參考文献，对偶然誤差正态分布定律作了較多的介紹，并适当补充了概率論和其他方面的知識。此外，有的內容是根据編譯者的理解，作为解释、說明材料而写入书中的，是否有当，尙請讀者指正。

編譯者感到高兴的是，本书脫稿时适值水利电力部电力科学研究院（其前身为水利电力部技术改进局）建立十周年。回忆十年来，在党的正确领导下，电力工业建設和技术改进、科学研究工作的飞跃发展，令人感到欢欣鼓舞。就以电測量技术和仪器仪表檢驗工作來說，解放以前是空白或基本上是空白；解放以后，在党的正确领导下，經過十余年的努力，已經具备相当規模，在全国电力系统內，已初步建立起了电量值传递和监督系統，开展了一定种类仪器仪表的定期檢驗。再以本书的編写來說，也处处体现了党和领导的关心与支持。本书草稿写成，在电力科学研究院报告时，院领导亲临指导，并指出草稿中存在的缺点。在最后定稿的过程中，也得到了党和院领导以及电气測量室领导的誠懇帮助。离开了这些，这本书是不可能編写成的。

編譯者每当回想起十余年来党的培养和耐心教导，在感激之余，深深感到自己做的工作太少。今后一定要在階級斗争、生产

IV

斗争和科学实验三大革命运动中，更好地改造和锻炼自己，为社会主义革命和社会主义建设做更多的工作。

本书承电力科学研究院徐士高总工程师和陈士衡工程师在审阅时提出了原则意见并予以帮助，电气测量室一些同志协助做了部分例题的核算工作，院内、院外一些同志也都一再鼓励完成此书，編譯者在此表示感谢。

由于编写时间不长，还有一些搜集到的材料未及全部編入；还未能搜集和选用我们自己工作中的资料作为例题。这些都是存在的问题和缺点。編譯者水平不高，对问题理解不深，错误或不当之处一定不少，請讀者多加指正。

編譯者

1965年6月24日于北京

目 录

序

第 1 章 測量誤差概述	1
1·1 測量的定义和分类	1
1·2 誤差的概念和分类	9
1·3 測量数据的数学处理方法	17
1·4 关于偶然誤差和系統誤差, 精密度和正确度 的补充說明	18
第 2 章 偶然誤差	21
2·1 直接測量的数学处理	21
2·1·1 概率論簡單介紹	21
2·1·1·1 客觀自然界存在着統計規律	21
2·1·1·2 概率論研究的对象	22
2·1·1·3 概率的定义	23
2·1·1·4 頻率	27
2·1·1·5 概率的加法定理	29
2·1·1·6 概率的乘法定理	30
2·1·1·7 全概率	33
2·1·1·8 几何概率	35
2·1·1·9 別魯利定理	40
2·1·1·10 随机变量	42
2·1·1·11 随机变量的分布規律	45
2·1·1·12 概率分布密度	51
2·1·1·13 随机变量的数字特征	54
2·1·2 偶然誤差的一般概念	65
2·1·3 測量的組合原則·加权平均值	69
2·1·4 等精密度測量的組合·算术平均值	81
2·1·5 偶然誤差的正态分布定律(高斯的誤差定律)	93

V

2·1·6	測量列的精密度参数	142
2·1·7	測量結果(算术平均值)的精密度参数	196
2·1·8	直接測量偶然誤差数学处理举例	212
2·1·9	有效数字和数据的化整	223
2·1·10	关于測量的次数問題	233
2·1·11	絕對誤差和相对誤差·精密測量的定义	244
2·1·12	不等精密度測量的組合	250
2·2	間接測量的数学处理	258
2·2·1	間接測量数学处理的实质	259
2·2·2	間接測量数学处理的一般公式·平均誤差积累定律 (亦称平均誤差传播定律)	263
2·2·3	間接測量的两种特定情况——相加減的函数关系 和相乘除的函数关系	277
2·2·4	平均誤差积累定律更为一般的用途和注意事項	282
2·2·5	技术測量的誤差的評定	294
2·2·6	間接測量数学处理公式汇总	297
2·2·7	間接測量偶然誤差数学处理举例	300
2·2·8	間接測量誤差理論的反任务(第二任务)	306
2·2·9	間接測量誤差理論的第三任务——确定最有利的 測量条件	312
2·2·10	微小誤差准則	316
2·3	总和測量的数学处理	318
2·3·1	最小二乘法的实质	319
2·3·2	最小二乘法(等精密度的情况)	321
2·3·3	不等精密度的总和測量	330
2·3·4	总和測量的精密度	331
2·3·5	写出并求解正态方程式組	336
2·3·6	求未知数的权	346
2·3·7	将非线性的条件方程式化为线性形式	350
2·3·8	最小二乘法应用举例	351
第3章	系統誤差	386
3·1	系統誤差的一般概念和其分类	386
3·2	系統誤差对測量結果的影响	392

