# 計算实習

(高等部分)

第一分册

綫性代数計算

王德人等編

高等教育出版社

# 計算实習

(高等部分)

第一分册

## 綫性代数計算

王德人等編



高等教育出版社

本書系統地闡述了綫性代数中最重要的、同时能够应用到各种現代数值計算机上的数值計算方法，其中包括古典方法以及近十年来出現的某些新方法。

本書編排新穎，对各种方法都指出了它們的特点与計算注意事項，并且給出了較好的計算表格与数值例子。

本書适宜作为計算数学專业和数学專业計算实習課或計算方法課的教材以及实际計算工作者的参考書。又因为只要具有初等近似方法和綫性代数的基本知識即可閱讀本書，所以还可以供更广泛的讀者参考之用。

# 計　算　实　習

## （高等部分）

### 第一分册

王德人等編

高等教育出版社出版　北京宣武門內承恩寺7号
（北京市書刊出版业營业許可証出字第054号）
京华印書局印刷　新华書店發行

統一書号13010·663　开本850×1168 1/32　印張 6 4/16　插頁7
字数 148,000　印数0001—4,200　定价(6)¥0.80
1959年10月第1版—1959年10月北京第1次印刷

# 序　言

本書是繼"計算实習"(初等部分)一書之后作为高等分析計算方法实習的第一分册,其內容只是討論綫性代数計算問題,至于解数学物理問題的变分法和差分方法以及积分方程的数值解法等部分将作为第二分册的基本內容。

我們所以将綫性代数計算方法部分作为一个分册来出版是基于下面两个原因:

第一,許多数学物理問題的数值解法例如差分方法、变分方法等,最后总是归結到綫性代数的計算問題。由此可見綫性代数計算方法是高等分析計算方法的基础。不但如此,它本身在生产实踐中也有广泛的应用。所以对于它作一系統的闡述是有重要实际意义的。

第二,目前所看到的关于这一方面的中外文書籍,我們認为有許多不足的地方,特别是在这些書中缺乏对于各种計算方法从实用观点方面的詳尽討論,同时决定方法的取舍不是以現代数值計算机上是否适用为标准,因此不适宜采用作为目前我国高等学校計算实習課的教材,也不能滿足即将在各种計算机上进行工作的計算工作者的需要。

本書主要特点表現在以下四个方面:

第一,所选取的計算方法不仅适用于在各种桌上計算机上面且也适用于在快速电子計算机上进行計算。这里包括我們所熟知的一些古典方法,也包括近十年来出現的而在别的書中少見的某些新方法,譬如第三章所介紹的变分方法。至于那些表面看来虽然新穎而实际应用价值不大的一些方法,一概略去。

第二，对于所选取的各种計算方法在实用上都作了較詳細的討論，特别着重于方法的根本思想、特点以及計算时注意事項。鑒于方法的选擇具有重大实际意义，我們在叙述各种方法的同时也指出了它們的优点、缺点以及适用于解决何种类型的問題，以使讀者能够根据具体問題的特点来选取最有效的計算方法。

第三，对于各种計算方法我們都給出了較好的計算表格和数值例子。应当指出，書中几乎全部例題都是我們自己根据方法的特点編造和計算的。因此在書中反映了我們很多实际計算的經驗。

第四，本書是从实用观点編写的，同时对于理論也給予足够重視。此外，在內容編排和方法闡述方面也别有特色。

本書适宜作为計算数学專业和数学專业計算实習課或計算方法課的教材以及实际計算工作者的参考書。又因为只要具有初等近似方法和綫性代数的基本知識卽可閱讀本書，所以它还可以供更广泛的讀者参考之用。

本書是在吉林大学工作的苏联專家И.П.梅索夫斯基赫(И.П.Мысовских)給我們講授了高等近似方法并和我們进行了計算实習的基础上，并吸取了В.Н.Фаддеева著Вычислительные методы линейной алгебры①一書以及其他有关文献中的許多优点而編写成的。

