平面几何巧解

徐名亮　粤山　编著

同济大学出版社

内 容 提 要

本书对平面几何问题的求证、求解进行了系统的总结归类，共分20章。作者深入地阐述探讨了解题方法，在“巧”字上下功夫。书中列举的大量典型例题，都具有概念性强、覆盖面宽、构思新颖、解法巧妙等特点。每章都有配套习题，并在书末附有总复习题及答案与提示，便于读者练习，开拓思路，以收到举一反三、巧妙解题之效。

本书可作为自学青年和在校学生的辅导读物，也可供数学教师参考。

责任编辑 李炳钊

封面设计 李志云

平 面 几 何 巧 解

徐名亮 粤 山 编著

同济大学出版社出版

（上海四平路1239号）

新华书店上海发行所发行

常熟市印刷二厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：11.75 字数：282千字

1990年12月第一版 1990年12月第一次印刷

印数：1—9,000 定价：4.00元

ISBN 7-5608-0684-8/O·72

前　　言

数学是研究现实世界的空间形式与数量关系的一门科学。其中的平面几何则是研究空间形式的入门与基础。学习平面几何必须掌握全等形、相似形和圆及其有关内容，而学习相似形与比例线段又是学习平面几何的一个重点与难点。

本书着重讨论成比例线段的证题。如对成比例的四条线段在同一直线上、比例中项式及有关线段等式的证明问题，对求解组合图形的面积、应用三角形的重心定理、垂心定理解题等共分 20 章作了较为深入、系统的介绍。

本书的许多章节是笔者多年来在各类专题辅导讲座的基础上加以拓宽加深而成的。对几何问题的求证、求解，在方法技巧上加以挖掘，进行系统的总结归类，作出深入的阐述探讨，在“巧”字上下功夫。可以说书中许多问题的解法都有一定的代表性。每章精选了大量的例题，多数例题都代表着一些典型的解法，具有概念性强、覆盖面宽、构思新颖、解法巧妙等特点。每章后面附有大量的与本章内容相配套的练习题，并在书末附有总复习题及答案与提示，便于读者练习，方便青年自学。对那些学有余力的在校学生学习平面几何、提高解题证明能力也会大有帮助，同时本书也可作为广大青年数学教师的参考用书以及开展第二课堂辅导的资料。

本书的第二、三、七、八、九、十三等 6 章由粤山同志撰写，徐嵩泉同志写了第十四章并写总复习题，包括提供答案或提示，其余部分则由徐名亮同志撰写，并对全书进行总纂定

稿。

本书在编写过程中，得到同济大学教务处王从老师和许多有关同志的指导与支持，特别承蒙复旦大学附中数学教研组组长特级教师曾容同志在百忙中抽空审阅了全书，并提出不少有价值的修改意见，作者谨在此向他们致以衷心的感谢。

限于作者的水平，不当之处，在所难免，敬请有幸读到它的读者批评指正。

作　者

于 1989 年 2 月

目 录

第一章　应用直线束　巧证比例式

平行线分线段成比例定理，简称为平行截割定理。其结论是以“比例式”形式出现的。因此，欲证“比例式”一类问题，可不必通过找相似三角形证明，直接应用平行截割定理加以解决。而平行截割定理又可简述为“直线束”定理。下面便介绍如何应用这一定理来巧解这类比例式的问题。

定义　过平面上一点可以引若干条直线，则这些直线称为过这点的直线束。(如图 1-1)

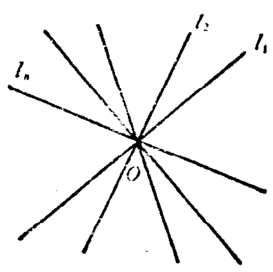

图 1-1

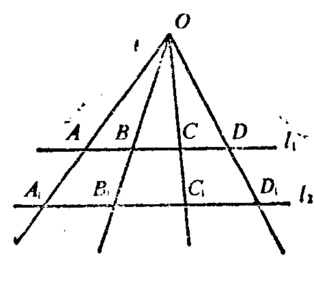

图 1-2

定理　一直线束被两条(或更多条)平行线所截，则截得的线段对应成比例。

已知　直线 $l_1 /\!/ l_2$，过 O 点的直线束分别交 l_1、l_2 于 A、B、C、D 及 A_1、B_1、C_1、D_1 (图 1-2)。

求证 $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{CD}{C_1D_1}$.

