中国科学院数学研究所专刊

甲 种　　第4号

多复变数函数论中的典型域的调和分析

修订本

华 罗 庚

科 学 出 版 社

內 容 提 要

作者自 1952 年以来在多复变数函数論方面发表过許多論文，本书包括这些論文的主要結果.

在第一章中，証明了一系列的恆等式；第二章是关于矩陣积分的計算；第三章是方陣极坐标表示法及特征流形的体积的計算；第四章是关于核函数及 Cauchy 公式；第五章是矩陣双曲空間的调和分析；第六章是对称及斜对称方陣双曲空間的調和分析；第七章是超球双曲空間的調和分析.

多复变数函数论中的典型域的调和分析

修訂本

华罗庚

*

科学出版社出版
北京朝阳門内大街 117 号
北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店經售

*

1965 年 3 月第 二 版　开本：787×1092 1/16
1965 年 3 月第三次印刷　印张：9 3/8
精装：771—3,220　插頁：3
平装：4,050—6,100　字数：160,000

統一书号：13031・2073
本社书号：3216・13—1

定价：[科七] 精装本 2.10 元 平装本 1.40 元

2k563/13

修訂本序

作者关于多个复变数的函数論的研究工作可以粗略地分为两个阶段．前一阶段是从1949年到1955年，这一阶段的工作是对典型域上的解析函数論与調和函数論进行研究．一般說来，这是一个建立基本理論的阶段．在研究过程中，我們引进和制造了一些与其它分支有关的工具——特别是代数和几何方面的工具．1955年之后，我們开始把这些基本理論用到其它方面，从而发現我們的結果和方法又反过来可用来处理其它領域中的不少問題，同时也提供新現象、新苗头；最突出的在羣表示論、偏微分方程論等方面．

出版修訂本的想法开始于这两个阶段分界的时候，由于希望多做些应用方面的工作，使得結果更完整，因而修訂本迟迟未动手，一等再等，等了七个年头，以致根据作者初步修訂計划而写的俄文譯本和英文譯本都先后出版了，而中文修訂本却由于希望更深刻些，希望更丰富些而长时期不能脫稿．

如以酉羣上的 Fourier 級数論为例，普通的 Fourier 級数是一維酉羣 $\{e^{i\theta}\}$ 上的調和分析，它的文献十分丰富．在我們获得了酉羣上的 Fourier 級数的求和方法之后，我們自然要問，普通 Fourier 級数上每条定理在一般酉羣上有沒有对应的結果？龔昇提出了“从和到核”及“从核到和”两个类型的推广方法，因而建議出很多求和方法．这些求和方法之間的相互比較、相互关系，都有待我們进一步探討．

酉羣尙且如此，就不要說酉羣之外的其它紧致羣和其它齐性紧致空間了；更不要說把作者所提出的单变数的广义函数論[9]推广到这些对象上去了．

再以偏微分方程为例，即使把我們的方法用到最簡单的場合，也可以看出其独特之处．我在中国科学技术大学講課的时候，就是运用这个方法来处理調和函数論的．这些方法的优点不仅提供了处理某些微分方程的方法，而且还引出了不少有趣的新現象和新实例．其中包括一些带蜕化面的高維橢圓型方程、空間混合型方程、偏微分方程組和积分方程等等．以混合型方程来說，我們就給出了 Лаврентьев 方程的一个新的处理方法．

根据这些情況，看来还需要較长的时間和較多的人力才能初步完成第二阶段的一些想法；另一方面，即使比較完备了，但其篇幅也必然很多倍于現在的篇幅．因此我們不得不滿足于把重点仍然放在第一阶段的工作上，而簡略地提一下其它方面．

07749

欢迎大家批評指教，欢迎青年数学工作者参加到这个研究方向中来. 由于我們在这个方向中要綜合地运用数学方面各种基本功，因而，对我們来講，是一个良好的鍛鍊园地. 青年讀者不妨先尝試一下附录 I 中所提出的練习，然后入手.

