

目 录

绪言.....	(1)
第一章 脆性断裂的基本理论.....	(4)
1.1 固体的理想断裂强度	(4)
1.2 应力判据	(6)
1.3 裂纹扩展的基本类型	(7)
1.4 Griffith 脆性断裂理论.....	(7)
1.5 裂纹尖端的应力场和位移场	(12)
1.6 Irwin 的断裂判据—— K 判据	(15)
1.7 Barenblatt 理论	(18)
1.8 准脆性材料的断裂	(19)
1.9 线弹性断裂力学的适用范围—— K 主导区	(22)
习题.....	(24)
参考资料.....	(26)
第二章 应力强度因子.....	(27)
2.1 应力强度因子的解析解	(27)
2.2 应力强度因子的数值计算	(36)
2.3 应力强度因子的工程计算	(48)
2.4 三维裂纹问题	(56)
2.5 裂纹体变形的求法	(63)
2.6 有裂纹构件的静不定结构分析	(69)
2.7 用柔度实验测定应力强度因子	(72)
习题.....	(74)
参考资料.....	(77)
第三章 复合型裂纹的脆性断裂判据.....	(79)
3.1 最大周向拉应力理论	(79)
3.2 能量释放率理论	(81)
3.3 应变能密度理论	(83)
3.4 复合型裂纹脆性断裂的工程判据	(89)
习题.....	(90)

参考资料.....	(91)
第四章 断裂韧性及其测试.....	(92)
4.1 影响断裂韧性的因素.....	(92)
4.2 平面应变断裂韧性 K_{Ic} 的测定.....	(95)
4.3 航空常用金属材料平面应变断裂韧性 K_{Ic} 数据集.....	(101)
习题.....	(107)
参考资料.....	(107)
第五章 弹塑性断裂力学.....	(108)
5.1 前言.....	(108)
5.2 塑性力学的基本概念.....	(109)
5.3 裂纹尖端张开位移(COD).....	(113)
5.4 III 型裂纹小范围屈服条件下的弹塑性解.....	(116)
5.5 J 积分及其作为场的参数.....	(119)
5.6 J 积分的计算和试验测定.....	(123)
5.7 J 积分与 COD 的关系.....	(127)
5.8 在 J 控制下的裂纹扩展与稳定性.....	(128)
5.9 弹塑性断裂分析的工程方法.....	(132)
习题.....	(136)
参考资料.....	(137)
第六章 平面应力及过渡型断裂问题.....	(139)
6.1 平面应力的断裂特性.....	(139)
6.2 应力强度因子分析法.....	(140)
6.3 R 曲线法.....	(144)
6.4 厚度的影响.....	(148)
6.5 平面应力断裂试验.....	(151)
习题.....	(154)
参考资料.....	(155)
第七章 动态断裂力学.....	(156)
7.1 裂纹的失稳扩展速度.....	(156)
7.2 弹性动态裂纹的奇异场.....	(158)
7.3 裂纹的分叉现象.....	(161)
7.4 动态裂纹扩展的断裂韧性 K_{ID}	(162)
7.5 裂纹动态扩展中的止裂现象与止裂韧性 K_{L}	(163)
7.6 高速加载下的动态断裂和动载断裂韧性 $K_{I\dot{L}}$	(164)
参考资料.....	(165)

第八章 复合材料断裂力学	(166)
8.1 各向异性断裂力学	(166)
8.2 胶结断裂力学	(168)
8.3 单向纤维复合材料的拉伸	(170)
参考资料.....	(175)
第九章 断裂力学在工程上的应用	(176)
9.1 加劲板的损伤容限分析	(176)
9.2 疲劳裂纹扩展分析	(183)
9.3 疲劳裂纹扩展寿命计算	(192)
9.4 缺口疲劳裂纹扩展中的短裂纹问题	(195)
9.5 应力腐蚀开裂	(197)
9.6 损伤容限设计简介	(199)
参考资料.....	(202)
附录	(203)
附录 A 弹性理论的基本方程.....	(203)
附录 B Fourier 变换解平面弹性力学问题	(206)
附录 C 常用应力强度因子汇集.....	(209)
附录 D 全塑性解汇编	(217)

绪 言

结构工程师们都熟悉材料力学的分析方法。它是针对一个具有特定几何形状的结构(没有任何缺陷)来确定其承载能力,或者,已给荷载大小及分布选取结构的尺寸。要完成这一工作,首先要确定外荷载与结构中最大应力的关系,然后将这样得到的最大应力与材料的强度相比较。考虑到材料数据的分散性,工艺制造的偏差和偶然的过载等等不可确定的预料因素,引入一个安全系数 f 。材料的强度被安全系数除得材料的许用应力。当最大应力小于材料的许用应力,就认为设计的结构是安全的。

例如,图 0.1a 中双支点简支梁,梁长度为 L ,梁横剖面为矩形,高度为 H ,厚度为 B ,在跨度中点受集中荷载 P 作用。由材料力学知道,最大拉应力出现在跨度中点的下表面,它与外荷载、构件尺寸的关系为

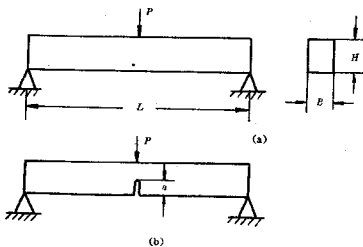


图 0.1

$$\sigma_{\max} = \frac{3PL}{2BH^2} \quad (0.1)$$

令材料的许用应力 $[\sigma] = \sigma_s / f$, σ_s 为屈服应力,当

$$P < \frac{2BH^2}{3Lf} \sigma_s \quad (0.2)$$

于是结构是安全的。

对于飞机结构,为了寻求安全可靠重量最轻的结构,采用按破坏荷载设计的原则,即把使用中出现的最大荷载乘以安全系数得设计荷载。按此设计荷载求得结构中最大应力不得大于材料的强度。

