

高等 数学



辅导

(修订本)

同济·高等数学
(上下册合订本配套用书)

主 编 北京大学数学科学学院
邹本腾 漆毅 王奕倩

总策划 胡东华



科学技术文献出版社

高等数学辅导

同济·高等数学
(上下册合订本配套用书)

主 编 北京大学数学科学学院
邹本腾 漆 毅 王奕倩
总策划 胡东华

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北 京

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导/邹本腾等主编.

- 北京:科学技术文献出版社,1999.6

ISBN 7-5023-3298-7

I.高... II.邹... III.高等数学-高等学校-教学参考资料

IV.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 09978 号

出 版 者:科学技术文献出版社

邮 购 部 电 话:(010)62579473-8100

图书发行部电话:(010)62534708,62624508,62624119

门 市 部 电 话:(010)62534447,62543201

图书发行部传真:(010)62579473-8002

E-mail:stdph@istic.ac.cn

策 划 编 辑:王清富

责 任 编 辑:郭昊昊

责 任 校 对:李新之

封 面 设 计:胡东华

发 行 者:科学技术文献出版社发行 新华书店总店北京发行所经销

印 刷 者:河北小学印刷厂

版 (印) 次:2000 年 7 月第 1 版 2000 年 7 月第 1 次印刷

开 本:850×1168 大 32 开

字 数:550 千字

印 张:22.06

定 价:22 元

©版权所有 违法必究

购买本社图书,凡字迹不清、缺页、倒页、脱页者,本社发行部负责调换。

盗版举报电话:(010)62878310(出版者),(010)62534708(著作权者)。

本丛书封面均贴有“读书新知”激光防伪标志,凡无此标志者为非法出版物,盗版书刊因错漏百出、印刷粗糙,对读者会造成身心侵害和知识上的误解,希望广大读者不要购买。

(京)新登字 130 号

内 容 简 介

本书是与高等院校数学教材紧密结合的辅导教材,是高等工科院校不同专业的学生不可缺少的学习资料。

书中侧重对基础知识的详解与分析,旨在帮助考生练就扎实的基本功,以便在解题过程中融汇贯通。另外,本书还对重点、难点进行具体分析,对考试内容进行概括总结,以帮助考生理解记忆,达到复习的综合性、整体性,培养较强的“应试思维”、“应试能力”。

声明:本书封面及封底均采用专用图标(见右图),该图标已由国家商标局注册受理登记,未经本策划人同意禁止其他单位使用。



科学技术文献出版社
向广大读者致意

科学技术文献出版社成立于1973年,国家科学技术部主管,主要出版科技政策、科技管理、信息科学、农业、医学、电子技术、实用技术、培训教材、教辅读物等图书。

我们的所有努力,都是为了使您增长知识和才干。

前 言

高等数学在各个学科领域中的重要性是有目共睹的。但现在一个越来越突出的矛盾却摆在我们的面前：其一是学生课内、外时间的减少；其二是各科后续专业课及考研对高等数学的要求越来越高。如何解决这一矛盾，成为教和学双方共同面临的一个问题。

这本书正是为解决这一问题而精心编写的。在每一节的开头，我们用表格的形式分类列出这一节的主要内容，节省了读者做同样工作的时间。这一创意是在胡东华老师的直接指导下完成的，在同类书中尚属首例。对于例题，作者按分类的方式编排，把各种解题的技巧、方法、思路详细介绍给读者。并加了大量的注解，把容易出现的问题指出来，使读者少走弯路。其中加*号的内容较难，读者可根据需要自行选择。另外，每章都有一份提纲挈领的知识网络图，还附有最近几年考研真题评析，使读者对研究生入学考试的高等数学题的形式、难度有一定的了解，也便于考研的读者有针对性地复习。最后是同步自测题及答案。

在编写过程中，主编邹本腾及总策划胡东华做了大量组织编写及体例策划工作，特此致谢！由于编者水平有限，时间又仓促，不妥之处在所难免，希望广大读者不吝批评、指正。

编者

目 录

第一章 函数与极限	1
§ 1.1 函数	1
§ 1.2 极限	12
§ 1.3 函数的连续性	28
§ 1.4 无穷小量	44
本章知识网络图	49
历届考研真题评析	50
同步自测题	54
同步自测题参考答案	55
第二章 导数、微分及其应用	62
§ 2.1 导数	62
§ 2.2 微分与高阶导数	81
§ 2.3 导数的应用	89
本章知识网络图	138
历届考研真题评析	139
同步自测题	152
同步自测题参考答案	155
第三章 不定积分	173
本章知识网络图	197
历届考研真题评析	198
同步自测题	202
同步自测题参考答案	202
第四章 定积分及其应用	205
§ 4.1 定积分的定义与积分方法	205