华罗庚 1964 年 6 月北京

序

本书包括了作者对多复变数函数論的一部分系統的研究，其主要部分先后（从1949年至1955年）发表在我国的“数学学报”上（一些初步报告发表在“苏联科学院报告”上）．除綜合、改組、增补、修訂的工作之外，还包括了一些新結果．

初稿曾在1955年的中国科学院第一次学部会議上书面宣讀，1956年曾在第三屆全苏数学会上宣讀．

这一系列的工作在某种意义上可以說是完整的．但是从1957年初，另外一些綫索又在开始发展，那就是与調和函数有关的、与偏微分方程有关的、与羣表示論有关的各方面，并且已經完成了若干工作．其中很大一部分是和陆启鏗同志合作的．为了将来再准备出专集，本书中将不包括与那些有关的部分．

作者尽量設法使本书自給自足，除掉羣表示論的知識以外，并不需要太多的专門知識．

作者乘此感謝陆启鏗同志，他提了很多意見，指出了不少应当改善和修正的地方．龔昇、鍾同德二位同志的意見和帮助也使本书有所改进，一并致謝．

华罗庚 1957年5月・北京

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

修訂本序 …… iii

序 …… v

导　言 …… 1

§ 1.　典型域 …… 1

§ 2.　一个域的特征流形 …… 2

§ 3.　直观推导 …… 3

§ 4.　关于所用方法的介紹 …… 5

(a) 羣表示論方面的工具 …… 5

(b) 方陣的极坐标 …… 6

(c) 积分的具体算出 …… 6

§ 5.　在羣表示論上的应用 …… 7

第一章　若干代数工具 …… 9

§ 1.1.　代数恆等式 …… 9

§ 1.2.　关于冪級数与 Fourier 級数的恆等式 …… 15

§ 1.3.　續前 …… 19

§ 1.4.　关于 $N(f_1, \cdots, f_n)$ 的若干恆等式 …… 24

§ 1.5.　关于特征的恆等式 …… 25

第二章　計算若干积分 …… 27

§ 2.1.　与反正切函数相仿的一些积分 …… 27

§ 2.2.　矩陣双曲空間的总体积 …… 33

§ 2.3.　对称方陣双曲空間的总体积 …… 35

§ 2.4.　斜对称方陣双曲空間的总体积 …… 38

§ 2.5.　超球双曲空間的总体积 …… 40

第三章　方陣的极坐标 …… 43

§ 3.1.　酉积分元素 …… 43

§ 3.2.　酉羣的傍系的积分 …… 45

§ 3.3.　爱尔米方陣的极坐标 …… 47

§ 3. 4.　方陣的极坐标……48
§ 3. 5.　对称方陣的极坐标……52
§ 3. 6.　斜对称方陣的极坐标……56
§ 3. 7.　实正交羣的体积及其一个应用……60
第四章　若干一般性的定理及其应用……65
§ 4. 1.　引言……65
§ 4. 2.　核函数……67
§ 4. 3.　典型域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$, $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$ 的核函数……69
§ 4. 4.　域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ 的核函数……72
§ 4. 5.　Cauchy 核……75
§ 4. 6.　Cauchy 公式……76
§ 4. 7.　典型域的 Cauchy 核……78
§ 4. 8.　Poisson 核……82
第五章　矩陣双曲空間的調和分析……84
§ 5. 1.　矩陣双曲空間的正交系……84
§ 5. 2.　类函数的积分……86
§ 5. 3.　續前……88
§ 5. 4.　核函数……91
§ 5. 5.　特征流形上的調和分析……92
§ 5. 6.　Cauchy 型积分……95
§ 5. 7.　微分算子……97
§ 5. 8.　$\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 边界上 Laplace 算子的意义……98
§ 5. 9.　Poisson 积分在边界上的性質……100
§ 5. 10.　$\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 域的 Dirichlet 問題的解答……103
§ 5. 11.　調和函数的基底……105
§ 5. 12.　酉羣上 Fourier 級数的 Abel 求和……106
第六章　对称及斜对称方陣双曲空間的調和分析……109
§ 6. 1.　对称酉方陣上的正交系……109
§ 6. 2.　核的在子空間中的投影……110
§ 6. 3.　$\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ 的正常正交函数系……114