运用上述强度准则是长期来人们习惯采用的方法。按照这种方法进行安全设计的某些工程结构,尤其是使用高强度材料的结构,在安装、试验、使用过程中,往往发生“低应力脆性破坏”事故。很多断裂事故都是在低于材料屈服应力下发生的。这些破坏事故,既无法用传统的

材料力学观点解释,也无法用传统的材料机械性能指标加以衡量。

意外的断裂事故,在历史上是层出不穷的。Anderson^[1]收集了近二百年事故实例, Biggs^[2]也进行了详细叙述。这些事故出现在工程结构的许多方面,如火车设施、桥梁、轮船、飞机、石油管道、储气罐、水管与水塔、蒸气锅炉、吊车、枪炮、糖浆罐等等。举几例如下:

1860年到1870年间,英国每年死于铁路事故的人数约为200名,大多数是由于车轮、车轴或轨道断裂造成的出轨事故。

1938年3月14日,比利时架设在阿尔伯特运河上的费康尔德大桥(桁架式结构)断成三段,坠入河中。1947年至1950年,比利时有14起桥梁构件发生脆性破坏事故。事后分析指出,事故大都是出现初始裂纹造成的。

第二次世界大战中焊接技术发展,建造了许多大型焊接结构物,如大型贮油罐、铁桥、高压气体输送管道和全焊接运输船等。由于焊缝处存在夹杂或未焊透等原因出现应力集中,常常导致脆性断裂事故。如美国在第二次世界大战期间建造的2500艘自由轮,有近700艘发生了严重的破坏,其中有145艘断成两截,有10艘的破坏是在平静的海面上发生的。

1954年美国大型喷气民航机慧星号坠毁在地中海中,这是由于气密座舱窗口角上机身蒙皮铆钉孔边出现裂纹造成的破坏事故。

1958年美国北极星导弹固体燃料发动机壳体在试验发射时发生爆炸,其材料是用屈服应力 $\sigma_s = 1.37\text{GPa}$ 的高强度钢,传统的强度和韧性指标全部合格,而爆炸时的工作应力远低于材料的许用应力,调查研究表明,这种低应力脆性破坏是由于深度为0.1至1mm的裂纹造成的。

1969年11月美国F-111机在执行飞行训练,作投弹恢复动作时,左翼脱落招致飞机坠毁。据分析,当时飞机的速度、总重和过载等指标远低于设计载荷,主要是机翼大梁由于热处理不当出现缺陷而引起低应力脆性破坏。

1972年我国坠毁了一架歼5飞机,是由于机翼主梁螺栓孔边裂纹扩展造成的。

1979年5月25日一架DC-10巨型三引擎喷气客机,起飞后不久就掉了左边一具引擎,随即着火燃料,然后爆炸坠毁,273名乘客和机组人员全部死亡。事故原因是飞机上连接一具引擎与机翼的螺栓因疲劳而断裂。

分析许许多多的灾难性事故的原因,发现这种低应力脆性破坏主要是由宏观尺寸的裂纹源引起的,这些裂纹源可能是焊接质量不高、内部有夹杂或存在应力集中、使用过程中腐蚀、疲劳引起的裂纹等等。尤其是现代高强度材料的大量使用,这些材料对裂纹非常敏感,促使断裂事故的不断增长。因此,我们必须重视裂纹的存在。不承认裂纹存在的传统的材料力学和弹塑性力学的判断强度的准则显然是不够用了,我们还需要研究带裂纹物体的种种的力学性质。因此,在生产斗争中,在惨痛事故的基础上逐渐形成了一门新型学科——断裂力学。

断裂是由于裂纹的不稳定扩展造成的。因此,断裂力学判断强度的准则与裂纹尖端的力学状态有关。对于脆性材料,根据线弹性力学的分析知道,有一个衡量裂纹尖端应力场强弱程度的力学参数 K ,叫应力强度因子,它与结构几何形状和外载荷有关。相对应地,材料存在一个断裂韧性 K_{Ic} 这样一个材质参数。因此, K 小于 K_{Ic} ,结构是安全的。

例如,图0.1b双支承梁,是由于图0.1a梁在最大应力处出现垂直外表面的长为 a 的一条裂纹而来的。若裂纹较短($a/H \ll 1$),应力强度因子的一个较理想的近似解为

$$K = 1.12\sigma_{\max} \sqrt{\pi a} \quad (0.3)$$

式中 σ_{\max} 为无裂纹时,相应裂纹位置的应力。保证 K 小于 K_{Ic} ,就可以将结构设计得安全可靠。

若 $K < (K_{Ic}/f)$, 就更有一定的安全裕度。用 (0.1) 式中的 σ_{max} 代替 (0.3) 式中的 σ_{max} , 就可得此种含短裂纹梁的安全载荷为

$$P < \frac{2BH^2}{3Lf} \frac{K_{Ic}}{1.12\sqrt{\pi a}} \quad (0.4)$$

比较 (0.2) 与 (0.4) 两式, 可看出两式含有不同的材料参数, 但 (0.4) 式还引入了裂纹长度。这一种分析方法就是断裂力学的分析方法。

因此, 断裂力学是研究含裂纹物体的变形体力学。一方面运用弹性力学、塑性力学以及实验力学的方法, 获得各种结构型式在外载荷作用下, 裂纹尖端的力学参数; 另一方面通过试验方法, 测量各种材料在不同的热处理条件下上述力学参数的临界值和裂纹在重复载荷作用下的扩展规律。掌握了断裂力学后, 可以应用它处理下列问题:

1. 结构型式已定, 裂纹的情况已知, 这个含裂纹结构的承载能力如何(剩余强度为多少)?
2. 结构型式已定, 外载荷已知, 允许最长的裂纹是多少? 即确定损伤容限。
3. 已知结构的损伤容限(容许的最长裂纹)和外载荷, 如何使结构中各部件的截面尺寸满足要求, 这是损伤容限设计的内容。例如 DC-10 机身壳体损伤容限为: 中心隔框完整的两跨距纵向裂纹及中心桁条断裂的两跨距周向裂纹。由于气密舱要保证一定的内外压力差, 因而外载荷是确定的。因此, 要精心设计加劲件(隔框、桁条的尺寸)及紧固件的直径及间距等, 以确保结构安全可靠。

4. 寿命计算。在重复载荷作用下, 计算初始裂纹长度扩展至容许裂纹(或临界裂纹)长度所需的加载次数, 或谱载荷作用下的飞行小时数。

5. 选择材料。什么材料可以容许比较长的裂纹存在而不发生断裂, 什么材料抵抗裂纹扩展的性能比较好, 什么材料抗腐蚀性较好。

目前用线弹性断裂力学解决脆性与准脆性断裂问题虽然还有不少问题, 但基本上已得到公认。但对裂纹尖端大范围屈服甚至全面屈服的断裂问题, 即所谓弹塑性断裂问题, 虽然提出了不少理论, 但由于问题更复杂, 目前尚未获得统一的解决办法, 仍然是力学工作者、材料工作者特别关注的问题。断裂的本质是材料微观结构联系的破坏, 因此, 必须从微观出发或宏观与微观相结合的方法进行研究, 才有可能解决物体的断裂问题。

参 考 文 献

- [1] Anderson, W. E., An engineer views brittle fracture history, Boeing rept., 1969.
- [2] Biggs, W. D., The brittle fracture of steel, McDonald and Evans, 1960.

第一章 脆性断裂的基本理论

1.1 固体的理想断裂强度

物体是由原子组成的,原子之间靠电磁力结合在一起。固体被拉伸,显然是破坏了原子之间的结合。

固体分为晶体和非晶体。我们讨论晶体。晶体内部的原子按一定次序排列,组成一个三向晶格,晶格的形状是多种多样的。我们研究立方体晶格。这种晶格的八个原子排列在八个角点上,原子之间有原子键相连接。

我们考虑图 1.1.1 所示的晶体,加载前它们的原子之间的距离为 b_0 。现在要回答一个问题:沿着原子键的方向要加多大的应力 σ ,才能使平面 XX' 处出现断裂呢?

断裂面两边的一对原子,例如 C 和 C' ,除了它们之间有相互作用力外,其它的原子也对 C 和 C' 有作用。为了简化问题,只考虑 C 和 C' 一对原子之间的作用力。

我们知道,未损伤的固体的特性是体积一定且很难压缩。产生这两种特性的原因是因为原子之间有两种作用力存在:(1)原子之间必定存在使它们结合在一起的吸引力,因而保持体积一定;(2)原子之间必定有排斥力作用,因为要用很大的压力才能使固体压缩一个很微小的量。由量子力学可以近似地得到一对孤立原子之间的结合力 F 与原子之间距离 b 的数学关系式

$$F(b) = \alpha b^{-m} - \beta b^{-n}$$

式中 α, β, m, n 为原子的特征常数,且 $m > n > 1$ 。显然,吸引力等于 αb^{-m} ,排斥力等于 βb^{-n} 。当没有外力作用时 $F(b) = 0$,即原子本身之间的吸引力与排斥力处于平衡状态,它们之间的距离为

$$b_0 = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{m-n}}$$

$F(b)$ 随 b 的变化规律见图 1.1.2。从图中我们可以看到,结合力 F 有一个最大值,过了这一最大值后,随着原子之间距离的拉大,结合力迅速减少。严格地说,要使原子之间没有作用力存在,必须把原子从平衡位置分开到无限大的距离。现在计算一下要这样作的话,外界需要对原子作多少功?显然,外界应提供的能量就是 $F(b)$ 曲线和横坐标之间所包围的面积,即

$$V_0 = \int_{b_0}^{\infty} F(b) db = \frac{\alpha}{n-1} b_0^{n+1} - \frac{\beta}{m-1} b_0^{m+1}$$

式中 V_0 只与原子特征常数 α, β, m, n 有关,是一个材料常数。如果在外力作用下,要使原子键拉断,外界提供的能量不能小于 V_0 。

从微观看,物体的断裂是原子键的破坏。从宏观看,物体断裂后将出现断裂面,令 γ 为产生单位断裂面所需要的表面能。但是,断裂面总是成对的出现,所以,实际上单位面积拉断后,就

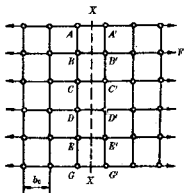


图 1.1.1

出现两个单位面积,外界需要的能量为 2γ 。 ν 是材料常数,由实验测定,实测是相当困难的。 ν 在熔融状态时就是表面张力,所以可把它外推到固体状态。表面能体现在哪些方面呢?实际生活中,我们经常碰到这样的现象,当物体断裂时可以听到响声,断裂表面及其附近区域可能发热,还可能产生我们感受不到的电磁辐射,断裂能量大的话还可能发光。原来,外界对物体做功形成新裂纹表面所需要的能量转换成声、光、电、热的能量消耗掉。所以,这一断裂过程在通常情况下是一个不可逆过程。

一对原子之间的结合力可以看成分布作用在 $b_0 \times b_0$ 的结晶面上的正应力,即 $\sigma = F(b)/b_0^2$ 。将图 1.1.2 的纵坐标除以 b_0^2 ,则纵坐标变成应力轴,再将坐标原点移至 b_0 ,横坐标变成位移轴, $u = b - b_0$ 。因此,可得应力位移曲线。曲线与横坐标之间的面积即为单位面积断裂所需要的能量 2γ 。曲线的峰值应力即为我们寻求的结晶体的理想断裂强度 σ_a 。这条曲线可近似地看作正弦曲线的半个波^[1]

$$\sigma = \sigma_a \sin\left(2\pi \frac{u}{\lambda}\right)$$

式中 λ 为波长。积分半个波下的面积可以得到

$$2\gamma = \int_0^{\lambda/2} \sigma_a \sin\left(2\pi \frac{u}{\lambda}\right) du = \frac{\lambda}{\pi} \sigma_a$$