3.3	如何发现系统误差	396
3.4	消除系统误差的方法	405
3.5	系统误差消除的精密度	424
3.6	系统误差已消除的准则	433
第4章	疏失误差	439
4.1	疏失误差和粗大误差的一般概念	439
4.2	粗大误差准则	442
附录		455
附录表 I	$\Phi(Z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^Z e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot dZ$	455
附录表 II	$\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n-1}}, \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}, \frac{1}{n\sqrt{n-1}}$ 值	469
附录表 III	肖文涅准则	472
附录IV表 C	用高斯的逐步消去法求解有四个未知数的正态 方程式组的计算表格	473
参考文献		475

第1章 测量误差概述

人类在向自然作斗争、研究客观事物规律的过程中，不外乎研究客观事物的质的关系和量的关系。在研究质的和量的关系的过程中，都离不开测量。科学技术的发展与测量技术的不断完善是紧密相联的，测量技术促进科学的新发现，并使之用于技术实践中。俄罗斯著名的化学家门捷也夫(Д·И·Менделеев)说：“科学始于测量”，又说：“在自然界里，度量衡是主要的认识工具”；雅科比(Б·С·Якоби)说：“没有测量就没有任何精密科学，就没有任何应用科学，就没有任何实验。新的测量方法标志着真正的进步。”

从这些话中，我们可以大致看到测量对科学技术工作的重要意义。

在测量过程中，由于种种原因，不可避免地使实验数据含有误差，因此如何评定和消除误差的影响，具有非常重要的意义。只有精确度为已知的测量才是有实际价值的。这里说精确度为已知，并不单指高精度一种情况。一个有充分精确度根据的测量结果，较之用更为完善的方法测量得的，但却缺乏精确度根据的测量结果，更为可取。

1.1 测量的定义和分类

为了研究测量误差，必须先明确什么是测量，和其分类。

文献20第18页给测量下的定义大致可表述如下：通过物理实验的方法，将一个量(被测的量)与作为比较单位的另一个量(称为“标准”)相比较的认识过程，称为测量。

根据文献26第108页建议的“计量学主要术语和定义”草案，测量的定义是：通过测量工具实现的，目的在于寻求以所采用的

测量单位表示的未知参量的数值的行为，称为测量。

为了理解下面所作的测量的分类，我们先说明两个概念〔文献15, 17〕：测量的目的和测量的对象。测量的目的（亦即未知参量^①）是指最终我们所要求的那个量；测量的对象（被测参量）是指直接被测量的辅助量。这个辅助量本身并不起独立的作用，它仅仅是用来计算未知参量用。测量的目的（未知参量）和测量的对象（被测参量）可以是统一的，也可以是不统一的。

对于研究测量误差理论来说，从方法学观点对各种测量进行分类是最有意义的，也就是说从获得测量结果的一般方法来进行分类。根据这种分类方法，所有的测量均可分为以下三类：直接测量、间接测量和总和测量。

直接测量。使未知参量与作为标准的量直接比较，或者用预先按标准定度好了的测量仪器进行测量，从而直接（而不需通过方程式）求得未知参量的数值。此种测量称为直接测量。此时，测量结果直接由实验数据获得。直接测量时，测量的目的和测量的对象是统一的，亦即未知参量和被测参量是同一个东西，其数学表达形式为两者相等，如式（1·1-1）所示。

