振动测试与应变电测基础

李德葆　沈观林　冯仁贤

清华大学出版社

振动测试与应变电测基础

李德葆　沈观林　冯仁贤

清 华 大 学 出 版 社

内　容　简　介

本书是一本工程实验力学基础教材，介绍振动量的测量方法与原理以及应变量的电测技术。前六章介绍振动测量的一般概念，传感器，基本振动量及参数的测量方法，机械阻抗及频响分析的基本概念，模态分析原理以及模型试验理论。后五章介绍应变电测技术，包括电测的基本概念，电阻应变计，应变仪，静、动态应变测量技术以及应变计式传感器。

本书可作为力学、机械、汽车、动力以及土木结构等工程专业的教科书，亦可作为有关工程技术人员作为进修或工作参考书。

振动测试与应变电测基础

李德葆　沈观林　冯仁贤

★

清华大学出版社出版

（北京清华园）

北京通县向阳印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

★

开本：787×1092 1/32　印张：15.25　字数：342千字

1987 年 6 月第 1 版　　1987 年 6 月第 1 次印刷

印数：0001～6000

统一书号：15235·285　　　　定价：2.50元

序　言

本书是以清华大学工程力学系使用的《力学测量技术》讲义为基础编写的。根据几年来的教学经验，并考虑到机械、汽车、动力以及土木结构等工程专业对实验力学教材的需求，出版本书时作了相应的修改及增补。

近年来，实验力学有了很大的发展。本书作为一本基础教材，不可能包括本学科的所有内容。但是，书中所述内容，对于工程力学工作者和有关专业的工程师来说，却是必要的。

本书前六章是关于振动测量和分析的内容。一至三章介绍常用的基本振动测量工具和测量方法。在第一章中，说明了振动系统的参数以及振动量的各种表达方法。第二章主要介绍惯性式传感器的原理、构造、特性以及应用。第三章介绍各种基本振动参量的常用测量方法。这三章是振动测量的初级基础。

第四章及第五章介绍机械阻抗及模态分析的基础知识。第四章除了介绍有关机械阻抗的基本概念外，重点放在单自由度系统频响分析原理。第五章在前章的基础上介绍现代模态分析技术的理论基础和实践方法。现代模态分析技术已形成振动学科中的一个新分枝，本书四、五两章所能介绍的，仍属于必要的基础概念。但是，掌握了这些内容，就可以解决一些常见的振动分析问题，并为进一步研究模态分析问题准备了必要的基础。

第六章介绍模型理论。近年来，动态模型试验在我国有所开展，本章正是考虑这一情况而编写的。本章中的一些基

本概念，也适用于静态试验。

从第七章开始，介绍应变测量技术。不但静态试验需要测量应变，动态试验同样也少不了应变测量。本书介绍的是应变测量中应用最为广泛的电测法。

在第七章中，介绍应力、应变关系，并扼要地介绍了应变测量的其他各种方法，与电测法作了比较。第八章介绍了电阻应变计的工作原理，构造、种类、特性参数以及使用方法。第九章介绍电阻应变仪。第十章介绍静、动态应力、应变测量技术。第十一章，作为应变测量的一种扩展应用，介绍应变计式传感器的原理及特点。掌握这方面的知识有利于开阔思路并可自已动手设计必要的传感器。

参加本书编写工作的有李德葆(一至六章)、沈观林(七、九、十章)和冯仁贤(八、十一章)。由李德葆负责主编工作。本书的编写工作得到了工程力学系许多同志的热情帮助和支持。编者在此表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，本书必有许多不妥之处以至错误，恳切希望读者批评指正。