对于小应变情况,有 $\sigma \approx \sigma_a \cdot 2\pi u/\lambda$,再引入弹性系数 E ,有关系式 $\sigma = E u/b_0$,可以求得理想断裂强度为

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{E\gamma}{b_0}} \quad (1.1.1)$$

对于铁, $\gamma = 200 \mu\text{N/m}$, $E = 200\text{GPa}$, $b_0 = 0.25\text{nm}$, 则得 $\sigma_a = 40\text{GPa} = E/5$ 。对于氯化钠, $\gamma = 14.9 \mu\text{N/m}$, $E = 50\text{GPa}$, $b_0 = 0.28\text{nm}$, 则得 $\sigma_a = 5.17\text{GPa} \approx E/10$ 。对于许多材料 $\gamma = E b_0/40$, 所以 $\sigma_a \approx E/6$ 。

实际上很难达到这样高的强度。Griffith^[2]对不同厚度的平板玻璃进行了一系列的均匀拉伸试验,结果如图 1.1.3 所示,随着板厚的降低,破坏应力却在增加。当厚度增加到某一极限后,破坏应力基本不变。当厚度趋于零时,破坏应力趋于理想强度。因此,Griffith 指出很细的纤维(直径约 $1 \mu\text{m}$),例如拉制的玻璃纤维和二氧化硅纤维,差不多可达到理想断裂强度。现在发展得很快的复合材料,就是人们认识到越细的纤维强度越高的特点,将许多碳纤维或碳纤维或玻璃纤维等用树脂粘在一起,经固化后形成的。这种材料具有较高的强度密度比,将为越来越多的飞机结构所采用。

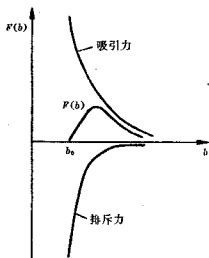


图 1.1.2

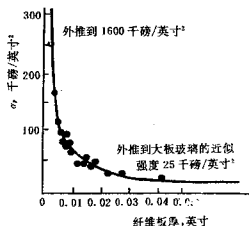


图 1.1.3

1.2 应力判据

多数固体的理想断裂强度的数量级为 $E/6$, 但是, 实际上晶体和玻璃的强度仅为此值的 $1/100$ 。例如, 通常民用建筑物窗子上的玻璃理想断裂强度约 7GPa , 实际断裂强度仅为 60MPa 。Griffith^[2]首先提出了理想值与实际值差别的原因。他认为一个宏观的均质试件可能含有很小的缺陷, 在缺陷的某一部位产生严重的应力集中, 局部应力可能达到理想的断裂强度。Orowan^[3]进行了理论计算, 他将缺陷理想化为受单向均匀拉伸应力 σ 作用的无限大板中的一个椭圆孔, 椭圆长轴垂直外加应力, 如图 1.2.1 所示。采用 Inglis^[4]的线弹性解, 对于长轴为 $2a$ 的椭圆孔, 当长轴端点的曲率半径为 $\rho \ll a$, 在 $0 \leq x \leq a$ ($x/a \ll 1$) 的范围内, x 轴上的应力分布为(应力垂直 x 轴)

$$\frac{\sigma_y}{\sigma} = \sqrt{\frac{a}{2x + \rho}} \left(1 + \frac{\rho}{2x + \rho}\right) + \frac{\rho}{2x + \rho}$$

由上式可见, 最大的应力集中出现在长轴端点 ($x=0$ 处), 此处最大局部应力为

$$(\sigma_y)_{\max} = \sigma \left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}\right) = \sigma \left(1 + 2\frac{a}{b}\right) \quad (1.2.1)$$

按照应力判据, 当缺陷端点的最大局部应力等于固体材料的理想断裂强度时, 固体材料就发生断裂, 即材料的断裂判据的表达式为

$$(\sigma_f)_{\max} = \sigma_h \quad (1.2.2)$$

分别将 (1.2.1) 式和 (1.1.1) 式代入上式, 即使得固体材料断裂的外加应力为

$$\sigma_f = \frac{\sqrt{\frac{EY}{b_0}}}{1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}} \quad (1.2.3)$$

由于固体材料中的缺陷是类似裂纹状的缺陷, 我们可以用原子间距 b_0 代替 ρ , 并且 $a/\rho \gg 1$, 最后得外加断裂应力为(或承载能力)

$$\sigma_f = 0.5 \sqrt{\frac{EY}{a}} \quad (1.2.4)$$

或

$$\sigma_f \sqrt{a} = 0.5 \sqrt{EY} \quad (1.2.5)$$

(1.2.5) 式是很有意义的, 说明承载能力与裂纹长度的平方根的乘积是一个材料常数。裂纹越长, 承载能力越高; 裂纹越长, 承载能力越低。

大多数材料的表面能 $\gamma \approx Eb_0/40$, 若宏观缺陷长度 $2a \approx 4500b_0$, 则其承载能力仅为理想断裂强度的 $1/100$ 。

上面的分析方法是早期对实际断裂强度的很粗糙的估计, 它是采用宏观的线性连续体力学的方法, 分析微观的不连续的原子之间的非线性的受力情况, 当然这是很勉强的。但是, 所得

