成人高校教学研究丛书

电大数学辅导课教案精选

高 等 数 学

（下册）

刘维翰　吴增炽　张旭辉　主编

顾静相　主审

广 西 科 学 技 术 出 版 社

成人高校教学研究丛书
电大数学辅导课教案精选
高　等　数　学
（下　　册）
＊
广西科学技术出版社出版
广西新华书店发行
（南宁市河堤路14号）
广西民族印刷厂印刷
＊
开本 787×1092 1/32　印张 13　字数 287,000
1989年8月第1版　1989年8月第1次印刷
印　数：1—6,900 册
ISBN 7-80565-119-1　定价：3.85 元
O·8

目　录

第十章　多元函数微分学

教　案　一

吴彩麟（柳州）

课题　多元函数的概念、极限、连续性及偏导数

教学目的

（1）加深对多元函数、极限、连续性及偏导数等概念的理解；

（2）掌握求二元函数的定义域、极限、判定二元函数的连续性及求二元函数偏导数的基本方法。

重点　偏导数的运算。

难点　二元函数极限的概念和求法；高阶偏导数的运算。

教学方法　用与一元函数相对应的概念、法则进行对比的方法，突出二元函数的特定意义和方法，通过实例逐步启发学员去理解这部分教材的内容，牢固地掌握其中的各种运算方法。

教学过程

一、复习提问

问题1　这一周的电视课主要讲了哪些内容？

答　多元函数的概念，二元函数的定义域、极限、连续性和偏导数。

我们知道，多元函数是一元函数的推广和发展，多元函数在意义上，是和一元函数相似的，而在研究它的极限和连续性以及导数方面也有很多类似的地方，但它们之间又有区别，我们一定要注意分清。

首先，我们来回忆一下多元函数的定义。

定义：在一个问题中有三个变量x、y、z，当x、y在某一范围D内每取定一组值时，按照一定的对应关系，都有一确定的z值与它们对应，则称z是x、y的二元函数。记作$z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$，其中x、y称为自变量，z称为因变量，自变量x、y的取值范围D称为这个二元函数的定义域。

这和一元函数的定义几乎是相同的，只是多了一个自变量，要弄清x、y和z之间怎样才构成函数关系？构成函数关系的要素是哪些？

问题2　什么叫定义域？怎样根据函数的不同结构求出它的定义域？

答　使函数式有意义的自变量的值的全部就叫做该函数的定义域。根据函数式的各种结构形式，有如下求定义域的方法：

（1）分式形式，分母不能为零的一切值；

（2）含偶次根式，使被开方式大于或等于零的一切值；

（3）对数形式，使真数大于零的一切值；

（4）含 $\operatorname{tg} u$，$u=(x,\ y)$，则$u \neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$　$k \in J$；

含 $\operatorname{ctg} u$，$u=(x,\ y)$，则$u \neq k\pi$，$k \in J$；

（5）含$\arcsin u$，$u=(x,\ y)$，则$|u| \leqslant 1$；

含$\arccos u$，$u=(x,\ y)$，则$|u| \leqslant 1$；

如果函数式是由以上基本形式组合而成，则先分别求出各部分的定义域，然后取它们的公共部分。

试求以下二元函数的定义域，并用图形表示：（让学员自己做）

（1）$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$；　　（2）$z=\ln(x^2-y)$；

（3）$z=\arccos(x-y-1)$；

（4）$z=\dfrac{\arcsin(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2-1}}+\sin(x-y)$