略证 $l_1 /\!/ l_2 \Rightarrow \begin{cases} \triangle OAB\backsim\triangle OA_1B_1, \\ \triangle OBC\backsim\triangle OB_1C_1, \\ \triangle OCD\backsim\triangle OC_1D_1, \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{OB}{OB_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{OC}{OC_1}=\frac{CD}{C_1D_1}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}.$$

平行直线不但可截直线束 O 在 O 点的同旁位置上，而且也可以截直线束 O 在 O 点的两旁。当线束 O 置于两平行直线之间(如图 1-3) 直线束定理仍然成立。

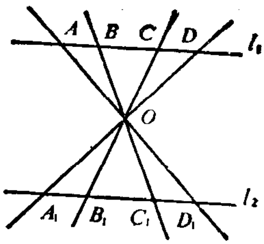

图 1-3

下面，我们将这种图形简化成两种基本图形，便于记忆与应用。

图 1-(A)中，$DE /\!/ BC$，称为“线束 A”，这时有

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC},$$

由更比定理得 $\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{DB}{EC}$,

由合比定理得 $\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{AC}{EC}$ 或 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$ 等。

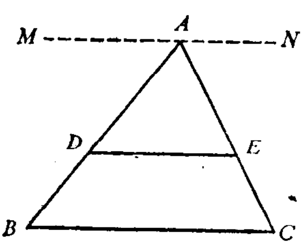

图 1-(A)

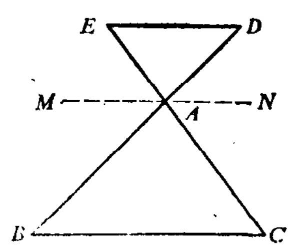

图 1-(B)

图 1-(B) 中，$ED \parallel BC$ 亦称为“线束 A”，这时有 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{ED}{BC}$，同样，还可以由比例性质定理得到其他形式的比例式。

在应用“直线束”证题时必须注意：

(1) 避免犯形如 $\frac{ED}{BC}=\frac{DA}{DB}$ 的错误，因为 $\frac{ED}{BC}=\frac{DA}{AB}\neq\frac{DA}{DB}$.

(2) 只要证题中出现上述两种基本图形(即“线束 A”，便可直接得出 $\frac{DA}{DB}=\frac{EA}{EC}$ 等形式的结论。同时必须根据题目的要求灵活运用比例性质定理，直接写出其他形式的比例式，从而加快解题的速度。

下面我们通过实例，说明如何应用“直线束”定理。

1. 应用图 1-(A) 型“直线束”证题

例 1 若 CD 为 $\triangle ABC$ 之角 C 的平分线，作 $DE \parallel BC$ 交 AC 于 E，且 $BC=a$，$AC=b$，求 DE 之长。

略证 如图 1-4 所示，

$$\left.\begin{array}{l} DE \parallel BC \Rightarrow \angle 1=\angle 3 \\ \angle 1=\angle 2 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \angle 2=\angle 3$

$\Rightarrow DE=CE=x$，

“线束 A” $\Rightarrow \frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}$

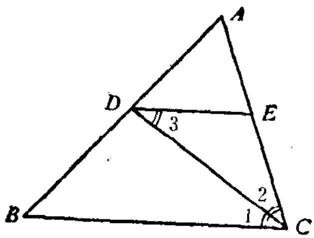

图 1-4

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{a}=\frac{b-x}{b}$$

$$\Rightarrow \quad DE=x=\frac{ab}{a+b}.$$

有时，应用基本图形1-(A)一次，还不能解决问题，必须连续或多次应用“线束A”才能解决问题，请看下例。

例2 若在$\triangle ABC$的AB、AC上各取一点D、E，使$AD:DB=AE:EC$，连接BE交CD于F，过F作$GH\parallel BC$分别交AB、AC于G、H，求证$GF=FH$。

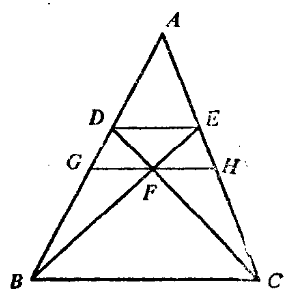

图1-5

略证 如图1-5所示。

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \Rightarrow DE\parallel BC,$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{“线束}D\text{”} & \Rightarrow & \dfrac{GF}{BC}=\dfrac{DG}{DB} \\ \text{“线束}E\text{”} & \Rightarrow & \dfrac{FH}{BC}=\dfrac{EH}{EC} \\ \text{“线束}A\text{”} & \Rightarrow & \dfrac{DG}{DB}=\dfrac{EH}{EC} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{c} \dfrac{GF}{BC}=\dfrac{FH}{BC} \\ BC=BC \end{array}\right\} \Rightarrow \quad GF=FH.$$

2. 应用图1-(B)型“直线束”证题

例3 若以AB为直径的半圆上一点P作切线与过A、B点的切线分别交于D、C，又AC交BD于Q，求证：$PQ\perp AB$，如图1-6。

略证 $\left.\begin{array}{l}DA\perp AB\\ CB\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow AD\parallel BC,$

$$\left.\begin{array}{lll}\text{“线束 }Q\text{”} & \Rightarrow & \dfrac{AD}{BC}=\dfrac{AQ}{QC}\\ \text{切线定理} & \Rightarrow & DA=DP, CB=CP\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{DP}{PC}=\frac{AQ}{QC}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\Rightarrow & PQ\parallel AD\\ \text{又} & AD\perp AB\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow PQ\perp AB.$$