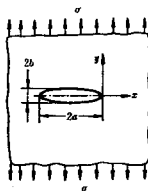


图 1.2.1

出的承载能力与裂纹长度的平方根的乘积是一个材料常数的结论,与后面即将讲到的其他断裂判据的结论是吻合的。

1.3 裂纹扩展的基本类型

我们知道裂纹的存在大大地降低了物体的承载能力,它将在较低的载荷水平下从裂纹尖端开始出现裂纹扩展,最后导致物体的断裂。因此,裂纹尖端邻域裂纹表面的变形情况对断裂强度的影响是很大的。我们在裂纹前缘任意一点的附近取出一包括裂纹表面在内的微小部分,假定裂纹前缘是一条平滑的曲线,则这一微小部分裂纹前缘可以用该点的曲线的切线代替。我们可以从裂纹表面的变形情况把裂纹的扩展分成三种基本类型:

张开型或简称 I 型 裂纹表面的相对位移沿着自身平面的法线方向;

滑开型或简称 II 型 裂纹表面的相对位移在裂纹面内,并且垂直于裂纹前缘;

撕开型或简称 III 型 裂纹表面的相对位移在裂纹面内,并且平行于裂纹前缘的切线方向。

这三种基本类型的变形形如图 1.3.1。

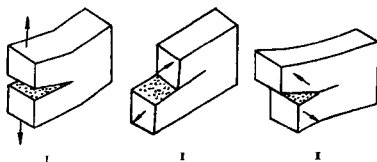


图 1.3.1

对于一般受力情况则是复合型裂纹,可以同时存在三种位移分量,也可以是任何两个位移分量的组合。对于某些弹性体,则可分别求出三个或两个位移分量,然后应用叠加原理得到复合型裂纹的位移。所以着重分析上述三种基本类型的裂纹的受力特点是非常必要的。工程上 I 型裂纹出现得最多,也最危险,研究也比较深入,因此,本书内容以 I 型裂纹为主。但是,III 型裂纹数学分析比较简单,可以较方便地找到封闭形式的解,从解答中发现一些规律性的东西。

我们必须正确判断含裂纹的承载结构的受力特点,才能正确地进行断裂分析和建立断裂判据。

1.4 Griffith 脆性断裂理论

Griffith^[2]从能量守恒原理出发,对玻璃、陶瓷等脆性材料作了断裂强度分析,从而奠定了线性断裂力学的基础。

研究图 1.4.1 所示厚度为 B 的一块有裂纹的平板,裂纹长度为 a ,在很远处的垂直裂纹方向受单向拉伸应力 σ 。假定外载荷 σ 随着时间慢慢增加,同时裂纹也随着时间扩展。由于裂纹的扩展产生新裂纹表面,从

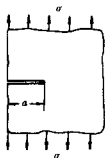


图 1.4.1

1.1 节中我们已经知道,产生新裂纹表面要消耗能量,产生 $dA=Bda$ 的断裂面积需要外界提供 $d\Gamma=2\sigma dA$ 的能量。因此,外载荷 σ 对裂纹板所作的功 dW 一部分变成板的弹性应变能 dU 储存在板里,另一部分由于形成新裂纹表面而消耗。所以这时的能量守恒定律为:单位时间外界给板的能量,等于单位时间板的应变能的增加与单位时间裂纹扩展所消耗的表面能之和,写成数学表达式为

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dU}{dt} + \frac{d\Gamma}{dt} \quad (1.4.1)$$

注意,这一能量守恒定律在通常的情况下是不可逆的,也就是说裂纹在外载荷作用下经裂开,如把引起断裂的外载荷去掉,其它条件保持不变,这物体并不会自动地合起来。

令 $F=U-W+\Gamma$ 为自由能,则(1.4.1)式的等价表达式为

$$\frac{dF}{dt} = 0 \quad (1.4.1')$$

此式说明裂纹扩展时自由能 F 达到驻值。

W, U 是外载荷 σ 和裂纹面积 $A=Ba$ 的函数,但 Γ 只是 A 的函数(如果材料是均质的话),同时 σ, A 又是时间的函数。假定讨论准静态加载的情况 $d\sigma/dt \approx 0$, 所以(1.4.1)式可以写成

$$\frac{\partial W}{\partial A} = \frac{\partial U}{\partial A} + 2\gamma$$

或

$$-\left(\frac{\partial \Pi}{\partial A}\right) = 2\gamma \quad (1.4.2)$$

式中 $\Pi=U-W$ 为系统的位能。(1.4.2)式的左边是假设裂纹扩展时,整个受力系统的弹性位能释放率或能量释放率,记为

$$G = -\frac{\partial \Pi}{\partial A} \quad (1.4.3)$$

它是与受力结构型式(包括裂纹长度、形状、位置及结构其它几何形状)以及外载荷有关的一个力学参数。 G 的单位为 N/m ,从这个单位来看, G 似乎有裂纹扩展单位长度所需要的力这样一个含义,所以有时又把 G 叫做裂纹扩展力,把它看作企图驱动裂纹扩展的原动力。(1.4.2)式的右边为 2γ ,我们已经知道它是单位面积断裂所需要的能量,叫表面能,它是与材料有关的一个参数,基本上可以看作一个材料常数。与 G 相对照,也经常使用下面的两个名称,一个叫临界能量释放率 G_c ,一个叫裂纹扩展阻力 R 。如果力学参数 G 小于材料的 G_c 时,则裂纹不会扩展;若 G 等于材料的 G_c ,则裂纹可能扩展;若 G 大于 G_c ,裂纹一定扩展,所以断裂判据的数学表达式为

$$G \geq G_c \text{ (或 } R) \quad (1.4.4)$$

裂纹物体在加载过程中,当 $G=G_c$,裂纹可能开始扩展,但这种扩展是稳定扩展还是不稳定扩展或失稳快速扩展呢?所谓稳定扩展是只有进一步增加外载荷才能迫使裂纹继续扩展,载荷不增加,裂纹也不扩展。所谓不稳定扩展是裂纹一经开裂,即使外载荷不增加,裂纹也会快速地扩展,直至受力结构断裂(如果没有其它止裂措施的话)。裂纹失稳快速扩展是很危险的,在一些结构设计中我们可以修改设计采用止裂措施或加强措施,使处于快速扩展的裂纹止住,例如机翼、机身结构中采用加劲板,合理地选择加劲板的尺寸就可以达到此目的,本书第九章将要详细叙述。

