高等学校数学教材配套辅导书

高等数学辅导

（修订本）

同济·高等数学

（上下册合订本配套用书）

主　编　北京大学数学科学学院
邹本腾　漆　毅　王奕倩

总策划　胡东华

科学技术文献出版社

高等数学辅导

同济·高等数学

（上下册合订本配套用书）

主　编　北京大学数学科学学院
邹本腾　漆　毅　王奕倩
总策划　胡东华

科学技术文献出版社
Scientific and Technical Documents Publishing House
北　京

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导/邹本腾等主编.
-北京:科学技术文献出版社,1999.6
ISBN 7-5023-3298-7
Ⅰ.高... Ⅱ.邹... Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.013
中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第09978号

出　　版　　者:科学技术文献出版社
邮 购 部 电 话:(010)62579473-8100
图书发行部电话:(010)62534708,62624508,62624119
门 市 部 电 话:(010)62534447,62543201
图书发行部传真:(010)62579473-8002
E-mail:stdph@istic.ac.cn
策　划　编　辑:王清富
责　任　编　辑:郭昊昊
责　任　校　对:李新之
封　面　设　计:胡东华
发　　行　　者:科学技术文献出版社发行　新华书店总店北京发行所经销
印　　刷　　者:河北小学印刷厂
版　(　印　)　次:2000年7月第1版　2000年7月第1次印刷
开　　　　　本:850×1168　大32开
字　　　　　数:550千字
印　　　　　张:22.06
定　　　　　价:22元

(京)新登字 130 号

内 容 简 介

本书是与高等院校数学教材紧密结合的辅导教材，是高等工科院校不同专业的学生不可缺少的学习资料。

书中侧重对基础知识的详解与分析，旨在帮助考生练就扎实的基本功，以便在解题过程中融汇贯通。另外，本书还对重点、难点进行具体分析，对考试内容进行概括总结，以帮助考生理解记忆，达到复习的综合性、整体性，培养较强的“应试思维”、“应试能力”。

前　言

高等数学在各个学科领域中的重要性是有目共睹的。但现在一个越来越突出的矛盾却摆在我们的面前：其一是学生课内、外时间的减少；其二是各科后续专业课及考研对高等数学的要求越来越高。如何解决这一矛盾，成为教和学双方共同面临的一个问题。

这本书正是为解决这一问题而精心编写的。在每一节的开头，我们用表格的形式分类列出这一节的主要内容，节省了读者做同样工作的时间。这一创意是在胡东华老师的直接指导下完成的，在同类书中尚属首例。对于例题，作者按分类的方式编排，把各种解题的技巧、方法、思路详细介绍给读者。并加了大量的注解，把容易出现的问题指出来，使读者少走弯路。其中加 * 号的内容较难，读者可根据需要自行选择。另外，每章都有一份提纲挈领的知识网络图，还附有最近几年考研真题评析，使读者对研究生入学考试的高等数学题的形式、难度有一定的了解，也便于考研的读者有针对性地复习。最后是同步自测题及答案。

在编写过程中，主编邹本腾及总策划胡东华做了大量组织编写及体例策划工作，特此致谢！由于编者水平有限，时间又仓促，不妥之处在所难免，希望广大读者不吝批评、指正。

编者

目　录

第一章　函数与极限

在这一章里，我们首先简单复习一下函数的定义、性质和几个常用的初等函数。然后研究序列、函数的极限，这其中包括它们几种情况下的不同定义形式和例题。最后我们讨论函数的连续性，以及如何利用函数的连续性的一些性质证明一些命题。

§1.1　函数

1.1.1　考试内容及理解记忆方法

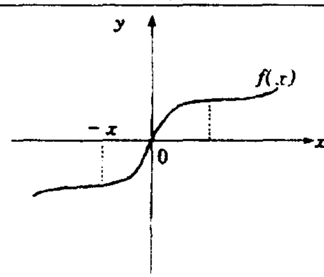
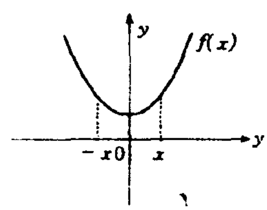
表 1.1.1 函数及相关的定义

名称	定　　义	要点	补充说明
函数	给定集合 X，若存在某种对应规则 f，对于 $\forall x \in X$，存在唯一 $y \in R$ 与之对应，称 f 是从 X 到 R 的一个函数，记作 $y = f(x)$；X 称为定义域，x 称为自变量，y 为因变量。$\{f(x) \mid x \in X\}$ 为值域	对应规则、定义域	
函数的图形	平面上点集 $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ 称为函数 $f(x)$ 的图形		
复合函数	设函数 $y = f(u)$ 的定义域包含 $u = g(x)$ 的值域，则在函数 $g(x)$ 的定义域 X 上可以确定一个函数 $y = f[g(x)]$，称 g 与 f 的复合函数。记作 $y = f[g(x)]$ 或 $y = f \circ g$	对应规则、定义域，值域	结合律成立 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$，但没有交换律，即 $f \circ g \neq g \circ f$