本書所以能够与讀者見面是与И.П.梅索夫斯基赫專家的上述教学活动分不开的。因此，我們衷心地感謝И.П.梅索夫斯基赫專家。

我們非常感謝吉林大学数学系計算数学教研室主任李荣华同志，他仔細地看了全部原稿并提出了一系列的宝貴意見；我們也感

① 有王本璧，王亞南，王俊民譯的中文本："綫性代数計算方法"，科学出版社1958年出版。

謝馮果忱同志，他对本書第三章提出了許多的宝貴意見。

本書是由王德人、汪德順、康立山、莫孜中、蔣尔雄、楊春森、楊培勤等集体編写的。

由于我們学識淺薄，又缺乏教学与写書的經驗，在短期內赶写此書，其中难免有許多錯誤与不足之处，希望讀者批評指正。

編　者

一九五九.三.八

于吉林大學

# 目　录

# 引　言

綫性代数計算的基本問題可以分为两类：第一类是求解非齐次的綫性代数方程組

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\xi_1+\cdots+a_{1n}\xi_n=b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\xi_1+\cdots+a_{nn}\xi_n=b_n \end{array}\right\} \tag{1}$$

或簡写为
$$Ax=b,$$

其中
$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

第二类是求矩陣 $A$ 的特征值与特征向量，这相当于解代数方程

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0, \text{ 或 } \mathscr{D}(A-\lambda I)=0 \tag{2}$$

其中 $I$ 表單位矩陣，$\mathscr{D}(A-\lambda I)$ 表矩陣 $A-\lambda I$ 的行列式。除上述两类問題外，行列式 $\mathscr{D}(A)$ 的計算与求逆矩陣 $A^{-1}$[若 $\mathscr{D}D(A)\neq 0$] 也是綫性代数計算所要研究的問題。

为什么要研究綫性代数計算的問題呢？这个問題可以从两方面来回答。一方面由于在用数値解法解数学物理問題时往往导致綫性代数計算問題。譬如

(一) 具有退化核的第二型弗来德荷蒙(Fredholm)积分方程导致綫性代数計算問題，同样用机械求积法解具有任意核的第二型弗来德荷蒙积分方程也导致同一問題；

（二）用差分方法或变分方法求解微分方程的边值問題也导致綫性代数計算問題;

（三）某些数学物理問題导出的非綫性方程組，常常是用綫性方程組去近似地代替它。比如用牛頓法解非綫性方程組实質上就相当于逐步解一系列的綫性代数方程組。

另一方面由于实际問題往往要求的是具体数值結果，并且要求花最少的劳动得出最好的結果，因此必須研究綫性代数的数值計算問題。

譬如我們用熟知的克拉姆(Cramer)方法解綫性代数方程組(1)，那么需要$(n^2-1)n!+n$次乘除运算①，而用高斯(Gauss)消去法来解同一組方程时只需要$\frac{n}{3}(n^2+3n-1)$次乘除运算。这就可看出后一方法計算量要少得多。我們列出下面的比較表:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 方程組的阶数 $n$ ………………………… | 2 | 4 | 6 |
| 用克来姆法的乘除次数……………………… | 8 | 364 | 25206 |
| 用高斯消去法的乘除次数…………………… | 6 | 36 | 106 |

$n=4$时克拉姆法所要的計算量几乎是高斯消去法的10倍，$n=6$时几乎是250倍，而$n=10$时用克拉姆法大約需要乘除运算$5\times 10^7$次而用高斯消去法只要430次。这些簡單的数字已經有力地說明計算方法是多么值得研究，因此我們进行計算时必須認眞选擇計算方法。同样地对于計算矩陣的特征值也有这样的問題。

我們除考虑計算量之外，还須考虑所采用的計算方法在实际計算过程中是否方便，特别在近代由于計算机的开展还要考虑方

① 这里是指用行列式最原始的計算方法来計算克立姆方法中所出現的行列式。

法是否适用于所用的計算机，最后还得考虑所采用的計算方法是否能得到較精确的結果。因此从这一系列的問題卽可看出綫性代数計算方法的研究是極为重要的。

在这本書里我們将介紹解綫性代数方程組与求矩陣特征値等等問題的最常用的几种計算方法。我們这里所以要介紹各种各样的方法，是因为对于具体問題必須采用适合的方法而沒有一个計算方法能适用于解一切問題。但是在实际計算中，解綫性代数方程組的高斯消去法与迭代法以及求特征値問題的克雷洛夫(Крылов)法与迭代法都是最常用的方法。