判断裂纹是稳定扩展还是不稳定的快速扩展,要看裂纹扩展后的能量释放率是降低了还是增加了。若能量释放率降低了,则裂纹将稳定扩展;若能量释放率增加了,则裂纹将快速失稳扩展。容易证明,裂纹稳定扩展判据为

$$G = G_c \text{ 和 } \frac{\partial G}{\partial A} < 0 \quad (1.4.5)$$

裂纹快速失稳扩展的判据是

$$G = G_c \text{ 和 } \frac{\partial G}{\partial A} > 0 \quad (1.4.6)$$

根据(1.4.1')式的自由能的引进,也容易证明,当自由能达到极小值时裂纹扩展是稳定的;当自由能达到极大值时裂纹将快速失稳扩展。

下面分三种加载情况,研究能量释放率 G 的计算^[5]。

(1) 裂纹板受总载荷 P 拉伸后,再把施力点固定起来的情况

见图 1.4.2,板受载后施力点的相对位移为 Δ ,外力对板做功,此功以弹性应变能的形式储存在板内。假如裂纹扩展,这可能是由于某种因素如射击、溶解、用锯条锯割或因腐蚀性使裂纹扩展,因为施力点固定,外力不作功,因此(1.4.3)式退化为

$$G = -\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_a \quad (1.4.7)$$

式中脚注 a 表示施力点位移固定的情况。此式说明弹性位能释放等于弹性应变能释放,所以 G 又称为应变能释放率。图 1.4.3 表示了线弹性情况,裂纹扩展微量面积 δA 的前后能量的变化。应变能的释放量用图中 ΔOED 面积表示,即

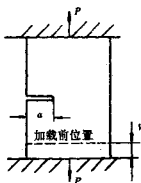


图 1.4.2

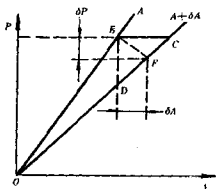


图 1.4.3

$$\delta \Pi = \delta U = -\Delta OED$$

(2) 假想裂纹扩展过程,外载荷保持不变的情况

见图 1.4.4,对于线弹性情况,由于外力做功等于应变能的两倍,因此(1.4.4)式退化为

$$G = \left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_P \quad (1.4.8)$$

式中脚注 P 表示裂纹扩展过程外载荷不变的情况。此式说明弹性位能的释放率数值上等于弹性应变能的增加率。应变能不但没有减少反而增加,这是因为外载荷对物体所作的功,一半增加了物体的弹性应变能,另一半转换成形成新裂纹表面所需要的能量。因此,上式只是数值上的相等,并不是能量的转化,这一点要注意。在图 1.4.3 中用 ΔOED 的面积表示这一能量的变

$$\delta\Pi = -\delta U = -\Delta OEC$$

(3) 裂纹在假想的扩展过程, 施力点可能发生位移, 外载荷也可能发生变化

工程实际中遇到的大都属于这种情况, 例如, 材料试验机采用螺旋加载和液压系统加载的情况。我们可以用一个弹簧加载系统模拟此情况, 如图 1.4.5 所示。弹簧一端与裂纹物体相连, 另一端固定在很刚硬的基础上。裂纹扩展前, 弹簧受拉力 P ; 若裂纹扩展, 物体的刚度降低, 施力点向下移动 $\delta\Delta$; 随着弹簧伸长量的减少, 弹簧拉力 P 也减少 δP , 如图 1.4.3 所示。因此, 裂纹扩展过程 $P-\Delta$ 曲线上的点沿着 EF 线移到 F 点, F 点的位置因弹簧刚度不同在 C 与 D 两点之间变化。

若弹簧绝对刚硬, 相当于施力点位移固定的情况, F 点逼近 D 点; 若弹簧很柔软, 相当于外载荷不变的情况, F 点靠近 C 点。这种情况的弹性位能的释放量用 ΔOEF 的面积表示, 即

$$\delta\Pi = -\Delta OEF$$

若裂纹的扩展面积 δA 为无限小量, 可略去 δA 的二次及二次以上的高阶微量, 则上述三种加载情况弹性位能释放量收效为同一值, 即

$$\delta\Pi = -\Delta OED = -\Delta OEC = -\Delta OEF$$

因此, 我们得到了 G 仅与裂纹面积变化时系统的力学状态有关, 而与边界的加载条件无关的结论。知道了物体的应变能后, 可以用 (1.4.7) 式计算 G 。

例 1 一块厚度为 B 的板, 含有一条长度为 $2a$ 的裂纹, 在很远处承受垂直于裂纹的单向拉伸应力 σ 的作用, 见图 1.4.6。若材料的临界能量释放率 G_c 已知, 试求允许的最大裂纹长度为多少。判断裂纹是稳定扩展还是失稳扩展。

若板的大小与裂纹长度相比很大的话, 可以按照无限大板来处理。Griffith 定量地计算了能量的变化关系。假定承受单向应力为 σ 的厚板 (处于平面应变状态), 把加载端固定后, 在垂直应力的方向制造一条 $2a$ 长的裂纹, 此时应变能要释放出一部分, 可以采用弹性理论计算出这一部分能量为

$$U_0 = \frac{\pi\sigma^2 a^2}{E'} B$$

式中 $E' = E/(1-\nu^2)$, ν 为泊松比。所以可得如下关系式

$$G = -\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_a = \frac{1}{2B} \left(\frac{\partial U_0}{\partial a}\right) = \frac{\pi\sigma^2 a}{E'}$$