§6.4. 斜对称空間的特征流形……115
第七章 超球双曲空間的調和分析……117
§7.1. 超球多項式……117
§7.2. 球面上的調和分析……120
§7.3. 核在子空間的投影……121
§7.4. 特征流形上的正交系……123
§7.5. $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ 的正常正交完整系……125
§7.6. 化重积分为单积分……127
§7.7. (7.6.3)式的另一形式……130
§7.8. (7.7.5)的証明……131
附录一 一些等式……136
附录二 矩陣坐标变换公式……140
参考文献……142

导　　言

§1. 典　型　域

本文中所討論的典型域是指以下的四种域:

第一种是m行n列的矩陣双曲空間,今后以$\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$表示. 它是由$m$行$n$列的复元素矩陣$Z$之适合于条件

$$I^{(m)} - Z\bar{Z}' > 0$$

者所組成, 此处$I^{(m)}$表示m行列的单位方陣, $\bar{Z}'$表示由Z行列互換并取共軛复数所得出的矩陣,因此它是n行m列的. 如果H是一个 Hermite 方陣, 則以$H > 0$表示H是定正的.

第二种是n行列的对称方陣的双曲空間, 今后以$\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$表示. 它是由$n$行列的复元素对称方陣$Z$之适合于条件

$$I^{(n)} - Z\bar{Z} > 0$$

者所組成.

第三种是n行列的斜对称方陣的双曲空間, 今后以$\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$表示. 它是由$n$行列的复元素斜对称方陣$Z$之适合于条件

$$I^{(n)} + Z\bar{Z} > 0$$

者所組成.

第四种可以称为 Lie 球双曲空間, 今后以$\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$表示. 它是由$n(>2)$維复元素矢量$z(=(z_1,\cdots,z_n))$之适合于諸条件

$$|zz'|^2 + 1 - 2\bar{z}z' > 0$$

及

$$|zz'| < 1$$

者所組成.

这四种域的維数(复数維)各为mn, $\frac{1}{2}n(n+1)$, $\frac{1}{2}n(n-1)$及n. 作者曾經証明(华罗庚[3]),最后一种, 也可以表成为$2 \times n$实元素矩陣的双曲空間. 因此这四种域都可以归入作者所研究过的矩陣几何的范畴之中.

1935 年 E. Cartan [1] 曾經算出: 可遞的不可分解的圓对称域仅有六种可能性. 除以上的四种之外还有两种, 其一是 16 維的某一种空間, 另一是 27 維的某一种空

間．从維数可以看出这两种域是异常特殊的．后經 A. Borel [1] 指出，具体有效地定出这两种域还是問題．因此一般說来，以上所提出的四种域在具体地研究多变数函数論时，是有它的特殊重要意义的，于是仿典型羣的名称我們称它們为典型域．本文的目的就在于具体地研究这些典型域的調和分析問題．

§2. 一个域的特征流形

命 $\mathfrak{R}$ 表示由 n 个复变数 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 所形成的 $2n$ 維欧氏空間的一个有界单連通域，我們已知 $\mathfrak{R}$ 中的一个 $\mathfrak{R}$ 內解析函数 $f(z)$ 一定在 $\mathfrak{R}$ 的边界上取最大絕对值．命 $\mathfrak{L}$ 表 $\mathfrak{R}$ 的边界上具有以下性质的一部分：(i) 凡 $\mathfrak{R}$ 內解析的函数一定在 $\mathfrak{L}$ 上取最大絕对值；(ii) 对 $\mathfrak{L}$ 上的任一点 ξ，我們可以找到一个 $\mathfrak{R}$ 上的解析函数 $f(z)$ 在此点取最大絕对值．这样的流形 $\mathfrak{L}$ 称为域 $\mathfrak{R}$ 的特征流形．有时 $\mathfrak{L}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的边界的全部，一般来說，是它的一部分，甚至 $\mathfrak{L}$ 的維数可以大大地低于 $2n-1$．显然 $\mathfrak{L}$ 是唯一决定的．不难証明，$\mathfrak{L}$ 是一紧致流形，并且如果函数 $f(z)$ 在 $\mathfrak{L}$ 已知，在 $\mathfrak{L}$ 上每点附近解析，則这函数就唯一决定了．由此推得流形 $\mathfrak{L}$ 的实維数 $\geqslant n$．我們以 ξ 表 $\mathfrak{L}$ 上的变数，并以 $d\xi\,\overline{d\xi}'$ 及 $\dot{\xi}$ 分別表示流形 $\mathfrak{L}$ 上的微分度量与体积元素．值得一提的是，如果我們把 (i),(ii) 中的解析函数換为綫性函数，那么 $\mathfrak{L}$ 的定义似乎仍然一样．

