大專用書

多複變數函數論導引

曾 俊 宏 譯著

國 立 編 譯 館 出 版

大專用書

多複變數函數論導引

曾 俊 宏譯著

序

這本書出自於多變數函數導論之一教材，其構想在於以範例將此理論最重要部分及方法介紹給讀者。內容包括純函數延拓問題，冪級數之代數處理法，束和上同調理論以及與橢圓偏微分方程有關之實變方法。

在第一章我們先討論多變數純函數的定義，其Cauchy 積分之表示法以及在Reinhardt 域上的冪級數展式。不同於單變數理論，對 $n \geqslant 2$ 存在有連域G，$\hat{G} \subset C^n$ 而 $G \subset \hat{G}$，$G \neq \hat{G}$，使得在G內之每個純函數可解析延拓至 $\hat{G}$ 上。沒有此種 $\hat{G}$ 存在的連域G稱爲純連域。此純連域在第二章有各種不同的特徵（Cartan-Thullen 定理，Levi 問題）。最後對每個連域G造純殼H(G)。這是$\mathbb{C}^n$上最大（不一定平的）連域，使得G內每個純函數可解析延拓。

第三章包括Weierstrass 公式及Weierstrass 準備定理與其在收斂冪級數上之應用。要證明此環是一因子唯一分解環，也是Noether 及Hensel的。我們要更進一步討論如此得到之代數定理如何應用到解析集的局部研究上。若引用束論，可得到這方面更深入的結果。這要在第四章從基本上處理。在第五章我們引入複流形且舉許多例子。此外我們尚探討$\mathbb{C}^n$之各種不同的閉包及複流形經過變形的改變。

束論與複流形上函數論間的關係在於值在解析束的上同調理論內。這要在第六章處理，同時應用來說明關於純域與Stein 流形之主要結果（如Cousin 問題的可解性）。

在第一章最後已討論過實可微性的複變表法，即關於 z，$\bar{z}$ 之導

數與複的函數矩陣，整個第七章再處理分析問題。我們定義切向量，微分形式及諸算子 d，d′，d″。Dolbeault 及 de Rham 定理指出與上同調理論之關連。

各材料都詳細處理且以許多映射來說明。證明會超過本書範圍之諸定理均從參考資料引用。假設預備知識爲微積分與單變數函數的基本常識，以及向量，代數與一般拓樸的一些知識。因此這本書有介紹性質而不是爲專家所寫的。

Göttingen，1973 年 10 月　　　　H. Grauert

K. Fritzsche

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目 錄

第一章 純函數

第二章 純連域

第三章 Weierstrass準備定理

第四章 層 論

第五章 複流形

第六章 上同調理論

第七章　實變方法

第一章　純函數

前　言

設 $\mathbb{C}$ 爲複數體。若 n 爲自然數，則 n 元複數有序對集合稱爲 n 維複數空間：

$$\mathbb{C}^n := \{\mathfrak{z} = (z_1, \cdots, z_n) : z_\nu \in \mathbb{C}, 1 \leqslant \nu \leqslant n\}$$

一點 $\mathfrak{z} \in z^n$ 的每個分量可唯一分解成實部與虛部：$z_\nu = x_\nu + iy_\nu$。利用此法 $\mathbb{C}^n$ 之元素 $(z_1, \cdots, z_n)$ 與 2n 維實數空間 $\mathbb{R}^{2n}$ 之元素 $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ 間有唯一的一對一且可逆的對應應。

$\mathbb{C}^n$ 有向量空間結構：$\mathbb{C}^{2n}$ 內兩元素的加法及 $\mathbb{C}^n$ 一元素與（實或複）純量的乘法均爲逐項運算定義的。$\mathbb{C}^n$ 是 n 維複向量空間，視爲實向量空間則是 2n 維的。由 $\mathbb{C}^n$ 與 R^{2n} 間的 R 向量同構顯然可得到 $\mathbb{C}^n$ 上的拓樸：對 $\mathfrak{z} = (z, \cdots, z_n) = (x_1 + iy_1, \cdots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n$ 設

$$\|\mathfrak{z}\| := \left(\sum_{k=1}^{n} z_k \bar{z}_k\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^2 + y_k^2\right)\right)^{1/2}$$

$$\|\mathfrak{z}\|^* := \max_{k=1,\ldots,n} (|x_k|, |y_k|).$$

由 $\mathfrak{z} \to \|\mathfrak{z}\|$ 及 $\mathfrak{z} \to \|\mathfrak{z}\|^*$ 得到 $\mathbb{C}^n$ 上的範數，其對應的度量爲

$$\operatorname{dist}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) := \| \mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2 \|,$$
$$\operatorname{dist}^*(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) := \| \mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2 \|^*.$$