由断裂判据 (1.4.4) 式, 得关系式

$$\frac{\pi\sigma^2 a}{E'} = G_c$$

由上式可以求出在应力 σ 作用下, 最大允许半裂纹长度为

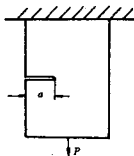


图 1.4.4

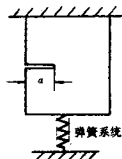


图 1.4.5

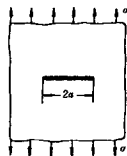


图 1.4.6



$$a_c = \frac{E' G_c}{\pi \sigma^2}$$

还可以求出裂纹长度为 $2a$ 时,板能承受的最大拉应力为

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{E' G_c}{\pi a}}$$

同时有关系式

$$\sigma_c \sqrt{a} = \sqrt{\frac{E' G_c}{\pi}} \quad (1.4.9)$$

对于平面应力情况,只要在上述公式中用 E 取代 E' 即可。

从(1.4.9)式我们可以看出断裂应力与裂纹长度的平方根的乘积是一个材料常数,得到与(1.2.5)式相同的结论,只是常数不同。

最后,我们分析裂纹的扩展性质。因为

$$\frac{\partial G}{\partial a} = \frac{\pi \sigma^2}{E'} > 0$$

根据(1.4.6)式可知裂纹一经扩展,就会迅速扩展最后导致板的断裂。

我们从裂纹扩展力 G 和裂纹扩展阻力 R 随裂纹长度 a 的变化曲线(图 1.4.7)看得更加清楚。 G 随 a 的增加而线性地增加,直线的倾斜角 $\beta = \tan^{-1}(\sigma^2 \pi / E')$, 工作应力 σ 越大这根直线越陡。 R 是材料常数与 a 无关。 G 直线与 R 直线之交点的横坐标,即为对应某一工作应力的允许半裂纹长度或临界裂纹长度。当 $a < a_c$ 时, $G < R$, 裂纹不会扩展;当 $a > a_c$ 时, $G > R$, 裂纹将快速失稳扩展。

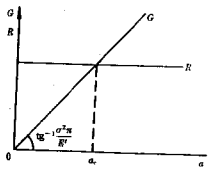
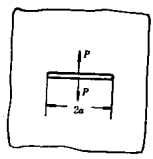


图 1.4.7

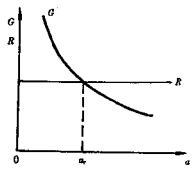
例 2 图 1.4.8a 所示为含 $2a$ 长的中心裂纹的无限大板,在裂纹表面的中心受一对单位厚度的楔力 P 作用。已知能量释放率 $G = P^2 / (\pi E a)$ (平面应力状态),试判断裂纹的扩展性质。

因为

$$\frac{\partial G}{\partial a} = -\frac{P^2}{\pi E a^2} < 0$$



(a)



(b)

图 1.4.8

根据(1.4.5)式知道,裂纹的扩展将是稳定的。这从图 1.4.8b 中的 G 曲线看得更清楚。

随 a 的增加是一条递减曲线,同时,外力 P 越大曲线越远离坐标原点。若 $a=a_c$ 时, $G=R$, 在 P 力作用下裂纹可能开始扩展,但这是稳定的扩展;开裂后裂纹长度 $a>a_c$, 此时 $G<R$, 裂纹将停止扩展;只有进一步增加外载荷 P , 使 G 再等于 R , 裂纹才能进一步扩展。这种类型的加载是很具有吸引力的,在研究疲劳裂纹扩展和应力腐蚀开裂时,有人曾采用这种类型的试件进行试验,并得到有意义的结果,第九章我们再讨论这方面的问题。

1.5 裂纹尖端的应力场和位移场

1.4 节中讨论的 Griffith 脆性断裂理论是从能量平衡的观点分析断裂问题。由于要涉及弹性体的能量,计算是很复杂的。实际上断裂是从裂纹尖端开始,重点研究裂纹尖端邻域的应力应变场是很有意义的。本节我们一般地研究平面裂纹尖端邻域的应力、位移场结构。先从较简单的反平面问题着手,然后再讨论平面裂纹。

■ 型裂纹 这是弹性力学中的反平面问题。由附录 A, 我们知道反平面弹性理论的求解归于寻找满足特定边界条件的解析函数 $\Phi(z)$ 的问题。可以将此函数展成级数

$$\Phi(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n z^n \quad (1.5.1)$$

式中 $D_n = d_n + i d'_n$, λ_n 为待定常数。将 (1.5.1) 式代入 (A.21) 式可得 $(z = r e^{i\theta})$, 见图 1.5.1)

$$\tau_{rz} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n r^{\lambda_n - 1} [d_n \cos(\lambda_n - 1)\theta - d'_n \sin(\lambda_n - 1)\theta] \quad (1.5.2)$$

$$\tau_{\theta z} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n r^{\lambda_n - 1} [d_n \sin(\lambda_n - 1)\theta + d'_n \cos(\lambda_n - 1)\theta]$$

式中常数 λ_n, d_n, d'_n 由边界条件确定。

我们研究图 1.5.1 所示半无限长裂纹, 裂纹表面没有外载荷作用的情况, 即

$$\theta = \pm \pi; \quad \tau_{rz} = 0 \quad (1.5.3)$$

将 (1.5.2) 式中的 τ_{rz} 代入 (1.5.3) 式得确定 d_n, d'_n 的齐次线性代数方程组

$$\begin{aligned} d_n \sin(\lambda_n - 1)\pi + d'_n \cos(\lambda_n - 1)\pi &= 0 \\ -d_n \sin(\lambda_n - 1)\pi + d'_n \cos(\lambda_n - 1)\pi &= 0 \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