例如，用尺测量长度，用钟表测量时间，用砝码在等臂天平上测量质量，用字盘天平测量质量，用温度计测量温度，用电流表测量电流，通过标准电阻线圈测量电阻等。直接测量的主要特征，是在测量过程中每一个操作均为实现测量所必需的组成部分，但每一个操作却没有独立的意义。并不是物理实验过程简单的测量就是直接测量。直接测量可以是简单的，例如，在字盘天平上称重时，全部操作就很简单。直接测量也可以是相当复杂的，例如，在计量学领域内用等臂天平称重量就是这样。此时，需要将称物体和砝码相互交换位置，需要观察天平横杆的摆动，观察气压计、温度计、和湿度计的指示数，测定天平的灵敏度，并根据一系列的公式进行计算。此种称重量的工作需要几个

① 用“参量”二字概括指某种参数或某种量(量值)。

小时。

直接测量可用下述一般式表示：

$$Y = X, \quad (1.1-1)$$

式中 Y ——未知参量的值；

X ——由实验数据直接获得的数值。

純粹的直接测量，一般用得較少，而且主要用在工程技术测量中。

間接测量。未知参量（例如下述公式中的 ρ ）系通过一定的公式（函数关系）与几个变量相联系，而不能直接求得。需要根据分別对各变量进行直接测量所得数值，代入公式中进行計算，求得未知参量的数值。这种测量称为間接测量。間接测量时，测量的目的和测量的对象是不統一的，亦即未知参量和被测参量之間存在一定函数关系（表现为方程式），見式（1.1-2）。

例如，欲求导线的电阻系数 ρ ，必須通过直接测量的方法求出其长度 l 、直径 d 和电阻 R ，然后按下式計算：

$$\rho = \frac{\pi d^2 R}{4l}.$$

又如，用惠斯登单电桥法测量电阻时，按单电桥（图 1-1）的平衡条件存在下述函数关系：

$$R_x = \frac{R_3}{R_4} \cdot R_2.$$

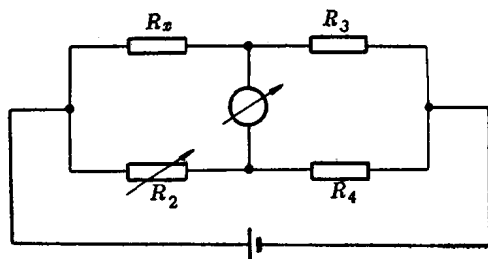


图 1-1 惠斯登单电桥

为了求得 R_x ，必須已知 R_2 、 R_3 和 R_4 。因此这种测量亦属間接测量。再如，求圆柱形物体的密度 D 时，先用直接测量的方法测得其质量 m ，直径 d 和高度 h ，然后按下式計算密度：

$$D = \frac{m}{0.25\pi d^2 h}.$$

此种求密度的测量亦属間接测量。

間接测量可用下述一般式表示：

$$Y = F(X_1, X_2, X_3, \dots, X_m), \quad (1.1-2)$$

式中 Y ——間接测量时未知参量的值；

F ——函数的符号（間接测量的函数关系預先已知）；

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_m$ ——直接测量所得数值。

間接测量是用得最多的，因为在許多情况下用直接测量的方法不可能求得未知参量的数值，或者可能但测量过程过分复杂，而且用間接测量的方法可以求得比用直接测量方法更为精密的结果。对于某些想象中的参量和通过实验比較的方法不能求得的参量，例如天文学方面的参量或原子内部结构的参量，間接测量的用处更是特別大。我們对于物质自然界的全部知識主要建立在間接测量基础之上。

通过直接测量长度、质量和时间以求得未知参量的数值的間接测量，称为绝对测量（例如，用电流天平测量电流）。

总和测量。简单地說，使各个未知参量以不同的組合形式出現（或者改变测量条件来获得这种不同的組合），根据直接测量或間接测量所得数值，通过求解联立方程式組以求得未知参量的数值者，称为总和测量。总和测量的测量目的和测量对象是不統一的，亦即未知参量和被测参量之間存在一定函数关系（表现为方程式組，見式1.1-5）。