每一情形我們都得到$\mathbb{C}^n$上的拓樸，此拓樸與$\mathbb{R}^{2n}$ 上一般拓樸一致。此外由$|\mathfrak{z}| := \max\limits_{k=1,\ldots,n} |z_k|$及$\operatorname{dist}'(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) := |\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2|$所定之度量同樣導出一般的拓樸。

一域$B \subset \mathbb{C}^n$乃是一開集（一般拓樸下），一連域$G \subset \mathbb{C}^n$ 乃是一連通域。一域$G \subset \mathbb{C}^n$稱爲連通的，假如下面兩等價條件之一：

(a) 對任兩點$\mathfrak{z}_1$，$\mathfrak{z}_2 \in \mathbb{C}^n$有連續映射$\varphi$：$[0, 1] \to \mathbb{C}^n$且$\varphi(0) = \mathfrak{z}_1$，$\varphi(1) = \mathfrak{z}_2$及$\varphi([0, 1]) \subset G$。

(b) 若B_1，$B_2 \subset G$爲開集且$B_1 \cup B_2 = G$，$B_1 \cap B_2 = \phi$及$B_1 \neq \phi$，則$B_2 = \phi$。

定義：設$B \subset \mathbb{C}^n$爲一域，$\mathfrak{z}_0 \in B$爲一點。集合$C_B(\mathfrak{z}_0) := \{\mathfrak{z} \in B$：$\mathfrak{z}$與$\mathfrak{z}_0$可由B內一路線連接$\}$稱爲$\mathfrak{z}_0$在B內的連通分量量。

注意：設$B \subset C^n$爲一域，則

(a) 對任$\mathfrak{z} \in B$，$C_B(\mathfrak{z})$及$B - C_B(\mathfrak{z})$均爲域。

(b) 對任$\mathfrak{z} \in B$，$C_B(\mathfrak{z})$爲連通的。

(c) 由$C_B(\mathfrak{z}_1) \cap C_B(\mathfrak{z}_2) \neq \phi$得：$C_B(\mathfrak{z}_1) = C_B(\mathfrak{z}_2)$。

(d) $B = \bigcup\limits_{\mathfrak{z} \in B} C_B(\mathfrak{z})$。

(e) 若G爲一連域且$\mathfrak{z} \in G \subset B$，則$G \subset G_B(\mathfrak{z})$。

(f) B至多有可數多個連通分量。

證明是顯然的。

最後對$\mathfrak{z}_0 \in \mathbb{C}^n$我們定義：

$$U_\varepsilon(\mathfrak{z}_0) := \left\{\mathfrak{z} \in \mathbf{C}^n : \text{dist }(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_0) < \varepsilon\right\},$$

$$U_\varepsilon^*(\mathfrak{z}_0) := \left\{\mathfrak{z} \in \mathbf{C}^n : \text{dist}^*(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_0) < \varepsilon\right\},$$

$$U_\varepsilon'(\mathfrak{z}_0) := \left\{\mathfrak{z} \in \mathbf{C}^n : \text{dist}'(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_0) < \varepsilon\right\}.$$

§ 1　冪級數

設M爲$\mathbb{C}^n$一子集。M至$\mathbb{C}$的一映射 f 稱爲M上的函數。多項式

$$p(\mathfrak{z}) = \sum_{\nu_1,\dots,\nu_n=0}^{m_1,\dots,m_n} a_{\nu_1,\dots,\nu_n} z_1^{\nu_1}\cdot\dots\cdot z_n^{\nu_n},\ a_{\nu_1,\dots,\nu_n} \in \mathbb{C}.$$

是在整個$\mathbb{C}^n$上有定義的特別簡單的函數。爲簡化符號，我們引入重指標：令ν_i，$1 \leqslant i \leqslant n$，爲非負整數，$\mathfrak{z} = (z_1, \cdots, z_n)$爲$\mathbb{C}^n$之一點。則我們定義：

$$\nu := (\nu_1, \dots, \nu_n),\ |\nu| := \sum_{i=1}^{n} \nu_i,\ \mathfrak{z}^\nu := \prod_{i=1}^{n} z_i^{\nu_i}.$$