四类典型域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$, $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$, $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ 的特征流形 $\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{L}_{\mathrm{II}}$, $\mathfrak{L}_{\mathrm{III}}$, $\mathfrak{L}_{\mathrm{IV}}$ 各为

1. $\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}$ 是由适合于

$$U\overline{U}'=I$$

的所有 $m\times n$ 矩陣 U 所形成的；特别，当 $m=n$ 时，$\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}$ 就是所有的酉方陣；

2. $\mathfrak{L}_{\mathrm{II}}$ 是由所有 n 行列对称酉方陣所形成的；

3. $\mathfrak{L}_{\mathrm{III}}$ 的定义随 n 为奇或为偶而有所不同．对偶数 n，它是由所有的 n 行列斜对称酉方陣所形成的；对奇数 n，它是由形如

$$UDU'$$

的方陣所形成的，这儿 U 过所有的酉方陣，而

$$D=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\dot{+}\cdots\dot{+}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\dot{+}0;$$

4. $\mathfrak{L}_{\mathrm{IV}}$ 是由以下的矢量

$$e^{i\theta}x$$

所形成的，这儿

$$0\leqslant\theta\leqslant\pi,\qquad xx'=1.$$

他們的实維数各为 $n^2-(n-m)^2=n(2n-m)$, $\frac{1}{2}n(n+1)$, $\frac{1}{2}n(n-1)+\frac{1}{2}(1+(-1)^{n-1})(n-1)$ 及 n.

这些特征流形都是齐性空間. 更确切些, $\mathfrak{L}$ 上的一点可由 $\mathfrak{R}$ 內某点的稳定羣变为 $\mathfrak{L}$ 上的任一点. 齐性空間的調和分析的一般理論已經由 E. Cartan[1], H. Weyl[1] 及 A. Weil[1] 研究过,但本节中的方法却給出比已知結果更完善、更明确的結果.

§3. 直观推导

(所謂直观推导,是指暫且不管严格性,先計算出一批結果来,作为我們进一步严格处理的根据,如先不管級数及积分的收斂性等.)

假定 $\mathfrak{R}$ 內有一个解析函数系

$$\{\varphi_\nu(z)\},\qquad \nu=0,1,2,\cdots,$$

使 $\mathfrak{R}$ 中每一解析函数 $f(z)$ 都可以表为 $\mathfrak{R}$ 內的收斂級数

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\varphi_\nu(z).$$

我們作两个无穷維的 Hermite 方陣

$$H_1=\left(\int_{\mathfrak{L}}\varphi_\nu(\xi)\overline{\varphi_\mu(\xi)}\,\dot{\xi}\right)_{\nu,\mu=0,1,2,\cdots}$$

及

$$H_2=\left(\int_{\mathfrak{R}}\varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\mu(z)}\,\dot{z}\right)_{\nu,\mu=0,1,2,\cdots}.$$

这两个方陣能够正交正常化,使得

$$\int_{\mathfrak{L}}\varphi_\nu(\xi)\overline{\varphi_\mu(\xi)}\dot{\xi}=\delta_{\nu\mu}$$

及

$$\int_{\mathfrak{R}}\varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\mu(z)}\,\dot{z}=\lambda_\nu\delta_{\nu\mu}.$$

这些特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 称为解析不变量,即它們不依賴于基底 $\{\varphi_\nu(z)\}$ 的选择,而且如果有一解析变换把 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{L}$ 变为 $\mathfrak{R}_1$ 与 $\mathfrak{L}_1$, 則 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\cdots$ 是不变的.