我們在本書中只涉及到在一般教本中常常提到的两类計算方法，卽精确法与迭代法。所謂精确法是指經过有限步初等算术运算，如果沒有含入誤差，就可得出所求問題的精确解的这样的方法。例如高斯消去法、克雷洛夫法等等都屬于这种方法。但是在实际計算中，計算机上不能容納具有无限多位被計算的数据，而只能取有限位来进行計算，因而在計算时就不能避免含入誤差。这样，实际上精确法也只能給出近似解。

迭代法是指这样的一种"算法"：由初始向量 $x_0$ 出發，通过某种手續构造出所謂迭代向量序列$\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$，然后由所得的序列求出已給問題的解。

精确法与迭代法的优缺点总的說来有下面三点：

(一) 按迭代法求解时，首先会提出这样的問題：当我們作序列

$$x_0, x_1, \cdots, x_k,$$

时，用 $x_k$ 代替 $x^*$($x^*$ 是方程組的精确解)，$k$ 需要多大，才能滿足所要求的精确度，一般說来，这是不能事先預計到的，这是迭代法的主要缺点。而在利用精确法时，則可以事先預計到所需要的算术运算步数。

（二）迭代法的計算程序非常簡單，而且計算方式是單一的，这就使得在自动控制的数値計算机上实現这种方法显得特别优越。比如在电子数字計算机上利用迭代法时，由于其程序設計簡單，它比起那些运算量比較小而程序設計較复杂的精确方法能节省更多的人工劳动和时間。

（三）利用迭代法时，如果在計算中發生錯誤，通常仍能得出所要的結果，而在利用精确法进行計算时，如果計算过程中發生錯誤就不再能得到所要的結果。因此在我們进行計算时，对每一步計算必須利用給出的檢驗方法进行檢查計算有否錯誤，尽管这种檢驗要化費不少劳动，但經驗告訴我們对于这一点有任何疏忽都将导致化費更大的劳动，这对利用精确法特別显得重要。

本書所介紹的精确方法中極大多数的方法其精神实質是消去法过程，为了突出其精神实質，把它們列为第一章，即消去法，第三章中最后两个方法——共軛斜量法与 $A$-正交向量法实質上是屬于精确方法这一类的，但是它們之間以及与斜量法之間有密切联系，因此我們把它們編在一起。第二章介紹了古典的迭代法，而且是所謂一級綫性迭代法。斜量法虽然是迭代法的一种，但是它与古典迭代法有本質上的区別，它是把所求的問題化为求某个泛函数的極小問題，为此通过某种迭代手續逐次地作出極小化序列，因此我們把它單独列为第三章的变分方法。

由于实际問題导出的綫性代数問題中的矩陣往往是实的，因此在本書中所論及的矩陣都假設是实的。其次，为了不屢次重复起見，我們在解方程組或求逆矩陣时总是假定所給的矩陣 $A$ 是非奇异的。关于 $n$ 阶矩陣 $A$ 的特征值的順序总是按其模的遞減的順序編号的：

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|,$$

而对应的特征向量記以 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，当然这組向量未必是綫性独

立的。假定它們綫性独立，我們就称这組向量是完全的。此外在第二章与第三章中应用迭代法或斜量法計算时提到"要求結果精确到几位数字"的意义应这样理解：前一次迭代結果与后一次迭代結果其数据在舍入誤差范圍內有几位重合我們就說精确到几位数字。这样說法当然是不确切的，只不过为了叙述簡便起見。

为了使广泛讀者都能有机会进行計算实習，本書中所討論的計算方法我們都給出了适用于桌上計算机的計算表格，而且各种例子也是用桌上計算机做出来的，以便进行計算实習时参考。要了解并熟練計算方法必須通过实習，因此我們給出計算实習时間分配表如下，以供参考：