由此多項式可表成形式$p(\mathfrak{z}) = \sum\limits_{\nu=0}^{m} a_\nu \mathfrak{z}^\nu$。

定義1.1：設$\mathfrak{z}_0 \in \mathbb{C}^n$爲一點，$a_\nu$，$|\nu| \geqslant 0$，爲複數。則表式

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0)^\nu$$

稱爲繞$\mathfrak{z}_0$的形式冪級數。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

如其名稱所示，此種表式首先只有形式上的意義。對固定的$\mathfrak{z}$並不一定表示一複數。由於重指標有各種排列法，所以其求和法並不清楚。因此我們必須引入適當的收斂概念。

定義1.2：設$\mathfrak{I}:=\{\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_n):\nu_i\geqslant 0，1\leqslant i\leqslant n\}$，$\mathfrak{z}_1\in\mathbb{C}^n$爲選定的。我們稱$\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(\mathfrak{z}_1-\mathfrak{z}_0)^\nu$收斂至複數c，乃當對任$\varepsilon>0$有一有限集$I_0\subset I$，使得對任意有限集I滿足$I_0\subset I\subset\mathfrak{I}$者，下式成立：

$$\left|\sum_{\nu\in I}a_\nu(\mathfrak{z}_1-\mathfrak{z}_0)^\nu-c\right|<\varepsilon.$$

此時我們寫成：$\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(\mathfrak{z}_1-\mathfrak{z}_0)^\nu=c$。

此意義的收斂性等於絕對收斂性。

定義1.3：設$M\subset\mathbb{C}^n$，$\mathfrak{z}_0\in M$，f爲M上一複函數。我們稱冪級數$\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_0)^\nu$在M上均勻收斂至$f(\mathfrak{z})$，當對任$\varepsilon>0$有一有限集$I_0\subset\mathfrak{I}$，使得對任意有限集I滿足$I_0\subset I\subset\mathfrak{I}$者及對任$\mathfrak{z}\in M$，下式成立：

$$\left|\sum_{\nu\in I}a_\nu(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_0)^\nu-f(\mathfrak{z})\right|<\varepsilon.$$

若$\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_0)^\nu$在域B之每個緊緻部分集上均勻收斂，則稱此級數在域B內部均勻收斂。

定義1.4：設$B\subset\mathbb{C}^n$爲一域，f爲B上一複函數。若對每個$\mathfrak{z}_0\in B$有一鄰域$U=U(\mathfrak{z}_0)$在B內及一冪級數$\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_0)^\nu$且此級數在$U$上收斂至$f(\mathfrak{z})$，則稱$f$在$B$內爲純的（亦稱全純的，本譯本簡譯爲純的）。

注意此處，我們並未要求在U上的均勻收斂性。下面我們說明爲何體態收斂即足夠。

定義1.5：點集$V=\{r=(r_1,\cdots,r_n)\in\mathbb{R}^n: r_\nu\geqslant 0, 1\leqslant\nu\leqslant n\}$，稱爲絕對空間。$\tau: \mathbb{C}^n\to V$，$\tau(\mathfrak{z}):=(|z_1|,\cdots,|z_n|)$稱爲$\mathbb{C}^n$至$V$之自然投射。

V爲$\mathbb{R}^n$之子集且因而賦有由$\mathbb{R}^n$至V所引出的拓樸（" 相對拓樸"）。於是$\tau: \mathbb{C}^n\to V$爲連續映成映射。若$B\subset V$爲開的，則$\tau^{-1}(B)\subset\mathbb{C}^n$也是開的。

定義1.6：設$r\in V_+:=\{r=(r_1,\cdots,r_n)\in\mathbb{R}^n: r_k>0\}$，$\mathfrak{z}_0\in\mathbb{C}^n$。則稱$P_r(\mathfrak{z}_0):=\{\mathfrak{z}\in\mathbb{C}^n: |z_k-z_k^{(0)}|<r_k, 1\leqslant k\leqslant n\}$爲繞$\mathfrak{z}_0$的多面柱體，$r$爲（多面）半徑。$T=T(P):=\{\mathfrak{z}\in\mathbb{C}^n: |z_k-z_k^{(0)}|=r_k\}$稱爲$P$的決定面（圖1）。