对一完全圓形域来說,这一函数系的存在是有保証的 (H. Cartan[1]).

我們定义

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(w)}}{\lambda_\nu}=K(z,\bar{w}),$$

这就是 $\mathfrak{R}$ 域的 Bergmann 核. 它有重現性質, 即对 $\mathfrak{R}$ 內任一解析函数 $f(z)$ 常有

$$f(z)=\int_{\mathfrak{R}}K(z,\bar{w})f(w)\dot{w}.$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

我們再定义

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(\xi)}=H(z,\bar{\xi})$$

为 $\mathfrak{R}$ 域的 Cauchy 核. 函数系 $\{\varphi_\nu(\xi)\}$ 在 $\mathfrak{L}$ 上的連續函数所成的空間是不完整的，它也有重現性質：如果 $f(z)$ 是 $\mathfrak{R}$ 內任一解析函数，而且在 $\mathfrak{L}$ 上有展式

$$f(\xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\,\varphi_\nu(\xi),$$

則得

$$f(z)=\int_{\mathfrak{L}}H(z,\bar{\xi})f(\xi)\dot{\xi}.$$

再命

$$f(z)=u(z)H(z,\bar{w}),$$

則得

$$u(z)=\int_{\mathfrak{L}}\frac{H(z,\bar{\xi})\,H(\xi,\bar{w})}{H(z,\bar{w})}u(\xi)\dot{\xi}.$$

我們定义

$$P(z,\xi)=\frac{H(z,\bar{\xi})\,H(\xi,\bar{z})}{H(z,\bar{z})}$$

为域 $\mathfrak{R}$ 的 Poisson 核，这核是定正的.

我們把函数系

$$\{\varphi_\nu(\xi)\}_{\nu=0,1,2,\cdots}$$

扩充成为一个 $\mathfrak{L}$ 上的正交正常完备系

$$\{\varphi_\nu(\xi)\}_{\nu=0,\pm1,\pm2,\cdots},$$

把 $P(z,\xi)$ 展为 $\varphi_\nu(\xi)$ 的 Fourier 級数，即

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\Phi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(\xi)},\quad \Phi_\nu(z)=\int_{\mathfrak{L}}P(z,\xi)\varphi_\nu(\xi)\dot{\xi}.$$

如果我們有

$$\lim_{z\to\xi}\Phi_\nu(z)=\varphi_\nu(\xi),$$

則对 $\mathfrak{L}$ 上的任一有 Fourier 展式

$$\varphi(\xi)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}c_\nu\varphi_\nu(\xi),\qquad c_\nu=\frac{1}{V(\mathfrak{L})}\int_{\mathfrak{L}}\varphi(\xi)\overline{\varphi_\nu(\xi)}\dot{\xi}$$

的函数$\left(\text{此处 } V(\mathfrak{L})=\int_{\mathfrak{L}}\dot{\xi}\right)$，我們有一函数类

$$\Phi(z)=\int_{\mathfrak{L}}P(z,\xi)\;\varphi(\xi)\dot{\xi}=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}c_\nu\,\Phi(z).$$

我們定义这样的函数是域 $\mathfrak{R}$ 的調和函数.

通常的調和函数是由二阶偏微分方程定义的，我們也有以下的直算法. 从 Bergmann 的核我們可以定义域 $\mathfrak{R}$ 的 Riemann 度量

$$d\bar{d}\log K(z,\bar{z}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}\log K(z,\bar{z})dz_i\,d\bar{z}_j = \sum_{i,j=1}^{n}h_{ij}\,dz_i\,d\bar{z}_j,$$

它对应的逆变张量

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h^{ij}\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}$$

是这个空間的 Laplace 算子. 于是我們也有其对应的 Dirichlet 問題等等.