答案：（1）$x^2+y^2 \leqslant 4$　　（3）$0 \leqslant x-y \leqslant 2$

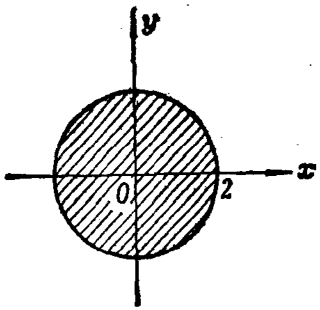

图 10·1

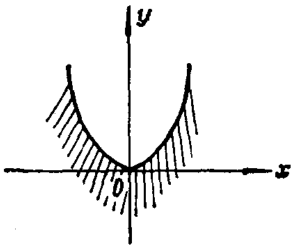

图 10·2

(2) $y<x^2$ (4) $\begin{cases}-1\leqslant x+y\leqslant 1\\ x^2+y^2>1\end{cases}$

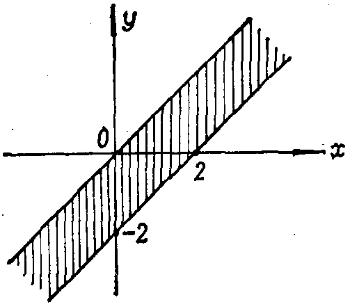

图 10·3

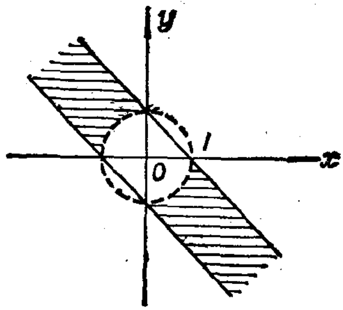

图 10·4

讲评：

注意1 在作图时，一般可以先将不等式看成是等式，然后解出 y（或解出 x），得到区域边界曲线方程，作出边界曲线．如果原不等式符号是大于的，则取图线的上方；是小于的，就取图线的下方（如解出 x，则大于的取右边，小于的取左边）．

注意2 二元函数的定义域，通常是用一个（也可能是几个）不等式来表示，为了直观，往往也要求作出它的图形．它的图形表现为平面上的图形，而二元函数的图形则表现为空间的曲面（一元函数的图形是平面上的曲线）．除了书上所介绍的几种简单二元函数的图形外，我们再分析以下函数的图形．

(1) $z=R\pm\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$

这是以点(a, b, c)为中心，以R为半径的球面，如图10·5所示。

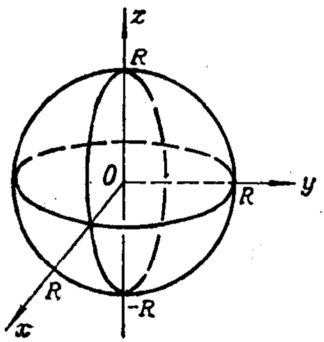

图 10·5

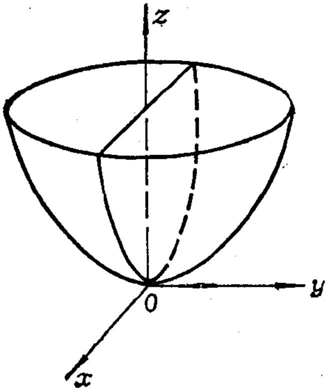

图 10·6

(2) $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

这是中心轨迹为oz轴，开口向上的椭圆抛物面，如图10·6所示。

(3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$

这是以z轴为旋转轴，开口向上的圆锥面,(如果$z=-\sqrt{x^2+y^2}$，就是开口向下）如图10·7所示。

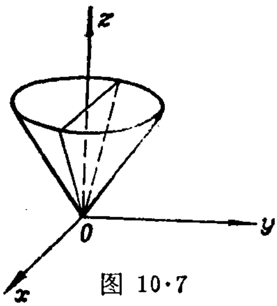

图 10·7

这些基本图形，以后讲二重、三重积分的时候还要用上。

问题3 二元函数极限的定义是怎么说的？

答 设$f(x, y)$是在平面上点$P_0(x_0, y_0)$的附近有定义的二元函数（在点$P_0(x_0, y_0)$上可以没有定义），若对于任给的正数ε，都存在正数δ，使得当$0<\rho<\delta$（ρ

$=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$)时，就有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$，则称当 $P(x, y)\to P_0(x_0, y_0)$ 时 $f(x, y)$ 以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{P\to P_0} f(x,y)=A$。

在一元函数中，函数在某一点 x_0 存在极限的充分必要条件是：这函数在 x_0 处的左、右极限都存在而且相等。对二元函数，所讲的点不再是数轴上的点，而是平面上的点(x_0, y_0)。所谓点 $P(x, y)$ 趋向于定点 $P_0(x_0,y_0)$ 就不仅仅是从左、右两个方向趋近了，而是从平面上任意的方向趋近。所以，$P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 的方式是无穷多种，而且 $P(x,y)$ 必须是从任何方向趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，都有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$，才有 $\lim\limits_{P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)} f(x,y)=A$。而 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 是用 $0<\rho<\delta$ ($\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+y-y_0)^2}$) 来说明的。这种表述形式也可以改为 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$。能够实现"$P(x,y)$ 以任何方式趋近于$P_0(x_0,y_0)$"的关键，是$f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的附近要有定义（不能杂有无定义的点）。所谓"$P_0(x_0,y_0)$的附近"，就是以点 (x_0,y_0) 为中心，任意长为半径的圆内。