例如，标准电阻线圈的电阻与溫度的关系可用下述多項式表示：

$$R_t = R_{20} + \alpha(t - 20) + \beta(t - 20)^2, \quad (1.1-3)$$

式中 R_t ——在 $t^\circ\text{C}$ 下电阻的实际值，欧姆；

R_{20} ——在20°C下电阻的实际值，欧姆；

α 和 β ——温度系数。

为了求得上式中的 α 、 β 和 R_{20} ①，至少需在三种温度状况下得出下述三个联立方程式，然后联立求解，从而求得它们：

$$R_t^{(1)} = R_{20} + \alpha(t^{(1)} - 20) + \beta(t^{(1)} - 20)^2,$$

$$R_t^{(2)} = R_{20} + \alpha(t^{(2)} - 20) + \beta(t^{(2)} - 20)^2,$$

$$R_t^{(3)} = R_{20} + \alpha(t^{(3)} - 20) + \beta(t^{(3)} - 20)^2,$$

式中 $R_t^{(1)}$ 、 $R_t^{(2)}$ 、 $R_t^{(3)}$ 以及 $t^{(1)}$ 、 $t^{(2)}$ 、 $t^{(3)}$ 均为已知（可以测量得）。求得 α 、 β 和 R_{20} 后，以之作为常数代入式(1.1-3)，则在任何温度下的 R_t 均可据此求得。又如，当电感线圈与一电容并联时（后者可看作是电感线圈的匝间分布电容的等值集中电容），在某一频率 f 下电感的数值 L_f 等于：

$$L_f = L_0(1 + \omega^2 CL_0), \quad (1.1-4)$$

式中 L_0 ——在极低的频率（极限情况下频率等于零）下电感线圈的数值， $\omega = 2\pi f$ 。

上式中的 L_0 和 C 的数值均不可能用直接测量或间接测量的方法求得，但是通过总和测量的方法可以求得它们。为此在两种已知的频率 f_1 和 f_2 下测量电感，得 $L_f^{(1)}$ 和 $L_f^{(2)}$ 如下[文献27，第26页]：

$$L_f^{(1)} = L_0(1 + \omega_1^2 CL_0),$$

$$L_f^{(2)} = L_0(1 + \omega_2^2 CL_0).$$

联立求解，即可求得 L_0 和 C 。以之作为常数代入式(1.1-4)，则在任何频率下的 L_f 值即可据此求得。

以上两例均属改变测量条件以获得方程式组的情况。

再如，校正成套砝码的方法亦属总和测量。假定成套砝码的额定值如下：1，1^A，2，2^A，5，10，20，20^A，50，100，

① α 和 β 均不能用直接测量或间接测量的方法求得。 R_{20} 虽然可在20°C下求得，但一般都不这样做，因为难于实现准确等于20°C的稳定温度状况。总和测量的其他例子均有类似的情况，即未知参量不能用直接或间接测量的方法求得。

200, 200[△]和500克^①。校正的含义是，成套砝碼中只有一个砝碼的实际值为已知（通过直接与标准砝碼相比較的办法求得其实际值），成套砝碼中所有其余各砝碼的实际值，可通过相互間以不同的組合进行相互比較的办法求得（实际值为已知的一个砝碼也参加比較）^②。这里所說比較，系指額定值相等的砝碼的比較。例如已知成套砝碼中10克砝碼的实际值，相互比較时可得如下方程式組：

$$\begin{aligned}
 (10) &= G, \\
 [(1) + (2) + (2^\Delta) + (5)] - (10) &= X_1, \\
 [(1^\Delta) + (2) + (2^\Delta) + (5)] - (10) &= X_2, \\
 [(1) + (2) + (2^\Delta)] - (5) &= X_3, \\
 [(1^\Delta) + (2) + (2^\Delta)] - (5) &= X_4, \\
 (2) - (2^\Delta) &= X_5, \\
 [(1) + (1^\Delta)] - (2) &= X_6, \\
 [(1) + (1^\Delta)] - (2^\Delta) &= X_7, \\
 (1) - (1^\Delta) &= X_8, \\
 [(1) + (2) + (2^\Delta) + (5) + (10)] - (20) &= X_9, \\
 [(1^\Delta) + (2) + (2^\Delta) + (5) + (10)] - (20^\Delta) &= X_{10}, \\
 (20) - (20^\Delta) &= X_{11}, \\
 [(10) + (20) + (20^\Delta)] - (50) &= X_{12}, \\
 [(10) + (20) + (20^\Delta) + (50)] - (100) &= X_{13}.
 \end{aligned}$$