在引进合适的条件之下，以上的直算法是可以严格化的. 本书的絕大部分就是在典型域中把这些結果更具体化及严格地表达出来.

§4. 关于所用方法的介紹

(a) 羣表示論方面的工具. 已知这四类典型域都是完整圓型域. 对于一个完整圓型域,我們可以做包含它的原点的稳定羣,这个羣是由綫性变换

$$W = zU$$

形成的,这儿 U 是酉方陣. 这个羣以 Γ_0 表之. 所有由 $z_1, \cdots, z_n$ 形成的单項式成为 $\mathfrak{R}$ 域的解析函数的一个基底. 不同次数的多項式都相互正交，所以我們的主題是把同一方次的多項式分解为互相正交正常的系. 更确切些,命 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 及 $z^{[l]}$ 表示由支量

$$z_1^{l_1}\cdots z_n^{l_n}\sqrt{\frac{l!}{l_1!\cdots l_n!}}, \qquad l = l_1+\cdots+l_n$$

形成的矢量,这是一个

$$\frac{1}{l!}n(n+1)\cdots(n+l-1)$$

維的矢量. 当 $W = zU$ 时,我們得出一个变换

$$W^{[l]} = z^{[l]}U^{[l]},$$

这儿 $U^{[l]}$ 表示方陣 U 的 Kronecher 冪积. 为了找出 $z^{[l]}$ 的正交支量，必須把 $U^{[l]}$ 分解为不可分解的子方陣的直和. 这建議了綫性羣表示論中的以下一些問題.

从 n 行列的一般綫性羣 GL_n 出发,命 $f_1, \cdots, f_n$ 代表 n 个整数,并适合于

$$f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_n \geqslant 0.$$

对 GL_n 中的一个元素 X,在 GL_n 的标签为 $(f_1, \cdots, f_n)$ 的表示法中,有对应元素

$$A_{f_1,\cdots,f_n}(X),$$

乇的行列数通常用 $N(f_1, \cdots, f_n)$ 表示. 我們已經知道，乇是一个不可分解的表示法. 如又有一个羣 GL_N 的表示法

$$B_{g_1,\cdots,g_N}(Y),$$

显然

$$B_{g_1,\cdots,g_N}(A_{f_1,\cdots,f_n}(X))$$

仍然是 GL_n 的一种表示法. 我們現在所提的間題是以上的羣表示可以分解为那些不可分解的直和. 这个一般性的間題本身是一个有趣的代数間題，本文中未能完全地解决乇. 但侥倖的是本文所用到的一些特例1) 确已完滿地解决了.

(b) 方陣的极坐标. 在运用羣表示的方法获得了正交系之后，我們又遇到另一个困难間題，就是具体地算出正常化系数的間題（对 $\mathfrak{L}$ 的間題比对 $\mathfrak{R}$ 的間題容易些). 为了这个目的，在进行具体計算时，引进了一个工具，我們称乇为方陣的极坐标. 例如，我們已知任意一个 n 阶的复元素的对称方陣 Z 可以表成为

$$Z = U\Lambda U'$$

（华罗庚[1]），此处 U 表示酉方陣，Λ 表示对角綫方陣，其对角綫上的元素是 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，且适合于 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$. 命 $\{\mathfrak{U}\}$ 表酉羣对其子羣 $[\pm 1, \cdots, \pm 1]$ 的傍系，則一般說来，一对称方陣 Z 与 $\{\mathfrak{U}\}$ 中的一元素及一个 Λ 是一一对应的. 这方陣 Λ 可以称为 Z 的向径部分，而 U 可以称为輻角部分. 关于由 Z 到乇的极坐标之間的具体計算关系（如函数行列式等），在本文中都已算出. 本文中并列出若干虽与本文主題无直接关系但属于同一范畴的一些与矩陣极坐标有关的运算.