§ 4.2 定积分的应用	237
§ 4.3 广义积分	256
本章知识网络图	272
历届考研真题评析	273
同步自测题	284
同步自测题参考答案	286
第五章 级数	300
§ 5.1 数值级数	300
§ 5.2 函数项级数	324
§ 5.3 幂级数	333
§ 5.4 傅立叶级数	353
本章知识网络图	366
历届考研真题评析	367
同步自测题	372
同步自测题参考答案	373
第六章 空间解析几何	382
§ 6.1 向量代数	382
§ 6.2 平面和直线	402
§ 6.3 空间曲面和曲线	426
本章知识网络图	440
历届考研真题评析	441
同步自测题	444
同步自测题参考答案	445
第七章 多元函数及其微分学	446
§ 7.1 多元函数的极限与连续性	446
§ 7.2 偏导数、全微分与微分法	457
§ 7.3 多元函数微分学的应用	474

本章知识网络图	485
历届考研真题评析	486
同步自测题	491
同步自测题参考答案	492
第八章 重积分	496
§ 8.1 二重积分	496
§ 8.2 三重积分	517
§ 8.3 重积分的应用	531
本章知识网络图	537
历届考研真题评析	538
同步自测题	543
同步自测题参考答案	547
第九章 曲线积分、曲面积分及场论初步	565
§ 9.1 第一型曲线积分与第二型曲线积分	565
§ 9.2 <i>Green</i> 公式、平面上曲线积分与路径无关的条件	579
§ 9.3 曲面积分	587
§ 9.4 <i>Gauss</i> 公式与 <i>Stokes</i> 公式及其应用	599
§ 9.5 场论初步	607
本章知识网络图	614
历届考研真题评析	615
同步自测题	623
同步自测题参考答案	626
第十章 常微分方程	640
§ 10.1 基本概念	640
§ 10.2 初等积分法 (I)	644
§ 10.3 初等积分法 (II)	654
§ 10.4 二阶线性微分方程	664

§ 10.5 一阶常系数线性微分方程组	674
本章知识网络图	683
历届考研真题评析	684
同步自测题	694
同步自测题参考答案	695

第一章 函数与极限

在这一章里,我们首先简单复习一下函数的定义、性质和几个常用的初等函数。然后研究序列、函数的极限,这其中包括它们几种情况下的不同定义形式和例题。最后我们讨论函数的连续性,以及如何利用函数的连续性的一些性质证明一些命题。

§ 1.1 函数

1.1.1 考试内容及理解记忆方法

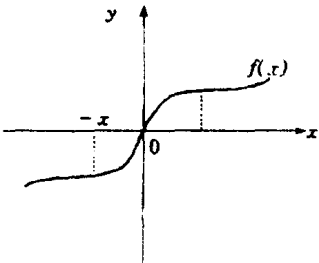
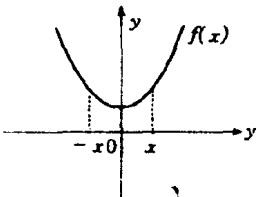
表 1.1.1 函数及相关的定义

名称	定 义	要点	补充说明
函数	给定集合 X , 若存在某种对应规则 f , 对于 $\forall x \in X$, 存在唯一 $y \in R$ 与之对应, 称 f 是从 X 到 R 的一个函数, 记作 $y = f(x)$; X 称为定义域, x 称为自变量, y 为因变量。 $\{f(x) \mid x \in X\}$ 为值域	对应规则、定义域	
函数的图形	平面上点集 $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ 称为函数 $f(x)$ 的图形		
复合函数	设函数 $y = f(u)$ 的定义域包含 $u = g(x)$ 的值域, 则在函数 $g(x)$ 的定义域 X 上可以确定一个函数 $y = f[g(x)]$, 称 g 与 f 的复合函数。记作 $y = f[g(x)]$ 或 $y = f \circ g$	对应规则、定义域, 值域	结合律成立 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, 但没有交换律, 即 $f \circ g \neq g \circ f$