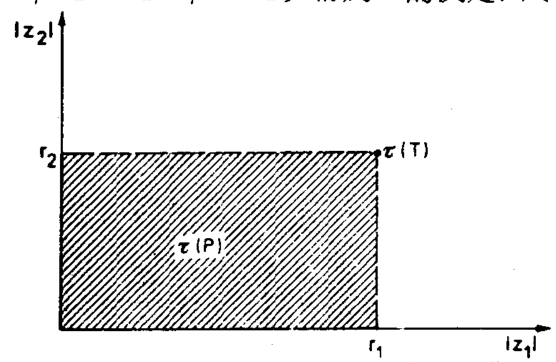

圖1　多面柱體在絕對空間上的像

$P=P_r(\mathfrak{z}_0)$ 爲 $\mathbb{C}^n$ 內一凸連域，決定面T爲P之拓樸邊界 ∂P 的一子集。在 $n=2$ 及 $\mathfrak{z}_0=0$ 時，很容易用圖說明：此時V爲 $\mathbb{R}^2$ 之四分之一平面，$\tau(P)$ 爲開的矩形而 $\tau(T)$ 爲 $\tau(P)$ 之邊界上的一點。因此

$$T=\left\{\mathfrak{z}\in\mathbb{C}^2:|z_1|=r_1,\ |z_2|=r_2\right\}=\left\{\mathfrak{z}=\left(r_1\cdot e^{i\theta_1},r_2\cdot e^{i\theta_2}\right)\in\mathbb{C}^2:0\leqslant\theta_1<2\pi,\ 0\leqslant\theta_2<2\pi\right\},$$

爲2維的環面。相對的，在n維情形爲n維環面（＝n個圓的笛卡兒乘積）。

若 $\mathfrak{z}_1\in\mathring{\mathbb{C}}^n:=\{\mathfrak{z}=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n:\ z_k\neq 0,\ 1\leqslant k\leqslant n\}$，則 $P_{\mathfrak{z}_1}:=\{\mathfrak{z}\in\mathbb{C}^n:|z_k|<|z_k^{(1)}|=:r_k,\ 1\leqslant k\leqslant n\}$ 應繞0多面柱體且半徑 $r=(r_1,\cdots,r_n)$。

> 定理 1.1：設 $\mathfrak{z}_1\in\mathring{\mathbb{C}}^n$。若冪級數 $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\mathfrak{z}^\nu$ 在 $\mathfrak{z}_1$ 上收斂，則在多面柱體 $P_{\mathfrak{z}_1}$ 的內部均勻收斂。

證明：

1 因級數在 $\mathfrak{z}_1$ 收斂，集合 $\{a_\nu\mathfrak{z}_1^\nu:|\nu|\geqslant 0\}$ 爲有界的。選定M使得對所有 ν：$|a_\nu z^\nu|<M$。若 $\mathfrak{z}_1\in\mathring{\mathbb{C}}^n$ 則對 $0<q<1$ 亦 $q\cdot\mathfrak{z}_1\in\mathring{\mathbb{C}}^n$。設 $P^*:=P_{q\cdot\mathfrak{z}_1}$。對 $\mathfrak{z}\in P^*$，$|\mathfrak{z}^\nu|=|z_1|^{\nu_1}\cdot\cdots\cdot|z_n|^{\nu_n}<|q\cdot z_1^{(1)}|^{\nu_1}\cdot\cdots\cdot|q\cdot z_n^{(1)}|^{\nu_n}=q^{\nu_1+\cdots+\nu_n}\cdot|z_1^{(1)}|^{\nu_1}\cdot\cdots\cdot|z_n^{(1)}|^{\nu_n}=q^{|\nu|}\cdot|\mathfrak{z}_1^\nu|$，即 $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|\cdot|\mathfrak{z}_1^\nu|\cdot q^{|\nu|}$ 爲 $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\mathfrak{z}^\nu$ 之強函數，因此亦有

$$M\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}q^{\nu_1+\cdots+\nu_n}=M\cdot\left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty}q^{\nu_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sum_{\nu_n=0}^{\infty}q^{\nu_n}\right)=M\cdot\left(\frac{1}{1-q}\right)^n.$$