(c) 积分的具体算出. 一些积分的具体算出也是本文中的一个环节，例如我們算出了所有的四种域的欧几里得体积，这些公式不在緒言中一一枚举. 但我們必須提出其中的一个，即我們算出了：当 $\alpha > -1, \alpha + \beta > -n$ 时，

$$\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}} \left(1 - \bar{z}z' - \sqrt{(\bar{z}z')^2 - |zz'|^2}\right)^{\alpha} \left(1 - \bar{z}z' + \sqrt{(\bar{z}z')^2 - |zz'|^2}\right)^{\beta} \dot{z} = \frac{\pi^n \Gamma(\alpha+1)}{2^{n-1}(\alpha+\beta+n)\Gamma(\alpha+n)}.$$

从这一积分可以得到：当 $\lambda < 1$ 时，

$$\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}} (1 - 2\bar{z}z' + |zz'|^2)^{-\lambda}\, \dot{z} = \frac{\pi^n \Gamma(1-\lambda)}{2^{n-1}(n-2\lambda)\Gamma(n-\lambda)}.$$

这解决了作者在 1946 年提出的一个間題，即在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ 域中 Poincaré 級数的收斂指数

1) 在作者获得这些结果以后，段学复教授指出，Thrall (Thrall[1]) 也曾得出这一结果，但他所用的方法与本书中所用的方法完全不同，特此致谢.

$\geqslant 1 - \dfrac{1}{n}$,并且这是最好的結果.

§5. 在羣表示論上的应用

以上几节曾說明过，我們把羣表示論作为工具来研究多复变函数論. 現在又反过来把我們获得的結論用到羣表示論上去,从而得到一些深刻的結果.

我們把 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m = n)$ 上的調和函数說得更詳細些. $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 的 Laplace 方程是

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{n}\left(\delta_{\alpha\beta} - \sum_{l=1}^{n} z_{l\alpha}\bar{z}_{l\beta}\right)\left(\delta_{jk} - \sum_{\gamma=1}^{n}\bar{z}_{j\gamma}z_{k\gamma}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial z_{j\alpha}\partial\bar{z}_{k\beta}} = 0.$$

在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 的閉包上适合这个微分方程的函数 $u(Z)$ 称为 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 的調和函数. 在 $\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}$ 有連續边界值的函数成一函数类,以 $\mathfrak{E}$ 表之. $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 上的 Dirichlet 問題的解答如下($\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}$就是酉羣):

在酉羣 $\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}$ 上給一个連續函数 $\varphi(U)$, 有一个而且只有一个調和函数, 由 Poisson 公式

$$u(Z) = \frac{1}{V(\mathfrak{L})}\int_{\mathfrak{L}} \frac{\det(I - Z\bar{Z}')^n}{|\det(I - Z\bar{U}')|^{2n}}\varphi(U)\dot{U}$$

給出,而且

$$\lim_{z\to U} u(Z) = \varphi(U).$$

Poisson 核

$$\frac{1}{V(\mathfrak{L})}\ \frac{\det(I - Z\bar{Z}')^n}{|\det(I - Z\bar{U}')|^{2n}}$$

的展开式如下: 命

$$A_{f_1,\cdots,f_n}(U) = (a_{ij}^{f}(U))_{1\leqslant i,j\leqslant N(f)}.$$

函数系

$$\varphi_{ij}^{f}(U) = \sqrt{\frac{N(f)}{V(\mathfrak{L})}}\, a_{ij}^{f}(U), \qquad i, j = 1, 2, \cdots, N(f),$$
$$+\infty > f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_n > -\infty$$

成一酉羣上的正常正交系. Poisson 核可以写成为

$$\sum_{f}\sum_{i,j}\Phi_{ij}^{f}(Z)\overline{\varphi_{ij}^{f}(U)},$$

而且

$$\lim_{z\to U}\Phi_{ij}^{f}(Z) = \varphi_{ij}^{f}(U).$$

对任一連續函数 $\varphi(U)$, 我們有一 Fourier 級数

$$\sum_{f}\sum_{i,j} C_{ij}^{f}\varphi_{ij}^{f}(U), \qquad C_{ij}^{f} = \frac{1}{V(\mathfrak{L})}\int_{\mathfrak{L}}\varphi(U)\overline{\varphi_{ij}^{f}(U)}\dot{U}.$$