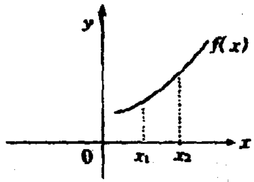
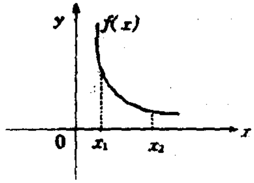
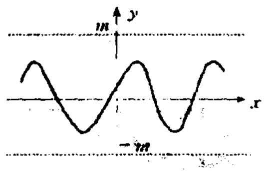
续表 1.1.1

名称	定　义	要点	补充说明
一一对应	设 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x_1, x_2 \in X$, 若由 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, 或者由 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上是一一对应的		一一对应的函数把不同的 x 变成不同的 y
反函数	设 $y = f(x)$ 在 X 上是一一对应的, 值域为 Y, $\forall y \in Y$, 用满足 $f(x) = y$ 的唯一确定的 $x \in X$ 与之对应, 由这样的关系所确定的函数 $x = f^{-1}(y)$ 就称为原来函数 $y = f(x)$ 的反函数		$f: X \to Y$; $f^{-1}: Y \to X$; $f^{-1}(f) = I_X: X \to X$; $f \cdot f^{-1} = I_Y: Y \to Y$; $(f^{-1})^{-1} = f: X \to X$; I_X 表 X 上恒同变换。
初等函数	基本初等函数经过有限次的四则运算及复合运算后所得到的函数	有限次复合	

表 1.1.2 函数的几种特性

性质	定　义		图例或说明
奇偶性	奇函数	函数 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x, -x \in X$, 且 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数	
	偶函数	函数 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x, -x \in X$, 且 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数	

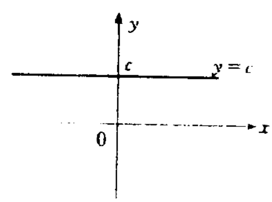
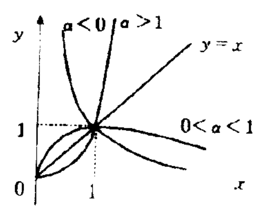
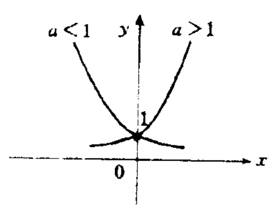
续表 1.1.2

性质	定义		图例或说明
单调性	单调上升(单调递增)	函数 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x_1,x_2 \in X$, 由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$	
	单调下降(单调递减)	函数 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x_1,x_2 \in X$, 由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$	
	若严格不等号成立,则称严格单调上升(下降)		
有界性	函数 $f(x)$ 在 X 上定义,若 $\exists M > 0, \forall x \in X$,有 $\lvert f(x) \rvert \leqslant M$,(或 $\exists m,M$,使得 $m \leqslant f(x) \leqslant M$ 成立),则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有界函数		 即函数的图形位于 $y = M$ 与 $y = -M$ 之间
无界性	函数 $f(x)$ 在 X 上定义,若 $\forall M > 0, \exists x' \in X$,使得 $\lvert f(x') \rvert > M$,则称 $f(x)$ 在 X 上无界		例: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界,因为 $\forall M > 0$,取 $x' = \dfrac{1}{3M}$,则 $f(x') = 3M > M$

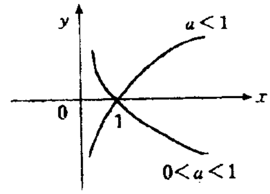
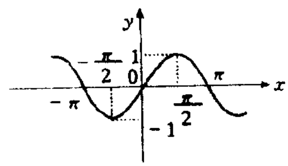
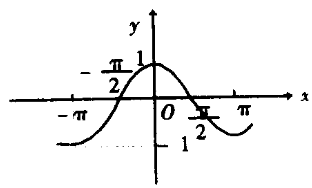
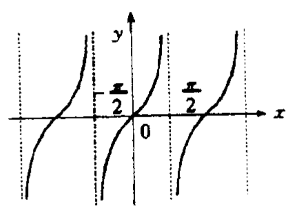
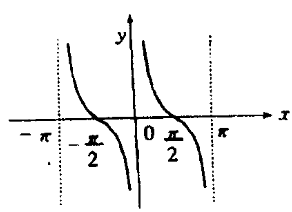
续表 1.1.2

性质	定　　义	图例或说明
周期性	函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上定义，若 $\exists T > 0, \forall x \in (-\infty, +\infty)$，有 $f(x+T) = f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数。若在无穷多个周期中，有最小的正数 T，则称 T 为周期函数 $f(x)$ 的最小周期，简称周期	若 T 是 $f(x)$ 的周期，则 1° $f(x+kT) = f(x)$，(k 为整数)；2° $f(ax+b)(a \neq 0, b \in R)$ 是一个以 $\left\|\frac{T}{a}\right\|$ 为周期的函数