一九八四年六月十日

目 录

第一章 振动测量的一般概念……1
§1-1 振动系统的力学模型和振动参数……1
§1-2 简谐振动的表示方法……7
§1-3 周期振动的频谱表示法……11
§1-4 振动量的峰值、有效值和平均值……14
§1-5 关于振动测量的若干术语……17
§1-6 振动测量仪器的主要性能指标……19
第二章 惯性式传感器……24
§2-1 惯性式传感器的力学原理……24
§2-2 位移计型惯性式拾振器的构成特点……27
§2-3 动圈型磁电式速度拾振器……30
§2-4 加速度计的构成特点……34
§2-5 压电型加速度计及其应用问题……37
§2-6 伺服式加速度传感器……53
§2-7 关于周期信号测量中波形畸变的讨论……59
§2-8 若干其他常用传感器和测量方法……66
第三章 机械振动基本参量的常用测量方法……71
§3-1 一般应考虑的问题……71
§3-2 简谐振动频率的测量……73
§3-3 两同频简谐振动相位差的测量……78
§3-4 振动系统的固有频率的测量……87
§3-5 衰减系数及相对阻尼系数的测量……103
§3-6 质量或刚度的测量……113
§3-7 多自由度系统的固有频率、
振型及阻尼的测量……115

§3-8　周期振动的总振级的测量…………………… 124
§3-9　周期振动的频谱分析………………………… 127
第四章　频响分析的基本概念…………………………… 136
§4-1　频响分析的意义……………………………… 136
§4-2　振动系统机械阻抗的概念…………………… 138
§4-3　单自由度系统的机械阻抗和导纳…………… 148
§4-4　导纳曲线分析法原理………………………… 166
§4-5　导纳向量的矢端轨迹图分析法……………… 175
第五章　模态分析………………………………………… 190
§5-1　模态坐标与模态参量………………………… 190
§5-2　复模态的概念………………………………… 197
§5-3　频域传递函数………………………………… 205
§5-4　拉普拉斯变换………………………………… 219
§5-5　传递函数的测量及数据处理………………… 231
§5-6　参数识别：模态圆拟合法…………………… 247
§5-7　参数识别：多自由度系统传递函数
　　　曲线的拟合…………………………………… 261
§5-8　模态分析的应用举例：分块积成法………… 283
第六章　振动结构的模型理论…………………………… 289
§6-1　引言…………………………………………… 289
§6-2　量纲分析……………………………………… 291
§6-3　模型理论……………………………………… 304
第七章　应力应变测量概论……………………………… 321
§7-1　引言…………………………………………… 321
§7-2　应力应变基本概念及其关系………………… 322
§7-3　应力应变测量的各种方法及其比较………… 324
§7-4　电阻应变测量方法基本原理及优缺点……… 331

第八章　电阻应变计 ······ 334
§8-1　电阻应变计的工作原理 ······ 334
§8-2　电阻应变计的基本构造和种类 ······ 338
§8-3　电阻应变计的材料和制造工艺简介 ······ 341
§8-4　电阻应变计的工作特性及其检定 ······ 346
§8-5　电阻应变计的温度效应及其补偿 ······ 360
§8-6　电阻应变计的选用和使用方法 ······ 363
第九章　电阻应变仪 ······ 375
§9-1　测量线路概述 ······ 375
§9-2　电桥线路 ······ 377
§9-3　电阻应变仪的类型、组成和原理 ······ 392
§9-4　电阻应变仪的主要技术性能和校准 ······ 399
§9-5　电阻应变仪的使用方法和故障排除 ······ 405
第十章　静动态应力应变测量技术 ······ 409
§10-1　各种受力情况下电阻应变计的接桥方法 ······ 409
§10-2　应变计选用和布置 ······ 416
§10-3　应变花计算公式 ······ 419
§10-4　多点测量和远距离测量 ······ 424
§10-5　测量误差的分析 ······ 428
§10-6　动态应变测量技术 ······ 433
§10-7　特殊条件下电阻应变测量技术简介 ······ 442
第十一章　应变计式传感器 ······ 448
§11-1　原理和特点 ······ 448
§11-2　主要构成及其作用 ······ 449
§11-3　主要特性指标及其标定 ······ 460
§11-4　几种常用的应变计式传感器 ······ 463
主要参考文献及资料 ······ 478