但这級数可能是不收歛的,或者不收歛于 $\varphi(U)$, 我們有

$$\varphi(U)=\lim_{z\to U}\sum_{f}\sum_{ij}C_{ij}^{f}\varphi_{ij}^{f}(Z).$$

乜可以定义为以上的 Fourier 級数的 Abel 和, 因此,我們有以下的定理: 酉羣上連續函数的 Fourier 級数可以 A 求和收歛于这个函数.

因此推出任意有限紧致羣上的逼近定理及齐性空間的逼近定理. 这些結果显然比以前的結果明确 (Peter-Weyl[1], Weyl[1]).

我們再加几个附記:

可以闡明, 以往所提的 $\mathfrak{E}$ 的調和函数也适合于 n^2 个偏微分方程的一个方程組:

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(\delta_{\alpha\beta}-\sum_{k=1}^{n}\bar{z}_{k\alpha}z_{k\beta}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\bar{z}_{i\alpha}\partial z_{j\beta}}=0,\quad 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

这是一个珍异現象.这建議有时一个偏微分方程的解一定可以适合一組偏微分方程.

又級数

$$\sum_{f}\sum_{i,j}c_{ij}^{f}\varphi_{ij}^{f}(Z)$$

的收歛范围有时可能并不限于 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 之中. 如果在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 之外有一部分收歛, 該处 Laplace 方程不是椭圓型的,則这个級数就成为一个混合型偏微分方程的解了.

第一章

若干代数工具

§1.1. 代数恆等式

假定 $n \geqslant 2$, 命

$$D(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j).$$

定理 1.1.1. 我們有恆等式

$$\sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n} \delta_{i_1, \cdots, i_n}^{1, \cdots, n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \cdots x_{i_{n-1}}^1}{(1 - x_{i_1}^2)(1 - x_{i_1}^2 x_{i_2}^2) \cdots (1 - x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \cdots x_{i_n}^2)}$$
$$= \frac{D(x_1, \cdots, x_n)}{\prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (1 - x_i x_j)}, \tag{1.1.1}$$

此处 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 乃由 $1, 2, \cdots, n$ 之排列而得. 若 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的偶排列, 則 $\delta_{i_1, i_2, \cdots, i_n}^{1, 2, \cdots, n} = 1$; 若是奇排列, 則 $\delta_{i_1, i_2, \cdots, i_n}^{1, 2, \cdots, n} = -1$.

定理 1.1.2. 命 $v = \left[\frac{1}{2} n\right]$, 我們有恆等式

$$\sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n} \delta_{i_1, \cdots, i_n}^{1, \cdots, n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \cdots x_{i_{n-1}}^1}{(1 - x_{i_1} x_{i_2})(1 - x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}) \cdots (1 - x_{i_1} \cdots x_{i_{2v}})}$$
$$= \frac{D(x_1, \cdots, x_n)}{\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (1 - x_i x_j)}. \tag{1.1.2}$$

在証明以上两个代数恆等式的时候, 我們需要一些与 Vandermonde 行列式有关的不难証明的結果. 习知

$$D(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (-1)^{\frac{1}{2} n(n-1)} \begin{vmatrix} 1, & 1, & \cdots, & 1 \\ x_1, & x_2, & \cdots, & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1}, & x_2^{n-1}, & \cdots, & x_n^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{1.1.3}$$

命 $D_i = D(x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \cdots, x_n)$, 不难証明

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^l D_i = \begin{cases} D(x_1, \cdots, x_n), & \text{若 } l = 0, \\ 0, & \text{若 } 1 \leqslant l \leqslant n - 1, \\ (-1)^{n-1} D(x_1, \cdots, x_n) x_1 \cdots x_n, & \text{若 } l = n. \end{cases} \tag{1.1.4}$$

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com