重指標集 $\mathfrak{I}$ 爲可數的，故有一對射 $\Phi: \mathbb{N}_0 \to \mathfrak{I}$。設 $b_n(\mathfrak{z}) := a_{\Phi(n)} \cdot \mathfrak{z}^{\Phi(n)}$。則 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\mathfrak{z})$ 在 P^* 上絕對且均勻收斂。若 $\varepsilon > 0$ 給定，則有一 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得在 P^* 上 $\sum_{n=n_1+1}^{\infty} |b_n(\mathfrak{z})| < \varepsilon$。設 $I_0 := \Phi(\{0, 1, 2, \cdots, n_0\})$。設 I 爲有限集且 $I_0 \subset I \subset \mathfrak{I}$，則 $\{0, 1, \cdots, n\} \subset \Phi^{-1}(I)$，因此

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\mathfrak{z}) - \sum_{\nu\in I} a_\nu \mathfrak{z}^\nu\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\mathfrak{z}) - \sum_{n\in\Phi^{-1}(I)} b_n(\mathfrak{z})\right| =$$

$$= \left|\sum_{n\notin\Phi^{-1}(I)} b_n(\mathfrak{z})\right| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left|b_n(\mathfrak{z})\right| < \varepsilon \text{ 對於 } \mathfrak{z}\in P^*.$$

但此乃指 $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \mathfrak{z}^\nu$ 在 P^* 內均勻收斂。

2. 設 $K \subset P_{\mathfrak{z}_1}$ 爲緊緻的。$\{P_{q\cdot\mathfrak{z}_1}: 0 < q < 1\}$ 爲 $P_{\mathfrak{z}_1}$ 之一開蓋且因而亦爲K者。於是有一有限子蓋 $\{P_{q_1\cdot\mathfrak{z}_1}, \cdots, P_{q_\ell\cdot\mathfrak{z}_1}\}$。令 $q := \max(q_1, \cdots, q_\ell)$，則 $K \subset P_{q\cdot\mathfrak{z}_1}$，且 $P_{q\cdot\mathfrak{z}_1}$ 爲一個 P^*，如 1 內所討論者。因此 $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \mathfrak{z}^\nu$ 在K上均勻收斂，此即爲所要證者。

其次我們討論在何種集合上冪級數收斂。爲省去繁複符號起見，我們選 $\mathfrak{z}_0 = 0$ 爲展開點。對一般情形均有相對應之命題。

定義1.7：一域 $B \subset \mathbb{C}^n$ 稱爲Reinhardt 域，若：$\mathfrak{z}_1 \in B \Rightarrow T_{\mathfrak{z}_1} := \tau^{-1}\tau(\mathfrak{z}_1) \subset B$。

注意：$T_{\mathfrak{z}_1}$ 爲環面 $\{\mathfrak{z} \in \mathbb{C}^n : |z_k| = |z_k^{(1)}|\}$。定義1.7 的條件指出 $\tau^{-1}\tau(B) = B$，即Reinhardt 域B由其在絕對面上的像 $\tau(B)$ 完

全確定。

> 定理1.2：一域 $B \subset \mathbb{C}^n$ 爲Reinhardt 域的一充要條件爲有一開集 $W \subset V$ 使得 $B = \tau^{-1}(W)$。

證明：

1. 設 $B = \tau^{-1}(W)$，$W \subset V$ 爲開的。對 $\mathfrak{z} \in B$，則 $\tau(\mathfrak{z}) \in W$，故 $\tau^{-1}\tau(\mathfrak{z}) \subset \tau^{-1}(W) = B$。

2. 設B爲一Reinhardt 域。則 $B = \tau^{-1}\tau(B)$，只需證 $\tau(B)$ 爲開的即可。我們假設 $\tau(B)$ 不是開的。則有一點 $r_0 \in \tau(B)$ 不爲 $\tau(B)$ 之內點，故爲 $V - \tau(B)$ 之聚點。設 (r_j) 爲 $V - \tau(B)$ 內一序列收斂至 r_0。有一點 $\mathfrak{z}_j \in \mathbb{C}^n$ 使得 $r_j = \tau(\mathfrak{z}_j)$，故 $|z_p^{(j)}| = r_p^{(j)}$ 對所有 j 及 $1 \leqslant p \leqslant n$。因 (r_j) 收斂，有一 $M \in \mathbb{R}$，使得對所有 j 及 p，$|r_p^{(j)}| < M$。於是序列 $(\mathfrak{z}_j)$ 亦爲有界的，故有一聚點 $\mathfrak{z}_0$，且有一子序列 $(\mathfrak{z}_{j_\nu})$，$\lim\limits_{\nu \to \infty} \mathfrak{z}_{j_\nu} = \mathfrak{z}_0$。因 τ 爲連續的，故：$\tau(\mathfrak{z}_0) = \lim\limits_{\nu \to \infty} \tau(\mathfrak{z}_{j_\nu}) = \lim\limits_{\nu \to \infty} r_{j_\nu} = r_0$。因B爲Reinhardt 域，故：$\mathfrak{z}_0 \in \tau^{-1}(r_0) \subset \tau^{-1}\tau(B) = B$。B爲 $\mathfrak{z}_0$ 之開鄰域，故幾所有 $\mathfrak{z}_{j_\nu}$ 在B內，故幾所有 $r_{j_\nu} = \tau(\mathfrak{z}_{j_\nu})$ 在 $\tau(B)$ 內。此爲矛盾，故 $\tau(B)$ 爲開的。