第一章 振动测量的一般概念

§1-1 振动系统的力学模型和振动参数

一个实际机械或工程结构，在研究其振动特性或振动状态时，总要把它作某种简化，抽象出其主要本质，形成一个理想化的力学模型。模型的特点又往往以若干重要参数来表达。

一、单自由度系统

一个无质量的弹簧支持着一个无弹性的质量，就形成了单自由度系统的力学模型如图 1-1 。这一模型的参数便是质量 m 和刚度 k。该系统受到外界的一个初始干扰之后，便产生振动。在一个相当的短期内来研究它的振动状态时，可以认为它是一种无阻尼的自由振动。可以列出质量块的运动方程为

$$m\ddot{x}+kx=0 \tag{1-1}$$

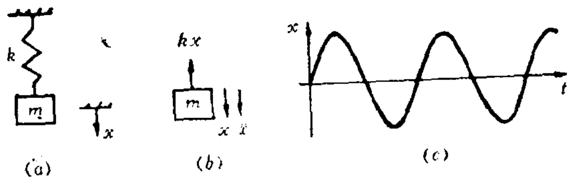

图 1-1 无阻尼单自由度系统

解上述方程时，可令 $x=X_m\sin pt$，代入原方程得

$$(k-mp^2)X_m\sin pt=0$$

上式$X_m \neq 0$，则应要求

$$k-mp^2=0 \tag{1-2}$$

由此解得

$$p=\sqrt{k/m} \tag{1-3}$$

p称为单自由度系统的无阻尼自由振动的固有频率。p是该振动系统的又一个重要参数。但它是由k和m所决定的，是一种导出参数。

无阻尼系统一但开始振动，就将永远振动下去。事实上，一切实际振动系统在开始作自由振动之后，由于摩擦等原因，振动幅度必将随时间的增长而逐渐衰减。为了反映这种衰减特性，引进了阻尼的概念。这样，系统的力学模型便如图 1-2(*a*)所示。相应地引进阻尼系数r，定义为阻尼力和运动速度之比。于是，质量块的运动微分方程变为

$$m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=0$$

或改写作

$$\ddot{x}+2\left(\frac{r}{2m}\right)\dot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+p^2x=0 \tag{1-4}$$

式中

$$n=\frac{r}{2m} \tag{1-5}$$

称为衰减系数，它由m及r所确定。

为解上述微分方程，可令

$$x=Xe^{st}$$

代入方程后可得

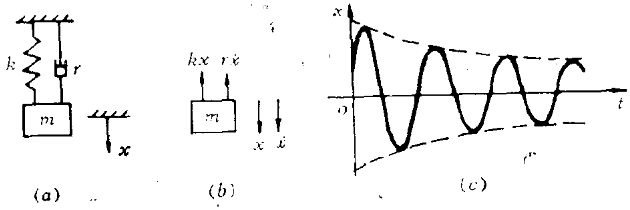

图 1-2 有阻尼的单自由度系统

$$(s^2+2n+p^2)Xe^{st}=0$$

该式有解的条件是

$$s^2+2n+p^2=0 \tag{1-6}$$

上式称为该振动系统的特征方程。该式的根 s 称为特征值。根据(1-6)可得

$$s=-n\pm\sqrt{n^2-p^2}$$

$$=-n\pm p\sqrt{\zeta^2-1} \tag{1-7}$$

式中

$$\zeta=\frac{n}{p}=\frac{r/2m}{\sqrt{k/m}}=\frac{r}{2\sqrt{mk}}=\frac{r}{r_c} \tag{1-8}$$

我们把$r_c=2\sqrt{mk}$称为临界阻尼系数，它的意义将接下来加以讨论。ζ 是 r 和 r_c 之比，因而称之为相对阻尼系数。

由(1-7)式可见，当 m 和 k 一定之后，s 值取决于ζ，即取决于 r。

当 $r<r_c$ 时，$\zeta<1$，(1-7)式变为

$$s_{1,2}=-n\pm jp\sqrt{1-\zeta^2}$$

由此可得微分方程的解为

$$x=e^{-nt}\left(X_1e^{j\sqrt{1-\zeta^2}pt}+X_2e^{-j\sqrt{1-\zeta^2}pt}\right) \tag{1-9}$$

利用欧拉(Euler)公式

$$e^{\pm j\sqrt{1-\zeta^2}pt}=\cos\sqrt{1-\zeta^2}pt\pm j\sin\sqrt{1-\zeta^2}pt$$

最后，可将(1-9)式化为

$$x=Xe^{-nt}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}pt+\alpha) \tag{1-10}$$