(一) 高斯唯一除法程序……………………3 小时
(二) 主元程序……………………3 小时
(三) 唯一除法扩充程序、求逆矩陣与逆矩陣精确化……………………6 小时
(四)* 求 $A^{-1}B$ ……………………6 小时
(五)* 用平方根法解方程組并求逆矩陣……………………4 小时
(六)* 分塊法……………………4 小时
(七) 克雷洛夫法……………………6 小时
(八)* 但尼列夫斯基法……………………3 小时
(九)* 勒佛里叶法……………………3 小时
(十) 插値法……………………4 小时
(十一) 簡單迭代法解方程組……………………3 小时
(十二) 采德尔迭代法……………………3 小时
(十三) 用迭代法求第一特征值与特征向量并把它們精确化……………………6 小时
(十四) 求次一特征值与特征向量……………………3 小时
(十五) 方程組解的精确化……………………3 小时

上面記有“*”的項目，若时間不够的話可以省去。

# 第一章　消去法

在这一章里，我們分两部分来討論消去法。第一部分是以高斯消去法为基础的，用逐步消去变量的思想，将綫性方程組

$$
\begin{cases}
a_{11}\xi_1+a_{12}\xi_2+\cdots+a_{1n}\xi_n=b_1,\\
a_{21}\xi_1+a_{22}\xi_2+\cdots+a_{2n}\xi_n=b_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{n1}\xi_1+a_{n2}\xi_2+\cdots+a_{nn}\xi_n=b_n
\end{cases}
$$

的系数矩陣

$$
A=\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\
a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\\
a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn}
\end{pmatrix},
$$

化成各种便于求解的系数矩陣(例如三角矩陣)，然后求得方程組的解。为方便起見，上面的方程組以后总写成向量的形式：

$$Ax=b,$$

其中，$A$ 为系数矩陣，$x$ 与 $b$ 为向量：

$$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n);\quad b=(b_1, b_2, \cdots, b_n).$$

这里我們将叙述高斯消去法的各种程序：平方根法、分塊法、逆矩陣的精确化等。高斯消去法亦可以用来求行列式的值，不过我們認为沒有必要来特別叙述它。第二部分叙述一些利用消去原来矩陣 $A$ 中的一些元素而使之成为各种便于求得特征多項式的矩陣的方法。当然，这种消去的方式是与相似变換的理論密切相关的。同时，也叙述求特征向量的方法。这里，将討論克雷洛夫(Крылов)法、达尼列夫斯基(Данилевский)法、勒弗里叶(Leverrier)法、插値法等。

# I 綫代数方程組求解

## §1. 高斯消去法

高斯消去法是解代数方程組的最古典也是最常用的方法，差不多初学代数的人就知道了它。不过这里要講的是按一定順序来消去变量，使消去变量的程序变得單一而能在各种数值計算机上順利地进行求解綫性代数方程組的計算。这一类消去法的程序有很多，下面介紹的是我們最常用的几种程序。

(I) 唯一除法程序。

以唯一除法程序求解綫性方程組：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1\,n+1} \\ a_{2\,n+1} \\ \vdots \\ a_{n\,n+1} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

就是通过由第 $k-1$ 步到第 $k$ 步（$k=1, 2, \cdots, n-1$）的計算程序：

$$\begin{cases} b_{kj\cdot k} = \dfrac{a_{kj\cdot k-1}}{a_{kk\cdot k-1}}, & j=k+1, \cdots, n+1 \\ a_{ij\cdot k} = a_{ij\cdot k-1} - a_{ik\cdot k-1} b_{kj\cdot k}, & i=k+1, \cdots, n \end{cases} \tag{2}$$

将(1)化成系数矩陣为三角矩陣 $B$ 的方程：

$$\begin{pmatrix} 1 & b_{12\cdot 1} & b_{13\cdot 1} \cdots b_{1n\cdot 1} \\ 0 & 1 & b_{23\cdot 2} \cdots b_{2n\cdot 2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots 1 & b_{n-1\,n\cdot n-1} \\ 0 \quad 0 & 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1\,n+1\cdot 1} \\ b_{2\,n+1\cdot 2} \\ \vdots \\ b_{n-1\,n+1,\,n-1} \\ b_{n\,n+1,\,n} \end{pmatrix} \tag{3}$$

(2) 中的标号：第一个是行标，第二个是列标，第三个是計算步数。矩陣 $B$ 中出現的零元素是因为 (2) 中当 $j=k$ 时有 $b_{kk\cdot k}=1$,

表 1.

