高等数学教学参考书

高等数学习题解

下册

辽宁人民出版社

015-744

高等数学教学参考书

高等数学习题解

下　册

蒋众益　高福岐
蒋非非　周国煜　演　算

辽宁人民出版社
一九八二年·沈阳

1977.

高等数学教学参考书
高等数学习题解
（下册）
蒋众益　高福岐
蒋非非　周国煜　演算
*
辽宁人民出版社出版
（沈阳市南京街6段1里2号）
辽宁省新华书店发行
沈阳新华印刷厂印刷
*
开本：787×1092 1/32　印张：19½　插页：2
字数：451,000　印数：1—47,000
1982年6月第1版　1982年6月第1次印刷
统一书号：7090·156　定价：2.10元

内 容 提 要

同济大学数学教研室编写的《高等数学习题集》（1956年修订），出版以来深受读者欢迎。该书概念准确，理论清晰，内容严谨，形式多样，有巩固性的习题，又有启发性的参考题。这是与樊映川等同志编写的《高等数学讲义》相配套的一本高等学校辅助教材。根据读者需要，将其全部二八二九道习题，一一做了演算。为了照顾自学数学青年的具体困难，又适当注意了它的详尽性。现分上、下两册同时出版，仅供读者参考。

6:2

编　数学分析

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第二编　数学分析

第十八章　级　　数

在题18·1—18·7中，写出已给级数的前五项：

18·1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

解： $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots$.

18·2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$.

解： $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1}{9\cdot 2^9}+\cdots$.

18·3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$.

解：

$$\frac{1+1}{1+1^2}+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\frac{1+4}{1+4^2}+\frac{1+5}{1+5^2}+\cdots.$$

18·4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

解：$\frac{1!}{1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\frac{5!}{5^5}+\cdots$。

18·5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$。

解：$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$。

18·6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots2n}$。

解：$\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}+\cdots$。

18·7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$。

解：$\frac{1}{\sqrt{1\cdot2}}-\frac{1}{\sqrt{2\cdot3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot4}}-\frac{1}{\sqrt{4\cdot5}}+\frac{1}{\sqrt{5\cdot6}}-\cdots$。

在题18·8—18·17中，写出已给级数的一般项：

18·8. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$。

解：$u_n=\frac{1}{2n-1}$。

18·9. $\frac{1}{2\ln2}+\frac{1}{3\ln3}+\frac{1}{4\ln4}+\cdots$。

解：$u_n=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$。

18·10. $\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{6}{5}-\cdots$.

解：$u_n=\frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n}$.

18·11. $-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{3}{6}+\cdots$.

解：$u_n=\frac{n-2}{n+1}$.

18·12. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\cdots$.

解：$u_n=\frac{n}{n^2+1}$.

18·13. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots$.

解：$u_n=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$.

18·14. $1+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}+\cdots$.

解：$u_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}$.

18·15. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}+\cdots$.

解：$u_n=\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}$.

18·16. $\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{x}{2\cdot4}+\frac{x\sqrt{x}}{2\cdot4\cdot6}+\frac{x^2}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots$。

解：$u_n=\frac{x^{\frac{n}{2}}}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$

18·17. $\frac{a^2}{3}-\frac{a^3}{5}+\frac{a^4}{7}-\frac{a^5}{9}+\cdots$。

解：$u_n=(-1)^{n+1}\frac{a^{n+1}}{2n+1}$。

在题18·18—18·32中，利用几何级数、调和级数的敛散性，以及无穷级数的基本性质，判定已给级数的敛散性：

18·18. $-\frac{8}{9}+\frac{8^2}{9^2}-\frac{8^3}{9^3}+\cdots$。

解：所给级数是等比级数，公比的绝对值

$$|q|=\left|-\frac{8}{9}\right|=\frac{8}{9}<1,$$

所以该级数收敛。

18·19. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\cdots$。

解：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 所以级数是发散的。

18·20. $\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\cdots$。

解：$u_n=\frac{1}{\sqrt[n]{3}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{3}}=1$。 根据级数收敛的必要条件，原级数是发

散的。

18·21. $1!+2!+3!+4!+\cdots$。

解：$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty} n!=+\infty$。

所以，级数是发散的。

18·22. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$。

解：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$。

所以，级数是发散的。

18·23. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\cdots$。

解：$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$。

所以，级数是发散的。

18·24. $\frac{3}{2}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+\cdots$。

解：这一级数是等比级数，公比 $q=\frac{3}{2}>1$。所以，它是发散的。

18·25. $\frac{1}{11}+\frac{2}{12}+\frac{3}{13}+\cdots$。

解：$u_n=\frac{n}{n+10}\longrightarrow 1\ (n\to\infty)$.所以，级数是发散的。

18·26. $\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln^2 2}{2^2}+\frac{\ln^3 2}{2^3}+\cdots$。

解：这一级数是等比级数，公比的绝对值

$$|q| = \frac{\ln 2}{2} < 1$$

所以，级数是收敛的.

18·27. $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \cdots$.

解：$u_n = \frac{n}{2n-1} \longrightarrow \frac{1}{2}$ $(n \to \infty)$ 所以，级数是发散的.

18·28. $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots$.

解：这一级数是调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

去掉前三项所得到的. 一个级数去掉它前面的若干项不影响其敛散性. 所以，这一级数是发散的.

18·29. $2 + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \cdots$.

解：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

所以，级数是发散的.