上列式中，圓括号內的数目字表示实际值待求的砝碼（10克者除外）。 $X_1, X_2, \dots, X_{13}$ ——用直接测量的方法測得的差值（差值一般均很小，因为相互比較的各該砝碼的額定值相等）。 G ——10克砝碼的实际值（实际測量得者）。根据上述方程式組，用处理总和测量的最小二乘法，即可求得成套砝碼中每个砝碼的实际值。再如，校正成套电容器时，可采用“十进比較法”^③

- 符号“△”表示額定值相等的另一砝碼。
- 在計量領域內，最早采用这种校正方法的文献記載是 Benoit J.R.: *Travaux et Mémoires de Bureau International des Poids et Mesures*, T. XII, 1907, p.31.
- “十进比較法”：Метод декадных Сличений。

数关系均为预先已知，如函数关系不知道，则寻求这种函数已超出测量的范围，而为科学研究的任务）。

在总和测量中，为了得到式（1·1-5）的方程式组，需要改变测量时的条件，或令未知参量以不同的组合参加到测量过程中去（见上述四个例子）。为了通过方程式组（1·1-5）求解未知参量的数值，显然可见，方程式的数目至少应等于未知参量的数目，否则不可求解。但一般方程式的数目均多于未知参量的数目，且测量次数也可以多得多，如此可以大大提高测量结果的精密度。

总和测量只是在试验室里和在其他特殊场合，作为一种特殊的和精密的测量而被采用，一般遇到的机会不多。在大地测绘中，总和测量用得最多。

式（1·1-1）、（1·1-2）和（1·1-5）表明测量由简到繁逐步复杂的过程。把某种测量归属于上述三类中的何者，在一定程度上取决于我们的主观意图，也就是说，分类不是绝对的、界限始终鲜明的。例如，如果我们只注意获得测量结果，则我们可以把在等比电桥（即比例臂为1:1的电桥线路，如图1-2， $R_3=R_4$ ）上测量电阻的工作归属于直接测量： $R_x=R_2$ 。

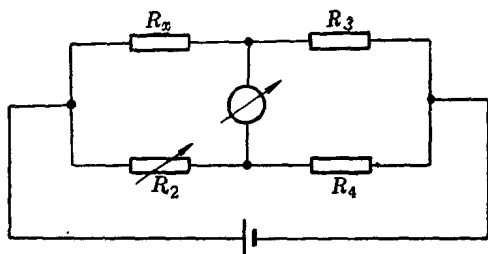


图 1-2 等比($R_3=R_4$)电桥

但是如果我們的注意力集中在分析研究各种因素（如比例臂的不等程度、比較臂的电阻的誤差、溫度等）对測量結果的影响，則得：

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4} [1 + (\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4)t],$$

式中 R_2 、 R_3 和 R_4 ——桥臂电阻的实际值；

α_2 、 α_3 和 α_4 ——相应各桥臂电阻的溫度系数；

t ——电桥的溫度。

在这种情况下， R_x 的測量已属間接測量。

实用上还常将測量分为試驗室測量和技术測量。凡需要考虑測量誤差的数值的測量，称为試驗室測量；凡只考虑誤差的上限值（这个上限值已能滿足实际要求）的測量，称为技术測量。对于試驗室測量，可以提出“誤差等于多少”的問題；对于技术測量，則只能提出“誤差不超过多少”的問題。

1.2 誤差的概念和分类

人們对自然界客观事物的認識，是一个逐步由不認識到認識，由不全面認識到較全面認識的发展过程。認識过程是不断发展的，客观事物和客观条件又在不断变化和发展着，因此在一定时期，人們对自然界客观事物的認識会有个限度，会帶有一定的局限性，而很难絕對真实地反映和掌握客观事物的一切內在联系和規律。这样就在人們所認識的与客观事物本来的面貌之間有了一定的差異。如果談的是測量，这种差異就表现为一定的数量，这个量我們称之为測量誤差。

用較具体的話語重新表述上述概念，就是：当我們进行任何一个測量时，我們將发现物理实验具有一定的局限性，物理实验方法和所用工具、仪器不可能絕對完善，因此不可能获得絕對不受畸变的結果；或者由于人們对客观自然現象的規律的認識不够全面，由于个人知識和經驗的限制，对未知參量缺乏正确的理