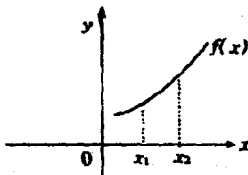
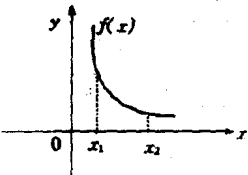
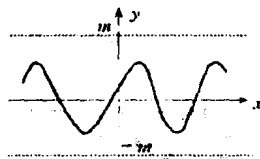
续表 1.1.1

名称	定 义	要点	补充说明
一一对应	设 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x_1, x_2 \in X$, 若由 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, 或者由 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上是一一对应的		一一对应的函数把不同的 x 变成不同的 y
反函数	设 $y = f(x)$ 在 X 上是一一对应的, 值域为 $Y, \forall y \in Y$, 用满足 $f(x) = y$ 的唯一确定的 $x \in X$ 与之对应, 由这样的关系所确定的函数 $x = f^{-1}(y)$ 就称为原来函数 $y = f(x)$ 的反函数		$f: X \rightarrow Y;$ $f^{-1}: Y \rightarrow X;$ $f^{-1}(f) = I_X: X \rightarrow X;$ $f \circ f^{-1} = I_Y: Y \rightarrow Y;$ $(f^{-1})^{-1} = f: X \rightarrow X;$ I_X 表 X 上恒同变换。
初等函数	基本初等函数经过有限次的四则运算及复合运算后所得到的函数	有限次复合	

表 1.1.2 函数的几种特性

性质	定 义	图例或说明
奇偶性	奇函数 函数 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x, -x \in X$, 且 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数	
	偶函数 函数 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x, -x \in X$, 且 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数	

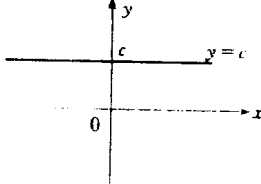
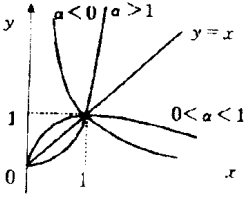
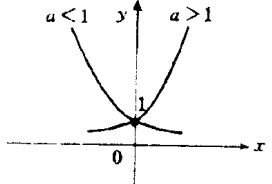
续表 1.1.2

性质	定义		图例或说明
单调性	单调上升(单调递增)	函数 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x_1, x_2 \in X$, 由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$	
	单调下降(单调递减)	函数 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x_1, x_2 \in X$, 由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$	
若严格不等号成立, 则称严格单调上升(下降)			
有界性	函数 $f(x)$ 在 X 上定义, 若 $\exists M > 0, \forall x \in X$, 有 $ f(x) \leq M$, (或 $\exists m, M$, 使得 $m \leq f(x) \leq M$ 成立), 则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有界函数		 即函数的图形位于 $y = M$ 与 $y = -M$ 之间
无界性	函数 $f(x)$ 在 X 上定义, 若 $\forall M > 0, \exists x' \in X$, 使得 $ f(x') > M$, 则称 $f(x)$ 在 X 上无界		例: $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界, 因为 $\forall M > 0$, 取 $x' = \frac{1}{3M}$, 则 $f(x') = 3M > M$

续表 1.1.2

性质	定 义	图例或说明
周期性	函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上定义, 若 $\exists T > 0, \forall x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数. 若在无穷多个周期中, 有最小的正数 T, 则称 T 为周期函数 $f(x)$ 的最小周期, 简称周期	若 T 是 $f(x)$ 的周期, 则 1° $f(x+kT) = f(x)$, (k 为整数); 2° $f(ax+b)$ ($a \neq 0, b \in \mathbb{R}$) 是一个以 $\left \frac{T}{a} \right$ 为周期的函数

表 1.1.3 基本初等函数

名称	定义式及性质	图例
常数函数	$y(x) = C, (-\infty < x < +\infty)$. 平行于 x 轴, 过 $(0, C)$ 点的直线	
幂函数	$y = x^a, (0 < x < +\infty, a \neq 0)$ $a > 0$ 时, 函数 x^a 在 $(0, +\infty)$ 上严格上升 $a < 0$ 时, 函数 x^a 在 $(0, +\infty)$ 上严格下降 $y = x^a$ 与 $y = x^{\frac{1}{a}}$ 互为反函数	
指数函数	$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ $a > 1$ 时, 函数 $y = a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格上升 $a < 1$ 时, 函数 $y = a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格下降	