18·30. $\left(\frac{1}{6} + \frac{8}{9}\right) + \left(\frac{1}{6^2} + \frac{8^2}{9^2}\right) + \left(\frac{1}{6^3} + \frac{8^3}{9^3}\right) + \cdots$.

解：级数是由收敛级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n}$与$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n$逐项相加所得到的，所以它是收敛的.

18·31. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \cdots$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

解：级数是由收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 逐项相加所得到的，所以它是收敛的。

18·32. $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10\cdot n}+\cdots$。

解：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$是收敛的，但级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10\cdot n}$是发散的，原级数是由这两个级数逐项相加所得到的，所以，它是发散的。

在题18·33—18·40中，根据级数收敛的定义判定已给级数的敛散性：

18·33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$。

解：$S_n=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$$=\sqrt{n+1}-1$$

$\therefore \quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$

所以，原级数是发散的。

18·34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[2n+1]{a}-\sqrt[2n-1]{a})$，其中 $a>0$。

解：$S_n=(\sqrt[3]{a}-a)+(\sqrt[5]{a}-\sqrt[3]{a})$

$$+\cdots+(\sqrt[2n+1]{a}-\sqrt[2n-1]{a})=\sqrt[2n+1]{a}-a$$

$\therefore \quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[2n+1]{a}-a)=1-a$。

所以，级数是收敛的。

18·35. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$。

解：$S_n=(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)+(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$+(\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

$$=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{2}+1\longrightarrow 1-\sqrt{2}\ (n\to\infty)$$

所以，级数收敛。

18·36. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$。

解：$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}\longrightarrow 1\quad(n\to\infty)$$

所以，级数是收敛的。

18·37. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$。

解：$u_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

因此，

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\longrightarrow\frac{1}{2}\quad(n\to\infty)$$

级数收敛。

18·38. $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$.

解：$u_n=\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)$.

$$S_n=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)\longrightarrow\frac{1}{5}\quad(n\to\infty)$$

所以级数收敛。

18·39. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots$.

解：$u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right),$$

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\longrightarrow\frac{1}{4}\quad(n\to\infty)$$

∴ 级数收敛。

18·40. $\sin\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{6}+\cdots$。

解：$2\sin\dfrac{\pi}{12}\sin\dfrac{n\pi}{6}=\cos\dfrac{(2n-1)\pi}{12}-\cos\dfrac{(2n+1)\pi}{12}$.

$$2\sin\frac{\pi}{12}\cdot S_n=\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{(2n+1)\pi}{12}$$

$$S_n=\frac{\cos\dfrac{\pi}{12}-\cos\dfrac{(2n+1)\pi}{12}}{2\sin\dfrac{\pi}{12}}.$$

因此，当 $n\to\infty$时，S_n的极限不存在，所以级数发散。

在题18·41—18·49中，利用比较判定法，判定已给级数的敛散性：

18·41. $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\cdots$。

解：$u_n=\dfrac{1}{2n-1}>\dfrac{1}{2n}$，但级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$发散，所以原级数发散。

18·42. $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\cdots$。

解：$u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}<\dfrac{1}{n^2}$，但级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛，所以原级数收敛。

18·43. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{17}+\cdots$。

解：$u_n=\dfrac{1}{n^2+1}<\dfrac{1}{n^2}$原级数收敛。

18·44. $1+\dfrac{1+2}{1+2^2}+\dfrac{1+3}{1+3^2}+\cdots$。

解：$u_n=\dfrac{1+n}{1+n^2}\geqslant\dfrac{1+n}{n+n^2}=\dfrac{1}{n}$，所以原级数发散。

18·45. $1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}+\cdots+\dfrac{n}{2n-1}+\cdots$。

解：由$u_n=\dfrac{n}{2n-1}>\dfrac{n}{2n}=\dfrac{1}{2}$，所以原级数发散。

18·46. $\dfrac{1}{2\cdot5}+\dfrac{1}{3\cdot6}+\cdots+\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots$。

解：$u_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}<\dfrac{1}{(n+1)^2}$，但级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}$收敛，所以原级数收敛。

18·47. $1+\dfrac{2!}{2^2}+\dfrac{3!}{3^3}+\dfrac{4!}{4^4}+\cdots+\dfrac{n!}{n^n}+\cdots$。

解：$u_n=\dfrac{n!}{n^n}=\dfrac{n(n-1)\cdots2\cdot1}{n\cdot n\cdots n\cdot n}\leqslant\dfrac{2\cdot1}{n\cdot n}=\dfrac{2}{n^2}$，但级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^2}$收敛，所以原级数收敛。

18·48. $\sin\dfrac{\pi}{2}+\sin\dfrac{\pi}{2^2}+\sin\dfrac{\pi}{2^3}+\cdots$。

解：由于 $|\sin x| \leqslant |x|$，所以 $u_n=\sin\frac{\pi}{2^n}<\frac{\pi}{2^n}$， 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$ 是公比的绝对值小于 1 的等比级数，它是收敛的，因此，原级数收敛。

18·49. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$，设 $a>0$。

解：当 $0<a\leqslant 1$ 时，

$u_n=\frac{1}{1+a^n}\geqslant\frac{1}{1+1^n}=\frac{1}{2}$，所以原级数发散。

当 $a>1$ 时，

$u_n=\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$，因 $a>1$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n$ 是收敛的，所以原级数收敛。

在题18·50—18·57中，利用比值判定法，判定已给级数的敛散性：

18·50. $\frac{3}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{6}{2^4}+\cdots$。

解：$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}}{\frac{n+2}{2^n}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+3}{n+2},$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+3}{n+2}=\frac{1}{2}$$

所给级数收敛。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com