高等学校
小学教育
专业教材

数学分析

（下册）

主编　吴顺唐

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析. 下册/吴顺唐主编;刘东等编写. --南京:南京大学出版社,2000. 4

ISBN 7-305-03441-X

Ⅰ. 数... Ⅱ. ①吴... ②刘... Ⅲ. 数学分析 Ⅳ. 017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 20826 号

丛 书 名 高等学校小学教育专业教材
书　　名 数学分析(下册)
主　　编 吴顺唐
责任编辑 孟庆生
装帧设计 赵 庆
责任校对 刘子普
出版发行 南京大学出版社
(南京汉口路 22 号南京大学校内 邮编 210093)
印　　刷 南京印刷制版厂
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 850×1168 1/32 印张 10 字数 257 千
2000 年 7 月第 1 版 2000 年 7 月第 1 次印刷
印　　数 1—6000
定　　价 14.00 元
ISBN 7-305-03441-X/O·236

前　言

培养具有较高学历的小学教师是江苏社会主义现代化建设和基础教育事业发展的迫切需要，也是我国师范教育改革发展的必然趋势，1984 年，江苏省南通师范学校在全国率先进行培养专科程度小学教师的五年制师范教育试验；1998 年，通过联合办学形式组建南京师范大学晓庄学院，在全国率先进行培养本科程度小学教师的试验，使江苏省较早启动了以高学历、高素质为基本特征的"跨世纪园丁工程". 10 多年来，试验院校为基础教育输送了一大批新型小学教师，提升了小学教师的学历结构，提高了小学教育教学质量，受到了教育行政部门和用人单位的普遍欢迎. 但自试验以来，江苏省乃至全国还没有一套专为培养本、专科程度小学教师而编写的小学教育专业教材，这不能不说是一种缺憾.

1997 年 6 月，江苏省教委根据原国家教委师范教育司《大学专科程度小学教师培养课程方案(试行)》的基本精神，组织制订并印发了《江苏省五年制师范课程与学习手册》，对培养专科程度小学教师的目标、规格、课程体系作了明确规定，对各专业所开设课程的目标、内容和要求作了具体说明. 1999 年 6 月，又对《江苏省五年制师范课程与学习手册》中小学教育专业课程方案进行了修订，正式颁布了《江苏省五年制师范小学教育专业课程方案(试行)》(以下简称《方案》)，标志着江苏省培养专科程度小学教师的五年制师范教学内容和课程体系的确立. "九五"期间，原国家教委师范司组织成立了"面向 21 世纪本、专科学历小学教师专业建设"

课题组，江苏省教委和南京师范大学承担了其中一系列的子课题研究任务，编写教材纳入了课题组的预期研究成果，这为教材建设提供了理论和实践上的准备. 为了着力解决培养本、专科程度小学教师学校教材紧缺的燃眉之急，进一步规范和完善教学管理，切实保证教学质量，江苏省教委组织编写了这套高等学校小学教育专业教材.

这套教材以全面贯彻党的教育方针，全面提高教育质量为宗旨，以教育要"面向现代化、面向世界、面向未来"为指针，以《方案》为依据，体现素质教育思想和改革创新精神，体现大学文化程度和为小学教育服务的内在要求，遵循小学教师成长的规律和学科教学特点，加强通识教育，注重文理渗透，强化职业能力培养，合理安排教材结构，科学构建教材体系. 在教材编写过程中，充分汲取了省内外试验院校的教学经验，并注意借鉴国际师范教育教学改革的先进成果，在确保科学性的前提下，进一步突出教材内容的时代性、针对性和系统性，坚持师范性和学术性统一，基础性和发展性并重，使教材体系更加符合培养面向21世纪本、专科学历小学教师的需要.

全套教材按照"整体规划、分步实施、逐步到位"的教材建设目标进行编写. 第一批主要编写《方案》中规定的学科专业必修课、教育专业必修课和部分选修课的教材，共计38本.

学科专业课教材有：《文学理论》、《中国古代文学》、《中国现当代文学》、《外国文学》、《汉语》、《写作》、《普通逻辑概要》、《儿童文学》、《人文社会科学基础》、《高等代数》、《数学分析》、《空间解析几何》、《概率与统计》、《算术基本理论与数论初步》、《微机辅助教学软件设计》、《普通物理》、《现代科技概论》等17本.

教育专业课教材有：《教育基本原理》、《教育技术教程》、《教育技艺原理与训练》、《教育科研方法》、《儿童心理学》、《班队管理》、《小学语文教材概说》、《小学数学教材概说》、《小学语文教学概论》、《小学数学教学概论》等10本.

选修课(必选)教材有:《大学语文》、《高等数学》、《中国文化概说》、《教育思想史》、《素质教育论》、《教育现代化》、《家庭社区教育》、《教育伦理学》、《现代教育思潮》、《小学教育个案研究》、《小学教育比较研究》等 11 本.