名称	定义式及性质	图例
对数函数	$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1, 0 < x < +\infty)$ $a > 1$ 时, 函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格上升 $a < 1$ 时, 函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格下降 $y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ 互为反函数。(若 $a = e$, 记 $y = \log_e x$ 为 $y = \ln x$)	
三角函数	正弦函数 $y = \sin x, (-\infty < x < +\infty)$	
	余弦函数 $y = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x), (-\infty < x < +\infty)$	
	正切函数 $y = \tan x (x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$	
	余切函数 $y = \cot x (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$	

续表 1.1.3

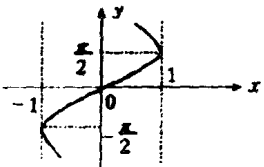
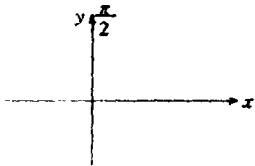
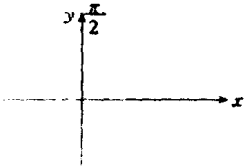
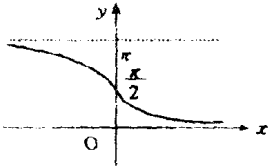
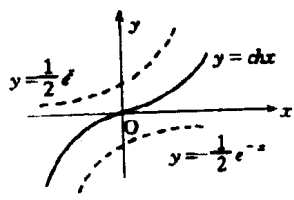
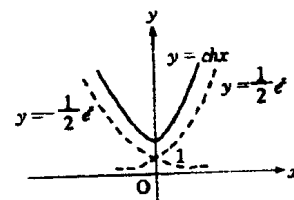
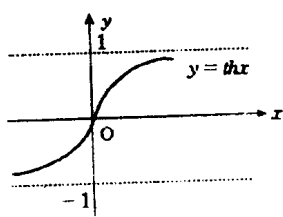
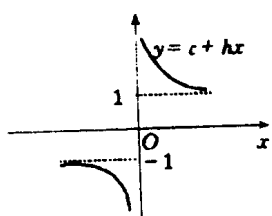
名称	定义式及性质	图例
	反正弦函数 $y = \arcsin x, (-1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2})$	
	反余弦函数 $y = \arccos x, (-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi)$	
反三角函数	反正切函数 $y = \arctan x, (-\infty < x < +\infty, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$	
	反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x, (-\infty < x < +\infty, 0 < y < \pi)$	

表 1.1.4 双曲函数

名称	定 义	图 形
双曲正弦	$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	
双曲余弦	$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	
双曲正切	$y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$	
双曲余切	$y = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$	

1.1.2 典型例题解析

例 1: 判别下列各组函数是否相等

(1) 函数 $f(x) = \frac{x}{x}$ 与 $g(x) = 1$

(2) 函数 $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = |x|$ 与 $h(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

【解题提示】 当且仅当给定的函数, 其定义域和对应关系完全相同时, 才表示同一函数, 否则表示不同的函数.

解: (1) 由于 f 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而 g 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 故 $f \neq g$

(2) 由于 f, g, h 的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$, 且对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 均有 $f(x) = g(x) = h(x) = |x|$, 故 $f = g = h$.

例 2: 求 $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{\lg \cos x}$ 的定义域

【解题提示】 求复杂函数的定义域, 就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组之解集

记住下列简单函数的定义域:

$$y = \frac{1}{x}, \quad D: x \neq 0, (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$y = \sqrt[2n]{x}, \quad D: x \geq 0, [0, +\infty)$$

$$y = \log_a x, \quad D: x > 0, (0, +\infty)$$

$$y = \tan x, \quad D: x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = \cot x, \quad D: x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = \arcsin x \text{ (或 } \arccos x), \quad D: |x| \leq 1, [-1, 1]$$

解: 只有 $\sqrt{4-x^2}$, $\lg \cos x$ 同时有意义, 且分母不为 0 的 x 才是 $f(x)$ 的定义域, 即

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0, \\ \cos x > 0, \\ \cos x \neq 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ 2n\pi - \frac{\pi}{2} < x < 2n\pi + \frac{\pi}{2}, (n=0, \pm 1 \cdots) \\ x \neq n\pi \end{cases}$$