有时单独应用基本图形 1-(*A*) 或 1-(*B*)，还不解决问题，必须综合应用这两种基本图形，其解才能尽善尽美。举例如下。

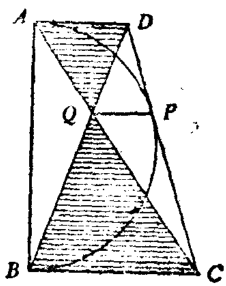

图 1-6

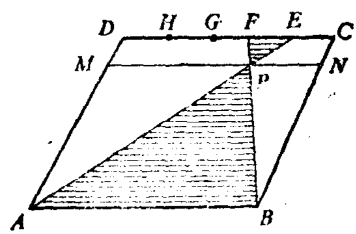

图 1-7

例 4 若在 ▱$ABCD$ 中，$AB=10\text{cm}$，E、F、G、H 为 CD 的五等分点，AE 交 BF 于 P，过 P 作 $MN\parallel CD$ 分别交 AD 于 M，交 BC 于 N，求 MP 之长。

略解 如图 1-7 所示。

“线束 P” $\Rightarrow$ $\dfrac{PE}{PA}=\dfrac{EF}{AB}=\dfrac{1}{5}$,

合比定理 $\Rightarrow$ $\dfrac{PE+PA}{PA}=\dfrac{6}{5}$,

$$
\left.\begin{array}{lll}
\text{由反比定理} & \Rightarrow & \dfrac{AP}{AE}=\dfrac{5}{6} \\
\text{“线束 }A\text{”} & \Rightarrow & \dfrac{MP}{DE}=\dfrac{AP}{AE}
\end{array}\right\}
$$

$$\Rightarrow \quad MP=\frac{5}{6}DE=6\frac{2}{3}(\mathrm{cm}).$$

这是一道福建省中考试题，我们应用“直线束”定理迅速将 MP 的长度求得。

例 5 若四边形两组对边延长后分别相交，且交点的连线与四边形的一条对角线平行，则另一条对角线的延长线必平分两组对边交点连线的线段。(1978 年全国部分省市数学竞赛试题)

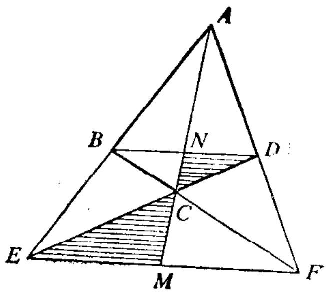

图 1-8

略证 如图 1-8 所示。$BD\parallel EF$，

$$\text{“线束 }C\text{”} \quad \Rightarrow \quad \frac{ND}{EM}=\frac{NC}{CM}=\frac{BN}{MF}$$

$$
\left.\begin{array}{lll}
 & \Rightarrow & \dfrac{ND}{BN}=\dfrac{EM}{MF} \\
\text{“线束 }A\text{”} & \Rightarrow & \dfrac{ND}{BN}\Rightarrow\dfrac{MF}{EM}
\end{array}\right\}
$$

$$\Rightarrow \quad \frac{EM}{MF}=\frac{MF}{EM}$$

$$\Rightarrow \quad EM^2=MF^2$$

$$\Rightarrow \quad EM=MF.$$

由本例可见，应用“直线束”定理证明较复杂的竞赛题，可省去添辅助线的步骤，并较快捷地将问题证得。

3. 创造条件应用“直线束”定理证题

如何创造条件呢？其实质是巧妙地添加辅助线，根据题意，选定某个三角形，作其某一边的平行线，构造出如图 1-(A)型或图 1-(B)型的线束。从而应用“直线束”定理达到证题的目的。

例 6 若 AD 是 $\triangle ABC$ 的角 A 平分线，$BE \perp AD$ 的延长线于 E，$CF \perp AD$ 于 F，则 $\dfrac{AE}{DE}=\dfrac{AF}{DF}$.

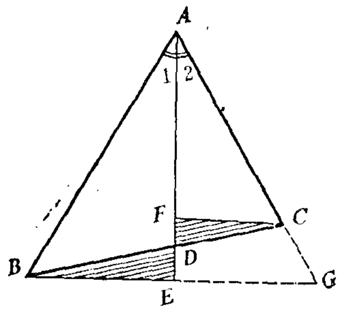

图 1-9

略证 延长 BE 交 AC 的延长线于 G，如图 1-9 所示。则 $CF \parallel BG$.

$$\left.\begin{array}{l}\angle 1=\angle 2\\ AE\perp BG\end{array}\right\} \Rightarrow BE=EG$$

$$\text{“线束 }A\text{”} \Rightarrow \frac{AF}{AE}=\frac{FC}{EG}$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{AE}=\frac{FC}{BE}$$

$$\text{“线束 }D\text{”} \Rightarrow \frac{DF}{DE}=\frac{FC}{BE}$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{AE}=\frac{DF}{DE},$$

$$\text{更比定理} \Rightarrow \frac{AE}{DE}=\frac{AF}{DF}.$$

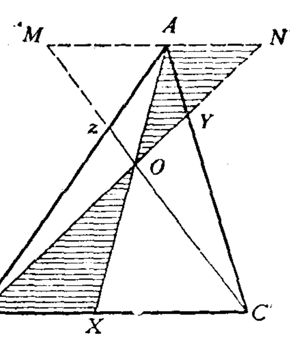

图 1-10

例 7 若 $\triangle ABC$ 之三个顶点各与一点 O 的连线 AO、BO、CO