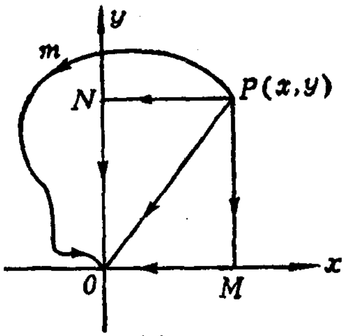

图 10·8

比如 (x_0,y_0) 是原点 $(0,0)$ 时，动点$P(x,y)$必须由任一条路径：$\overline{PMO}$，$\overline{PO}$，$\overline{PNO}$或 $\widehat{PmO}$ 等等都能通到点$(0,0)$才行，如果有其中一条（比如$\overline{PNO}$）通不到点$(0,0)$就不行，如图10·8。

问题4　二元函数连续性

的定义怎么说的？

答 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 及其附近有定义，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续。

怎么理解这个定义呢？与一元函数连续性的意义一样，应有以下几点认识：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ 和 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}[f(x,y)-f(x_0,y_0)]=0$ 是等价的。如果令 $\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=y-y_0$，则当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时，就有 $\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$，从而我们得到函数 $z=f(x,y)$ 的全增量的表示式：$\Delta z=f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$，这在后面讲到全微分时还是有用的。

(2) 二元函数的连续性，实质上就是当自变量 x，y，有微小的变化时，其对应的函数值也只是产生微小的变化。

(3) 二元函数的连续性，从几何方面来说，是指其函数图形是空间里一块无缝无洞的连续绵密的曲面。

问题5 什么叫做二元函数的偏导数？

答 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 及其附近有定义，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限值为 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处对 x 的偏导数。

同样，若 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$ 存在，则称此极限值是 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数。

从这个定义我们知道，$z=f(x,y)$ 对 x 的偏导数，就是

把 y 固定不变，x 当作变量，这样就和一元函数求导的意义一样了；同理，$z=f(x,y)$ 对 y 的偏导数，就是把 x 当作常量，y 作变量，然后跟一元函数求导一样进行求导。

二元函数偏导数的几何意义是什么呢？如果以 $z=f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数为例，按上面所说，先把 y 固定在 y_0 处，这实际上就是曲面 $z=f(x,y)$ 和平面 $y=y_0$ 的交线，这条交线是经过 $x=x_0$ 处的一条曲线，而对 x 求导就是 $f'(x_0, y_0)$，这个导函数在 $x=x_0$ 处的值就相当于过曲线 $f(x,y_0)$ 上点 $(x_0, f(x_0,y_0))$ 的切线与 x 轴所夹角 α 的正切（$\operatorname{tg}\alpha$），即这切线的斜率。

二元函数极限的运算法则跟一元函数是一样的；连续的二元函数也具有连续一元函数相类似的性质，如在有界闭区域上，具有最大值和最小值定理及介值定理，以及初等函数在其定义区域内处处连续等等。

二、例题分析

例1 求下列二元函数的极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}(2xy+3x^2)$　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\sin(xy)}{x+y}$

分析 (1)和(2)所给的函数分别在所给的定点 $(2,0)$ 和 $(0,1)$ 是连续的。可以直接将定点的坐标代入函数式后进行计算，其值就是所求的极限。

解 (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}(2xy+3x^2)=2\cdot2\cdot0+3\cdot2^2=12$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\sin(xy)}{x+y}=\dfrac{\sin(0\cdot1)}{0+1}=\dfrac{0}{1}=0$

例2 讨论下列二元函数的极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$； (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$。

分析 以上(1)、(2)、(3)中所给的函数在给定的点(0, 0)处都无定义，不能直接把 $x=0$，$y=0$ 代入函数式去算。可以作一些恒等变形或利用公式确定其极限（如果确有极限的话），如果有不符合极限定义要求的条件，则其极限不会存在。

解 (1) 根据重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。若令 $x^2+y^2=u$，

则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)=0$。即 $u\to 0$，从而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

$=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$

(2) 令 $y=x^2$，$x\to 0$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot x^2}{x^4+x^4}=\dfrac{1}{2}$