Reinhardt 域在絕對空間上的像因此是一個開集（任意形狀），而此集的原像就是原來的集合。

定義1.8：設 $G \subset \mathbb{C}^n$ 爲一Reinhardt 域。

(1) G稱爲眞性的（簡稱眞的），當

(a) G爲一連域。

(b) $0 \in G$。

(2) G稱爲完全的，當

$\mathfrak{z}_1 \in G \cap \mathring{\mathbb{C}}^n \Rightarrow P_{\mathfrak{z}_1} \subset G$。

圖 2 是 $n = 2$ 時在絕對空間上的圖解。

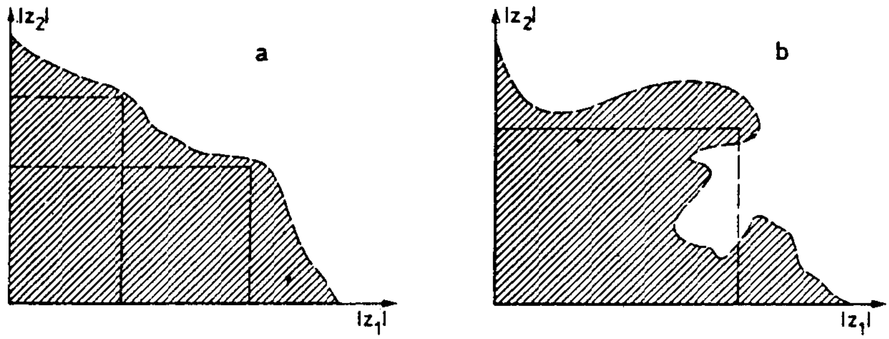

圖 2　(a)完全 Reinhardt 域；　(b)眞 Reinhardt 域

$n = 1$ 時 Reinhardt 域恰爲開圓環的聯集。眞 Reinhardt 域與完全 Reinhardt 域概念一致，均爲開圓盤。

$n > 1$ 時，多面柱體及"球" $K = \{ \mathfrak{z} : |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 < R^2 \}$ 顯然爲眞且完全的 Reinhardt 域。一般有：

定理 1.3：每個完全 Reinhardt 域爲眞的。

證明：設 G 爲完全 Reinhardt 域。有一點 $\mathfrak{z}_1 \in G \cap \mathring{\mathbb{C}}^n$，於是依定義：$0 \in P_{\mathfrak{z}_1} \subset G$。現只剩下證明 G 爲連域。

(a)　設點 $\mathfrak{z}_1 \in G$ 在一般位置上（即 $\mathfrak{z}_1 \in G \cap \mathring{\mathbb{C}}^n$）。於是 $\mathfrak{z}_1$ 與 0 間的整個連線在 $P_{\mathfrak{z}_1}$ 內，故亦在 G 內。

(b)　設 $\mathfrak{z}_1$ 在"軸"上。因 G 爲開的，有一鄰域 $U_\varepsilon(\mathfrak{z}_1) \subset G$，且可找出一點 $\mathfrak{z}_2 \in U_\varepsilon(\mathfrak{z}_1) \cap \mathring{\mathbb{C}}^n$。於是在 U_ε 內有一路線連結 $\mathfrak{z}_1$ 與 $\mathfrak{z}_2$，及在 G 內有一路線連結 $\mathfrak{z}_2$ 及 0。合起來於是得 G 內一路線連結 $\mathfrak{z}_1$ 及 0。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com