本套教材由国内学养深厚的知名专家学者担任主编,一大批具有丰富教学经验和较高学术水平的学科带头人集体参与编写,确保了教材质量.

本套教材适用于培养大学本、专科学历小学教师的全日制学校,也可以作为在职小学教师本、专科学历进修、继续教育和自学考试的指定教学用书.

培养本、专科学历小学教师是一项面向未来的探索,小学教育专业建设尤其是教材建设尚处在起步阶段.由于缺乏经验,加上编写时间仓促,难免存在一些不足之处,各地在具体使用过程中有什么问题或建议,请及时与江苏省教委师范教育处联系,以便修订完善.

高等学校小学教育专业
教材编写委员会
1999 年 8 月

第八章　无穷级数

无穷级数简称为级数，它和微分、积分一样，也是研究函数的一个重要工具，其理论基础也是极限. 利用级数不仅可以研究函数的性质，而且也可用来构造许多非初等函数，事实上它本身也是函数的一种表达方式. 此外，利用级数还可以推导出一些近似计算公式，进行数值计算.

无穷级数分数项级数和函数项级数两大类，本章将介绍这两种级数的一些基本概念和基本性质，为将来进一步研究函数的性质打好基础.

§8.1　常数项级数

1.1　常数项级数概念

在初等数学中，主要研究的是有限项求和的问题，但往往也会遇到无穷多项相加的情形. 例如，在小学数学中介绍了无限循环小数 $0.\dot{3}$，当要把它化成分数时，便会出现

$$0.\dot{3} = 0.333\cdots = 0.3 + 0.03 + 0.003 + \cdots + 0.\underbrace{00\cdots0}_{n-1个0}3 + \cdots$$

或
$$0.\dot{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots;$$

在中学数学中则进一步提出了求无穷递缩等比数列

$$a, aq, aq^2, \cdots, aq^{n-1}, \cdots \quad (|q| < 1), \tag{1}$$

各项的和

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$$

等等,这就有了无穷级数的概念.

定义 1.1 设 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 是给定的数列,则称表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

为无穷级数,简称级数,其中 u_n 称为级数的一般项或通项.

无穷级数虽然在形式上也写成了用加号连结的一个式子,但在意义上却与过去熟悉的有限项相加完全不同,因为我们甚至还不知道这无限项"相加"的"和"是怎样定义的.

回到中学数学里求无穷递缩等比数列(1)各项和的问题.它是这样处理的:先求出它的前 n 项的和(这是有限项的和,总能算出它的结果):

$$S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1}$$
$$= \frac{a(1-q^n)}{1-q},$$

其中 n 为任意自然数.显然,n 越大,S_n 中包含数列(1)的项也越多.如果当 $n \to +\infty$ 时,S_n 有极限,则这个极限很自然地就定义为数列(1)各项的和.现在

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} \quad (|q| < 1),$$

于是 $\frac{a}{1-q}$ 就可看作无穷递缩等比数列(1)各项的和.

将上面的处理方法一般化,就有下面的定义:

定义 1.2 对无穷级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \tag{2}$$

我们称

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

为级数的前 n 项部分和.如果这些部分和构成的数列

$$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$$

当 $n \to +\infty$ 时存在极限 S，我们就称级数(2) 收敛，S 为它的和(或称级数(2) 收敛于 S)，并记作

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

如果部分和数列 $\{S_n\}$ 没有有限极限，就称级数(2) 发散.

例 1 讨论等比级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \quad (a \neq 0)$$

的敛散性.

解 当 $|q| < 1$ 时，前面已证明级数是收敛的，和等于 $\frac{a}{1-q}$. 当 $|q| > 1$ 时，部分和

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

没有极限，所以级数是发散的. 当 $q = 1$ 时，部分和

$$S_n = a + a + \cdots + a = na,$$

没有有限极限，级数是发散的. 最后当 $q = -1$ 时，部分和数列是

$$S_1 = a, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = a, \quad S_4 = 0, \cdots$$

显然也没有极限，所以级数也是发散的.

所以，等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} (a \neq 0)$ 当 $|q| < 1$ 时收敛，当 $|q| \geqslant 1$ 时发散. □

例 1 中的等比级数也称为几何级数.

例 2 求证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛，且其和为 1.

证 因为

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

所以

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛,其和为 1. □

例 3 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 的敛散性.

解 因为
$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$> \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$= \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to \infty \quad (n \to \infty),$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散. □

一个无穷级数只有当它收敛时才能谈到和. 因此,从理论上讲讨论级数是否收敛更为重要,所以下面我们主要研究级数的敛散性.

1.2 收敛级数的基本性质

研究级数的收敛问题,实质上就是研究部分和数列的收敛问题,这就使我们有可能应用有关数列极限的性质来推得级数的一些性质.