表 1.1.3 基本初等函数

名称	定义式及性质	图例
常数函数	$y(x) = C$，$(-\infty < x < +\infty)$。平行于 x 轴，过 $(0, C)$ 点的直线	
幂函数	$y = x^{\alpha}$，$(0 < x < +\infty, \alpha \neq 0)$ $\alpha > 0$ 时，函数 x^{α} 在 $(0, +\infty)$ 上严格上升 $\alpha < 0$ 时，函数 x^{α} 在 $(0, +\infty)$ 上严格下降 $y = x^{\alpha}$ 与 $y = x^{\frac{1}{\alpha}}$ 互为反函数	
指数函数	$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ $a > 1$ 时，函数 $y = a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格上升 $a < 1$ 时，函数 $y = a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格下降	

续表 1.1.3

名称	定义式及性质	图例
对数函数	$y=\log_a x(a>0,a\neq 1,0<x<+\infty)$ $a>1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格上升 $a<1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格下降 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 互为反函数。(若 $a=e$，记 $y=\log_e x$ 为 $y=\ln x$)	
三角函数	正弦函数 $y=\sin x,(-\infty<x<+\infty)$	
	余弦函数 $y=\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x),(-\infty<x<+\infty)$	
	正切函数 $y=\tan x(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$	
	余切函数 $y=\cot x(x\neq k\pi,k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$	

续表 1.1.3

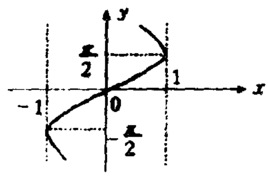
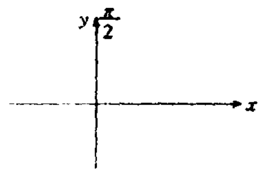
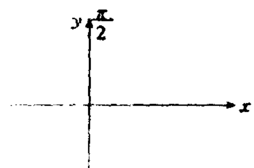
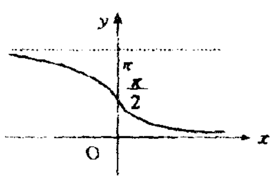
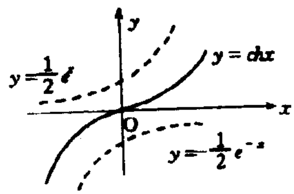
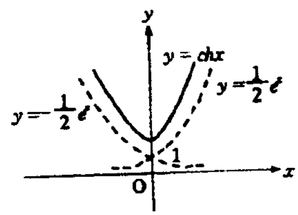
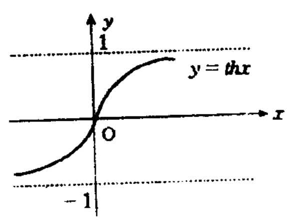
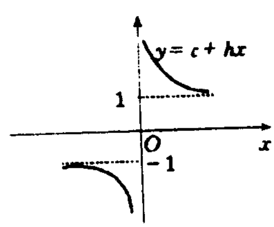
名称	定义式及性质	图例
反三角函数	反正弦函数 $y = \arcsin x$，$(-1 \leqslant x \leqslant 1, -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2})$	
	反余弦函数 $y = \arccos x$，$(-1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant \pi)$	
	反正切函数 $y = \arctan x$，$(-\infty < x < +\infty, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$	
	反余切函数 $y = \mathrm{arccot}\, x$，$(-\infty < x < +\infty, 0 < y < \pi)$	

表 1.1.4 双曲函数

名称	定　　义	图　　形
双曲正弦	$y = \mathrm{sh}x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	
双曲余弦	$y = \mathrm{ch}x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$	
双曲正切	$y = \mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$	
双曲余切	$y = \mathrm{cth}x = \dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}$	

1.1.2 典型例题解析

例 1:判别下列各组函数是否相等

(1) 函数 $f(x)=\frac{x}{x}$ 与 $g(x)=1$

(2) 函数 $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=|x|$ 与 $h(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$

[解题提示] 当且仅当给定的函数,其定义域和对应关系完全相同时,才表示同一函数,否则表示不同的函数。

解:(1) 由于 f 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 g 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,故 $f\neq g$

(2) 由于 f,g,h 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$,且对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 均有 $f(x)=g(x)=h(x)=|x|$,故 $f=g=h$.

例 2:求 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{lg\cos x}$ **的定义域**

[解题提示] 求复杂函数的定义域,就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组之解集

记住下列简单函数的定义域:

$y=\frac{1}{x}$, $D: x\neq 0, (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
$y=\sqrt[2n]{x}$, $D: x\geqslant 0, [0,+\infty)$
$y=\log_a x$, $D: x>0, (0,+\infty)$
$y=\tan x$, $D: x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$
$y=\cot x$, $D: x\neq k\pi, k\in Z$
$y=\arcsin x$(或 $\arccos x$), $D: \|x\|\leqslant 1, [-1,1]$

解:只有 $\sqrt{4-x^2}$, $\lg\cos x$ 同时有意义,且分母不为0的 x 才是 $f(x)$ 的定义域,即

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\ \cos x>0,\\ \cos x\neq 1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\ 2n\pi-\frac{\pi}{2}<x<2n\pi+\frac{\pi}{2}, (n=0,\pm 1\cdots)\\ x\neq n\pi\end{cases}$$