该式随时间变化如图 1-2(c)所示。

当 $r=r_c$ 时，$\zeta=1$，$n=p$

$$s_1=s_2=-p$$

微分方程的解则为

$$x=e^{-pt}(X_1+X_2t) \tag{1-11}$$

该式已不表示振动

而当 $r>r_c$ 时，$\sqrt{\zeta^2-1}>0$

$$x=X_1e^{(-n+\sqrt{\zeta^2-1}p)t}+X_2e^{(-n-\sqrt{\zeta^2-1}p)t} \tag{1-12}$$

显然(1-12)式也不表示振动。可见，$r=r_c$ 是系统能否实现自由振动的分界点，因而称它为临界阻尼系数。

到此为止，对于单自由度系统，我们已经引入了三个基本参数，即质量 m，刚度 k，阻尼 r。固有频率 p 由系统的 m 及 k 确定。关于阻尼，我们还引进了相对阻尼系数 ζ 的概念。临界阻尼系数 r_c 虽然具有阻尼的量纲，但并非系统实在存在的一种阻尼，它只是一种重要的参考量。至于衰减系数 n，也是一种重要的导出参数，它由基本参数 m 及 r 所决定。

二、两自由度系统

两自由度系统的力学模型如图 1-3(a)所示。先不考虑阻尼，则系统的自由振动微分方程为：

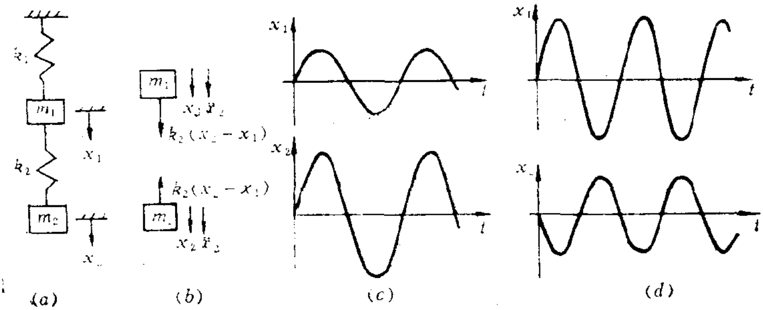

图 1-3 两自由度系统

$$
\begin{cases}
m_1\ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=0\\
m_2\ddot{x}_2-k_2x_1+k_2x_2=0
\end{cases}
$$

写成矩阵形式便是

$$
\begin{bmatrix} m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & k_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\{0\} \tag{1-13}
$$

令

$$
\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}e^{jpt} \tag{1-14}
$$

代入上式得

$$
\left(-p^2\begin{bmatrix} m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & k_2\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}e^{jpt}=
$$

$$
=\{0\} \tag{1-15}
$$

上式有解的条件是

$$\left|-p^2\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\right|=0 \tag{1-16}$$

(1-16)称为两自由度系统的特征方程，由此可解出两个特征值

$$\left.\begin{matrix} p_1^2 \\ p_2^2 \end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{k_2}{m_2}+\frac{k_1+k_2}{m_1}\right)\mp\sqrt{\left(\frac{k_2}{m_2}+\frac{k_1+k_2}{m_1}\right)^2-4\frac{k_1k_2}{m_1m_2}}\right] \tag{1-17}$$

将以上两个特征值依次代入(1-15)式，可解得

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_1=A_1\begin{Bmatrix} 1 \\ \dfrac{k_2}{k_2-p_1^2m_2} \end{Bmatrix} \tag{1-18}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_2=A_2\begin{Bmatrix} 1 \\ \dfrac{k_2}{k_2-p_2^2m_2} \end{Bmatrix} \tag{1-19}$$

式中 A_1、A_2 为两个任意常数。以上所得两个列阵依次称为 p_1^2 和 p_2^2 所对应的特征向量。

利用欧拉公式按照(1-9)到(1-10)式的处理方法，可得两种可能的固有运动状态：

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_1=\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_1\sin p_1t \tag{1-20}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_2\sin p_2t \tag{1-21}$$

可见，p_1 和 p_2 是系统的两个固有频率，而(1-18)及(1-19)式所得的两个列阵则分别是两种运动状态时的振型。在这两种自由振动状态时两质量块的振动波形如图 1-3的(c)及(d)所示。