性质 1 如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S,c 为常数,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 收敛于 cS.

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的前 n 项和为 S_n. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于 S，所以 $\lim_{n\to\infty}S_n = S$.

记级数 $\sum_{n=1}^{\infty}cu_n$ 的前 n 项和为 U_n，则

$$U_n = cu_1 + \cdots + cu_n = c(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = cS_n$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}U_n = \lim_{n\to\infty}cS_n = c\lim_{n\to\infty}S_n = cS.$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}cu_n$ 收敛于 cS. □

从性质 1 可知：

1° 对收敛级数有 $\sum_{n=1}^{\infty}cu_n = c\sum_{n=1}^{\infty}u_n$；

2° 级数的各项乘以非零的常数，它的敛散性不变.

性质 2 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于 U，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛于 V，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛，其和为 $U \pm V$.

证 以 U_n、V_n、S_n 分别记 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$、$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 的前 n 项部分和，则

$$\begin{aligned} S_n &= (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) \\ &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = U_n \pm V_n. \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}(U_n \pm V_n) = \lim_{n\to\infty}U_n \pm \lim_{n\to\infty}V_n = U \pm V,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛于 $U \pm V$，且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty}u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty}v_n.$$

这说明两个收敛级数可以逐项相加或相减. □

性质 3 在级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 内添上或去掉有限项，不会影响此级数的敛散性.

证明请读者自己完成. 但请注意，在级数收敛时，前面加上或去掉有限项，一般说来级数的和是要改变的.

性质 4 收敛级数按原来的顺序任意添加括号后所成的级数仍然收敛于原来的和.

证 设收敛级数

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1}$$

按原顺序任意添加括号得到的新级数为

$$(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+(u_6+u_7)+(u_8+u_9+u_{10})+\cdots. \tag{2}$$

用 U_m 表示级数(2)的前 m 项的和，用 S_n 表示级数(1)中恰好包含 U_m 中所有项的部分和，即

$$U_m = S_n,$$

且当 $m \to \infty$ 时，$n \to \infty$. 因此

$$\lim_{m\to\infty} U_m = \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

故新级数收敛于原来的和 S. □

推论 若加括号后的级数发散，则原级数必发散.

请读者用反证法自行证明.

由上面推论易知级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cdots$$

是发散的. 事实上，对此级数加括号所得的级数

$$1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots$$

就是 $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$，它是发散的，所以原级数发散.

注意：若某级数加括号后收敛，并不能断定原级数收敛，例如前面提到的级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

是发散的，但加括号后所得的级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

却是收敛的.

定理 1.1 **（级数收敛的必要条件）** 若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

收敛，则

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$，

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n,$$

$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1},$$

那么 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$，且 $u_n = S_n - S_{n-1}$. 所以

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

□

由定理 1.1 可知，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的通项 $u_n \nrightarrow 0(n\to\infty)$，则该级数必发散.

例 4 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ 的敛散性.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ 的通项

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} = \mathrm{e}^{-1} \neq 0.$$

所以级数发散. □

注意：$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 只是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件，而非充分条

件，即满足此条件的级数未必收敛. 例如，例 4 中的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$，虽有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$，但该级数发散.

对数列 S_n 应用柯西收敛准则，即可得下面级数收敛的充要条件.

定理 1.2 （柯西收敛原理） 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分和必要条件为：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N>0$，使 $\forall\ n>N$，$\forall\ p\in N$，均有

$$|S_{n+p}-S_n|=|u_{n+1}+u_{n-2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon.$$

这个充要条件也可以叙述为：

$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N>0$，使得当 $n>N$，$m>N(n<m)$ 时，有

$$|S_m-S_n|=|u_{n-1}+u_{n-2}+\cdots+u_m|<\varepsilon.$$

例 5 证明调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

证 因为

$$\begin{aligned}|S_{n-p}-S_n|&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\\&>\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+p}+\cdots+\frac{1}{n+p}\quad（共\ p\ 项）\\&=\frac{p}{n+p},\end{aligned}$$

所以不论 N 多么大，只要取 $p=n>N$，就有

$$|S_{2n}-S_n|>\frac{1}{2},$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散. □

1.3 正项级数及其审敛法

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 中的各个项 u_n 都有相同的符号，则称该级数为

同号级数. 特别地，若 $u_n \geqslant 0, n = 1,2,\cdots$. 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数；若 $u_n \leqslant 0, n = 1,2,\cdots$. 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为负项级数. 负项级数的每一项乘以 -1，它就变为正项级数了，从性质 1 可知，一个级数的各项均乘以 -1 并不改变它的敛散性，所以下面我们只对正项级数研究敛散性.