因为 d_n, d'_n 不能全为零, 所以其系数行列式应当为零, 由此得确定 λ_n 的特征方程为

$$\sin 2\pi\lambda_n = 0 \quad (1.5.5)$$

所以 $\lambda_n = n/2$, $n = 1, 2, 3, \dots$ 为正整数, n 等于零和负整数也满足

上述方程, 但 $n=0$ 对应于无应力状态的刚体位移; $n<0$ 使裂纹尖端的位移趋于无限大, 这在物理上讲是不可能的, 所以抛去这些解不用。将 λ_n 代入 (1.5.4) 式中任一式可以找到系数之间的关系为

$$(-1)^j D_n - \bar{D}_n = 0 \quad (1.5.6)$$

把 n 分成偶数和奇数进行讨论。当 $n=2j$ 和 $n=2j-1$ ($j=1, 2, 3, \dots$) 时分别有

$$d_{2j} = 0; \quad d'_{2j} \neq 0$$

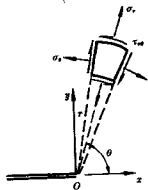


图 1.5.1

$$d_{2j-1} \neq 0; \quad d_{2j} = 0$$

所以

$$w = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{\infty} [r^j d_{2j} \cos j\theta - r^{j-\frac{1}{2}} d_{2j-1} \sin(j - \frac{1}{2})\theta] \quad (1.5.7)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \sum_{j=1}^{\infty} [j r^{j-1} d_{2j} \cos(j-1)\theta - (j - \frac{1}{2}) r^{j-\frac{3}{2}} d_{2j-1} \sin(j - \frac{3}{2})\theta]$$

$$\tau_{r\theta} = \sum_{j=1}^{\infty} [-j r^{j-1} d_{2j} \sin(j-1)\theta - (j - \frac{1}{2}) r^{j-\frac{3}{2}} d_{2j-1} \cos(j - \frac{3}{2})\theta] \quad (1.5.8)$$

但是这些级数的收敛性尚缺乏数学上的严格证明。

我们研究裂纹尖端邻域,也即 r 趋于零的位移和应力场,可以看出只取级数的第一项就够了,其余各项为高阶微量可以略去。令

$$K_{\theta} = -\frac{1}{2} d_1 \sqrt{2\pi r}$$

则

$$w = 2 \frac{K_{\theta}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\frac{K_{\theta}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{K_{\theta}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (1.5.9)$$

由上式可见应力具有 $r^{-1/2}$ 的奇异性。

平面裂纹 Williams^[6]用实应力函数方法分析了平面裂纹的应力场。我们在此采用复应力函数的方法。由附录 A,我们知道平面弹性力学的求解归于寻找满足特定边界条件的两个解析函数 $\chi(z)$ 和 $\varphi(z)$ 的问题。将解析函数展成级数

$$\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^{\lambda_n}$$

$$\chi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n z^{\lambda_n+1} \quad (1.5.10)$$

式中 $A_n = a_n + ia_n'$ 和 $B_n = b_n + ib_n'$ 为复常数; λ_n 为特定常数; $z = re^{i\theta}$ (见图 1.5.1)。 A_n, B_n, λ_n 由边界条件决定,当

$$\theta = \pm \pi; \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (1.5.11)$$

由(A.11)式可求得

$$\sigma_y + i\tau_{xy} = \Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) + \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)$$

于是,由 $\theta = \pm \pi$ 的边界条件(1.5.11)式可得

$$\begin{aligned} [\lambda_n A_n + (\lambda_n + 1) B_n] e^{i(\lambda_n - 1)\pi} + \bar{A}_n e^{-i(\lambda_n - 1)\pi} &= 0 \\ [\lambda_n A_n + (\lambda_n + 1) B_n] e^{-i(\lambda_n - 1)\pi} + \bar{A}_n e^{i(\lambda_n - 1)\pi} &= 0 \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

因为 A_n, B_n 不应全为零,所以其系数行列式应当为零,同样得确定 λ_n 的特征方程(1.5.5)式。同样 $\lambda_n = 1/2, 2/2, 3/2, \dots$ 。将 $\lambda_n = n/2$ 代入(1.5.12)式中任一式得系数之间的关系式

$$\frac{n}{2} A_n + (-1)^n \bar{A}_n + (\frac{n}{2} + 1) B_n = 0 \quad (1.5.13)$$

使上式实部和虚部分别等于零得

$$b_n = -\frac{\frac{n}{2} + (-1)^n}{\frac{n}{2} + 1} a_n$$

$$b'_n = -\frac{\frac{n}{2} - (-1)^n}{\frac{n}{2} + 1} a'_n \quad (1.5.13')$$

于是只有系数 a_n, a'_n 未知, 需由其它边界条件确定。

将(1.5.10)式代入(A.10)式, 并利用(1.5.13')可得 Airy 应力函数为

$$U = U_1 + U_2$$

$$U_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{\frac{n}{2}+1} \left[\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta - \frac{\frac{n}{2} + (-1)^n}{\frac{n}{2} + 1} \cos\left(\frac{n}{2} + 1\right)\theta \right]$$

$$U_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n r^{\frac{n}{2}+1} \left[-\sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta + \frac{\frac{n}{2} - (-1)^n}{\frac{n}{2} + 1} \sin\left(\frac{n}{2} + 1\right)\theta \right] \quad (1.5.14)$$

因为余弦函数关于 $\theta=0$ 的轴是对称的, 所以 U_1 是 I 型裂纹的 Airy 应力函数。正弦函数关于 $\theta=0$ 的轴是反对称的, 所以 U_2 是 II 型裂纹的 Airy 应力函数。

我们只考虑裂纹尖端邻域(K 主导区), 即 r 趋于零的情况。将(1.5.10)式中 $n=1$ 的一项代入(A.11)式, 再分成对称项和反对称项, 分别得到以下结果。

I 型裂纹的应力和位移

$$\sigma_x = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (1.5.15)$$

$$u = \frac{K_1}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa-1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$v = \frac{K_1}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa+1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (1.5.16)$$

式中 $K_1 = \sqrt{2\pi} a_1$ 。

I 型裂纹的应力和位移

$$\sigma_x = -\frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_y = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (1.5.17)$$