| $k \backslash x$ | $\xi_1$ | $\xi_2$ | $\xi_3$ | $\xi_4$ | 常数项 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{14}$ | $a_{15}$ | $\sum_{j=1}^{5} a_{1j}$ |
| | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{24}$ | $a_{25}$ | $\sum_{j=1}^{5} a_{2j}$ |
| | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $a_{34}$ | $a_{35}$ | $\sum_{j=1}^{5} a_{3j}$ |
| | $a_{41}$ | $a_{42}$ | $a_{43}$ | $a_{44}$ | $a_{45}$ | $\sum_{j=1}^{5} a_{4j}$ |
| 1 | 1 | $b_{12\cdot1}$ | $b_{13\cdot1}$ | $b_{14\cdot1}$ | $b_{15\cdot1}$ | |
| | | $a_{22\cdot1}$ | $a_{23\cdot1}$ | $a_{24\cdot1}$ | $a_{25\cdot1}$ | |
| | | $a_{32\cdot1}$ | $a_{33\cdot1}$ | $a_{34\cdot1}$ | $a_{35\cdot1}$ | |
| | | $a_{42\cdot1}$ | $a_{43\cdot1}$ | $a_{44\cdot1}$ | $a_{45\cdot1}$ | |
| 2 | | 1 | $b_{23\cdot2}$ | $b_{24\cdot2}$ | $b_{25\cdot2}$ | |
| | | | $a_{33\cdot2}$ | $a_{34\cdot2}$ | $a_{35\cdot2}$ | |
| | | | $a_{43\cdot2}$ | $a_{44\cdot2}$ | $a_{45\cdot2}$ | |
| 3 | | | 1 | $b_{34\cdot3}$ | $b_{35\cdot3}$ | |
| | | | | $a_{44\cdot3}$ | $a_{45\cdot3}$ | |
| 逆过程 | | | | 1 | $b_{45\cdot4}=\xi_4$ | $\tilde{\xi}_4$ |
| | | | 1 | | $\xi_3$ | $\tilde{\xi}_3$ |
| | | 1 | | | $\xi_2$ | $\tilde{\xi}_2$ |
| | 1 | | | | $\xi_1$ | $\tilde{\xi}_1$ |

$a_{ik\cdot k}=0$。

由于新的方程組(3)中的每一个方程，未知量是按次序逐一減少，而最后一个方程 $\xi_n=b_{n\,n+1\cdot n}$ 已經是(1)的解的第 $n$ 个分量，显然，再用程序

$$\xi_i=b_{i\cdot n+1\cdot i}-\sum_{j=i+1}^{n} b_{ij\cdot i}\xi_j \quad i=n-1, n-2, \cdots, 2, 1 \tag{4}$$

逐次代回(称为逆过程)就可以得到(1)的解了。

現在就 $n=4$ 时給出計算表格(見表1)。

(一) 由表上可以看到，每步第一行的元素組成三角矩陣 $B$。

(二) $\Sigma$ 所在的一列为檢驗列。因为作变换 $\tilde{x}=x+1$ 后得到的以 $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3, \tilde{\xi}_4$ 为变量的新方程組的系数矩陣不变；而常数項恰为 $\sum_{j=1}^{5} a_{ij}$ $(i=1, 2, 3, 4)$，写在 $\Sigma$ 的那一列內，使其接受与它同行其他元素类似的运算①。若計算无偶然誤差，則 $\Sigma$ 列中的元素总等于与它同行各元素之和，所以可用来作为檢驗，而 $\tilde{\xi}_i=\xi_i+1$ 可以作为逆过程的檢驗。

例 1. 求解方程:

$$\begin{pmatrix} 6.8579 & 2.1011 & 3.9490 & -1.9586 \\ 2.1011 & 6.6436 & -1.5055 & -1.4109 \\ 3.9490 & -1.5055 & 5.8091 & -4.2433 \\ -1.9586 & -1.4109 & -4.2433 & 7.2591 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.0631 \\ -1.8491 \\ 2.5072 \\ 1.5150 \end{pmatrix}$$

列表計算于下:

---

① 只要記 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=a_{i\,n+2}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 在(2)中使 $j=k+1, \cdots, n+2$ 就能給出这一列的运算。