(1) 正项级数收敛的充要条件

对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，因为 $S_{n-1} \leqslant S_{n-1} + u_n = S_n$ 即 $\{S_n\}$ 是不减的. 若数列 $\{S_n\}$ 上有界，则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在，级数就收敛；若数列 $\{S_n\}$ 上无界，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$，级数就发散. 于是得到下面的定理：

定理 1.3 正项级数收敛的充分必要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

例 6 判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

解 (1)
$$
\begin{aligned}
S_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
&< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \\
&= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
&= 2 - \frac{1}{n} < 2.
\end{aligned}
$$

即 S_n 上有界，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛. □

(2) 因为 $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \ln \dfrac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$，

$$
\begin{aligned}
S_n &= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + [\ln(n+1) - \ln n] \\
&= \ln(n+1) \to +\infty \quad (n \to \infty).
\end{aligned}
$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 发散. □

(2) 比较判别法

由正项级数收敛的充要条件，可推出下面的正项级数的比较判别法.

定理 1.4 （比较判别法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 均是正项级数，且 $u_n\leqslant v_n, n=1,2,\cdots$

1° 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；

2° 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 也发散.

证 令 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 的前 n 项和分别为 S_n 与 V_n，因为

$$u_n\leqslant v_n,\quad n=1,2,\cdots,$$

所以

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\leqslant v_1+v_2+\cdots+v_n=V_n.$$

对 1°，因 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，故必存在正数 l，使得 $V_n\leqslant l$. 所以 $S_n\leqslant V_n\leqslant l$，即 $S_n\leqslant l$. 由正项级数收敛的充要条件知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

对 2°，可用反证法，事实上，若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则由 1°，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛，与假设相矛盾. □

例 7 判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{x}{3^n}\quad(0<x<3\pi)$.

解 (1) 因为当 $n\geqslant 1$ 时

$$\frac{1}{n^n} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ 是收敛的等比级数，所以由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ 收敛.

(2) 因为当 $0 < x < 3\pi$ 时，$0 < \frac{x}{3^n} < \pi$，故 $\sin \frac{x}{3^n} > 0$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$ 为正项级数；又因为 $\sin x < x (x > 0)$，所以

$$u_n = 2^n \sin \frac{x}{3^n} < 2^n \cdot \frac{x}{3^n} = x\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 是收敛的等比级数，故由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$ 收敛. □

例 8 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 称为 p 级数. 证明 p 级数在 $p > 1$ 时收敛，$p \leqslant 1$ 时发散.

证 p 级数是正项级数，且当 $p \leqslant 1$ 时

$$\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，所以由比较判断法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 也发散.

当 $p > 1$ 时，把 p 级数的各项按下面方式加括号：

$$1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\frac{1}{(2^n)^p} + \frac{1}{(2^n + 1)^p} + \cdots + \frac{1}{(2^{n+1} - 1)^p}\right) + \cdots$$

注意加括号后级数的通项

$$\frac{1}{(2^n)^p} + \frac{1}{(2^n + 1)^p} + \cdots + \frac{1}{(2^{n+1} - 1)^p}$$
$$< \frac{1}{(2^n)^p} + \frac{1}{(2^n)^p} + \cdots + \frac{1}{(2^n)^p} = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n,$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$ 当 $p > 1$ 时是公比为 $\frac{1}{2^{p-1}}$ 的等比级数，因而收

敛，所以由比较判别法知加括号后的级数

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)+\cdots$$

收敛.

由正项级数收敛的充要条件知该级数的前 n 项和有界，但原 p 级数的前 n 项和显然小于带括号的新级数的前 n 项的和，所以原 p 级数的前 n 项的部分和有界，从而原 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛. □

注意：1° 前面已经指出，对一般项级数，加括号后所得的级数即使收敛，原级数也未必收敛，从上面的证明可知，对于正项级数，加括号后的级数与原级数的敛散性相同.

2° 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，是 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p=1$ 时的特殊情形.

3° 今后判别某些正项级数的敛散性时，也可以直接与 p 级数进行比较.

例如对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$，因为

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}<\frac{1}{\sqrt{n\cdot n^2}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 是收敛的 p 级数 $\left(p=\frac{3}{2}>1\right)$，所以原级数收敛.

从以上例题可知，在利用比较判别法判别级数的敛散性时，需要选择一个敛散性已明确的级数作为比较对象，而且，常被选用的级数主要是几何级数和 p 级数. 为要判别某级数收敛，一般要找一个其通项比已知级数通项大的收敛的级数；为要判别某级数发散，则要找一个其通项比已知级数通项小的发散的级数. 在具体操作时，通常会遇到两个问题：一是对原级数的敛散性要有所估计；二是要按上述要求找已知的几何级数或 p 级数. 这往往是比较困难的. 下面我们介绍一种以比较判别法为理论基础的、使用比较方便的正项级数的判别法——比值判别法. 它只需由级数自身的情