而令 $y=2x^2$，$x\to 0$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=2x^2}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot 2x^2}{x^4+4x^4}=\dfrac{2}{5}$

由于从两条路径趋于点(0,0)的极限虽都存在，但不相等，这说明给出的极限式不存在极限。

(3) 由于取 $y=0$，$x\to 0$ 或取 $x=0$，$y\to 0$ 两条路径趋于点(0,0)都不可能，所以给出的极限式不存在极限。事实上，在 x 轴和 y 轴上的点，都使给出的函数式无定义，不管

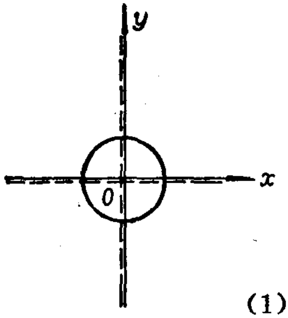

图10·9

以 $(0,0)$ 为中心的任意一个圆内都有无定义的点如图10·9，这不符合极限定义中必备的条件“在点 (x_0, y_0) 的附近有定义”。

例3 讨论下列二元函数的连续性

(1) $f(x,y)=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}+\sin(x+y)$

(2) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y\cos x}{\ln(x^2+y^2)}$

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{当 } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{当 } x^2+y^2=0\end{cases}$

解 二元函数连续性的判定和一元函数连续性的判定一样。所以

(1) 因函数在整个 xy 平面上都有定义，而这函数是属于初等函数，故在整个 xy 平面上此函数是连续的。

(2) 由于这函数是初等函数，它只是在 $x^2+y^2=0$（即 $x=0$，$y=0$ 时）和 $x^2+y^2=1$ 时无定义，故除了坐标原点和以原点为中心，半径为 1 的圆周以外，处处连续。

(3) 这是分段函数（不属初等函数），在 $x^2+y^2\neq 0$ 时，显然是连续的，$x^2+y^2=0$ 是此函数的分段处，必须用连续的定义来判定。由于极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 当取直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时，有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$。显然，由

于 k 取不同的值，就会有不同的极限值，故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在。从而给出的函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续。

例4 求下列函数的偏导数

(1) $z=x^2y+3y^2+1$　　　　(2) $z=\ln(x+y^2)$

(3) $z=e^{xy}$　　　　(4) $z=(2x)^y$

解 (1) $z'_x=2xy$,　　$z'_y=x^2+6y$

(2) $z'_x=\dfrac{1}{x+y^2}$,　　$z'_y=\dfrac{1}{x+y^2}\cdot(y^2)'=\dfrac{2y}{x+y^2}$

(3) $z_x'=e^{xy}\cdot(xy)'_x=e^{xy}\cdot y=ye^{xy}$

$z'_y=e^{xy}\cdot(xy)'_y=e^{xy}\cdot x=xe^{xy}$

(4) $\because$　$z=(2x)^y=2^yx^y$

$\therefore$　$z'_x=2^y(x^y)'_x=2^yyx^{y-1}$

$z_y'=(2x)^y\ln(2x)$

注 有了一元函数求导数的基础，要求二元函数的偏导数并不太难，只要心中有数，对哪个字母求导，哪个字母就是变量，其余的字母都看作是常量。除此之外，方法上与一元函数求导方法是一样的。

例5 (1) 已知 $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$,　求 $f'_x(0,-1)$, $f'_y(2,1)$;

(2) 已知 $f(x,y)=x+(y+1)\arcsin\dfrac{x}{y}$，求 $f'_x(x,1)$。

解 (1) $\because$　$f'_x(x,y)=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{y}{x}\right)'_x=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$，

$$\therefore \quad f'_x(0,-1)=1$$

$$\because \quad f'_y(x,y)=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\therefore \quad f'_y(2,1)=\frac{2}{5}$$

(2) $\because \quad f'_x(x,y)=1+(y+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x$

$$=1+\frac{y+1}{\sqrt{y^2-x^2}}$$

$$\therefore \quad f'_x(x,1)=1+\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

例6 设 $f(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2 & 当x=0或y=0\\ 1 & 当xy\neq 0\end{cases}$,

求 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$ 和 $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$.

解 这是分段函数，也象一元函数的分段函数一样，求分段点处的导数，要用定义的方法。

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(0+\Delta x)^2+0^2-(0^2+0^2)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}$$