由以上讨论可见，对于两自由度系统，有两个固有频率，对应于每一个固有频率，有各自的振型。此处引入的振型概念，反映多自由度系统振动时，各点的运动量不仅是时间的函数，而且是空间的函数。

§1-2、简谐振动的表示方法

在静态测量中，被测量无论是位移、应变或应力，它们只是位置的函数。在动态测量中，位移、速度或加速度，既是位置的函数，又是时间的函数。进行振动测量时，总要从个别点的测量开始。对于一个固定点来说，振动量便仅是时间的函数了。

最基本的振动是简谐振动，在简谐振动中，x 和 t 的关系表示为

$$x=X_m\sin\omega t$$

当然，余弦函数也是一种简谐运动，但我们在以后只运用正弦函数的表达式，若遇有余弦函数，则将其写成正弦函数的表达形式：

$$\cos\omega t=\sin(\omega t+\frac{\pi}{2})$$

一、简谐振动的向量表示法

为了研究问题的方便，有时用一个旋转矢量来代表简谐振动。例如某一简谐振动为

$$x = X_m \sin(\omega t + \alpha) \tag{1-22}$$

我们就可以用图(1-4)所示的旋转矢量 x 来表示。

$$x = X_m \angle(\omega t + \alpha) \tag{1-23}$$

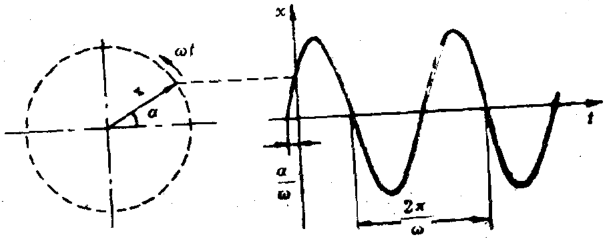

图 1-4　简谐振动的旋转矢量表示法

这意味着：以 α 为初始角而以 ω 为角速度逆时针旋转大小为 X_m 的向量在纵轴上的投影为一正弦函数。对于余弦函数，按照我们的规定，一律先化作正弦函数，然后再用向量表示。

二、简谐振动的复数表示法

在复平面上，一个复数 $\bar{x}$，可看成复平面上的一个矢量

$$\bar{x} = X_m(\cos\theta + j\sin\theta) = X_m e^{j\theta}$$

若 $\theta = \omega t + \alpha$，则上式变为

$$\begin{aligned}\bar{x} &= X_m[\cos(\omega t + \alpha) + j\sin(\omega t + \alpha)] \\ &= X_m e^{j\alpha} \cdot e^{j\omega t}\end{aligned}$$

可见，上述复数旋转矢的虚部为正弦分量。于是简谐振动

$$x = X_m \sin(\omega t + \alpha) = \mathrm{I_m}(\bar{x})$$

可用复数

$$\bar{x}=X_m e^{j\alpha}\cdot e^{j\omega t}$$

来表达(图 1-5)，它的意义是：复数 $\bar{x}$ 的虚部分量即为我们所取的简谐振动函数。

同样，根据我们的规定，对于余弦函数，须先化作正弦函数，再用复数表示。

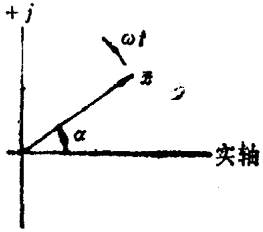

图 1-5 简谐振动的复数表示法

三、简谐振动时间波形的参量

简谐振动

$$x=X_m\sin(\omega t+\alpha) \tag{1-22}$$

它的时间波形取决于三个参数，即振幅 X_m，角速度 ω 以及初相角 α。若(1-22)式表示位移波形，那么速度和加速度波形分别为

$$v=\dot{x}=\omega X_m\cos(\omega t+\alpha)=\omega X_m\sin(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2})$$

$$=V_m\sin(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2})=V_m\sin(\omega t+\alpha')$$

$$a=\dot{v}=-\omega^2X_m\sin(\omega t+\alpha)=\omega^2X_m\sin(\omega t+\alpha+\pi)$$

$$=A_m\sin(\omega t+\alpha+\pi)=A_m\sin(\omega t+\alpha'')$$

因此，简谐振动的位移、速度、加速度的幅值之间的关系为：

$$A_m=\omega v_m=\omega^2X_m$$

或