现代数学基础丛书

动力系统的定性与分支理论

罗定军 张祥 董梅芳 编著

科学出版社

现代数学基础丛书

动力系统的定性与分支理论

罗定军　张祥　董梅芳　编著

科学出版社

2001

内 容 简 介

动力系统理论以确定的随时间演变的系统的大范围动力学性态为研究内容，它在物理、力学、化学、生物和经济等许多学科中具有广泛的应用，受到国际上的广泛重视.

本书包括由常微分方程组和点射所确定的动力系统的定性理论和分支理论的基本内容.如奇点和不动点的性态的系统分析，平面系统的全局分析.其中突出了极限环不存在性、存在性、唯一性的判别法则.本书从结构稳定性出发引入分支概念，分类分析了各种分支现象，以及与极限环问题密切相关的各种分支，如广义 Hopf 分支，Poincaré 分支，同宿、异宿奇闭轨分支和 Bogdanov-Takens 分支等.此外，与混沌性态相关的符号动力系统，Smale 马蹄 Melnikov 方法等书中作了介绍.

本书可供高等院校数学系、物理系及其他应用学科的高年级学生和研究生使用，也可供相关领域的科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

动力系统的定性与分支理论/罗定军等编著 .－北京:科学出版社,2001.2

(现代数学基础丛书)

ISBN 7-03-007915-9

Ⅰ.动… Ⅱ.罗… Ⅲ.①动力系统(数学)-定性理论②动力系统(数学)-非线性方程 Ⅳ.O175.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 61959 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001年2月第 一 版 开本:850×1168 1/32

2001年2月第一次印刷 印张:8 1/8

印数:1－2 800 字数:212 000

定价: 17.00元

前　言

动力系统理论是现代大范围分析这一综合性数学分支的一个重要组成部分，它以确定的随时间演变的系统的大范围动力学性态为其研究内容，又在物理、力学、化学、生物和经济等许多学科分支中得到广泛的应用，因而在国际范围内引起广泛重视.

从历史发展来看， H. Poincaré 所创立的微分方程定性理论就曾以天体运动中所出现的一些非线性微分方程的模型作为重要的研究背景之一. 由于不能得到其通解的表达式，他着眼于从方程本身的特性去研究其解应具有的各种性质，这就是定性理论的基本出发点. 解的某些局部的或大范围的性态有时往往要随着方程的变化 (常体现为系统中的参数的变化) 而发生变化，这就是分支 (bifurcation) 的概念. 20 世纪 60 年代以来，分支理论迅猛发展，作为它的一个重要组成部分，微分方程和动力系统的分支理论的研究也系统深入地展开，并对许多应用学科中所出现的复杂问题的研究给以推动. 本书的主要内容就包含定性理论与分支理论两个方面. 前者以丰富的平面系统的定性理论为主，也包含了一般 $\mathbb{R}^n$ 空间中动力系统的一些基本概念、理论和方法，如平面系统的奇点分析，极限环的不存在性，存在性和唯一性的一些判别法则，它们以极限集理论作为基础. 对于研究极限环问题的一个重要工具，旋转向量场理论也作了介绍. 由此总结出系统地分析具体平

面系统的大范围性态的方法，并结合一些应用问题加以分析. 这就是本书前三章及第四章前几节的主要内容.

第四章后半部分从结构稳定性的讨论引导出分支系统及与其相关的开折、余维和规范形等概念. 第五章对平面系统的各种分支作了较细致的分析，并结合 Hilbert 第 16 问题就多项式平面系统的极限环分支以及作者自身在这方面的部分研究工作给予介绍，以便有兴趣的读者在此基础上进一步开展研究. 高于二维的非线性系统将会出现诸如混沌等复杂的性态. 第六章将介绍处理这类问题的基本方法，引入 Smale 马蹄等与混沌性态相关的内容，包括判别混沌性态的横截同宿定理与 Melnikov 方法等.

本书的主要内容历年来曾在南京大学，南京师范大学对数学系的部分研究生和本科高年级学生讲授过. 希望通过这本书的出版使更多的读者对非线性系统研究中所运用的定性方法以及现代分支理论方法有一个基本的了解. 当然，限于笔者的水平，书中定会出现不少错漏之处，敬请读者指正.

鸣谢:

本书撰写过程中得到了叶彦谦教授的支持鼓励，对写作大纲提出宝贵意见，我们表示衷心的感谢，也感谢叶惟寅同志对出版此书的关心支持. 我们感谢研究生潘建瑜，宋嵩，肖敏和袁蔚莉等为此书认真作计算机录入. 本书的出版获得了国家自然科学基金、江苏省自然科学基金以及南京师范大学出版基金的资助，均此致谢.

作　者

1999 年 3 月

目　录

第一章　动力系统的基本概念

给定常微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1.1}$$

和初值条件

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.2}$$

其中每一 f_i 定义在开区域 $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 中，其中 $t \in \mathbb{R}$, $(t_0, x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \in G$. 为了简化记号以及后面的论证，我们可以运用下述向量与矩阵的记号及运算法则．记

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \vdots \\ \dot{x_n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x^0} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \mathbf{x}) \\ f_2(t, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

(其中 $(\dot{\ }) = \dfrac{d(\ )}{dt}$) 它们代表 n 维向量或向量函数. 这时方程 (1.1) 和初值条件 (1.2) 可写成

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t,\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0. \tag{1.3}$$

称之为 **微分方程组的初值问题** 或 **柯西 (Cauchy)问题**.

设 $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, α 是实数, 可分别定义它们的和或差、数乘、内积及范数为

$$\mathbf{x} \pm \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \pm y_1 \\ x_2 \pm y_2 \\ \vdots \\ x_n \pm y_n \end{pmatrix}, \quad \alpha\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix},$$

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \ \|\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad 或 \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x},\mathbf{x} \rangle}.$$

设 $\mathbf{f}(t)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的 n 维向量函数, 它的导数和积分分别为

$$\mathbf{f}'(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{pmatrix}, \quad \int_a^b \mathbf{f}(t)dt = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t)dt \\ \int_a^b f_2(t)dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_n(t)dt \end{pmatrix}.$$

另外, 对任意 $t_0, t \in [a,b]$, 恒有不等式

$$\left\| \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s)ds \right\| \le \left| \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{f}(s)\| ds \right|.$$

从上述向量函数的导数和积分的定义知, 定义在区间 $[a,b]$ 上的一个向量函数 $\mathbf{f}(t)$ 为连续函数 (可导或可积) 的充要条件是它的每个分量在相应的区间上连续 (可导或可积).

设 $x_1=\varphi_1(t), x_2=\varphi_2(t), \cdots, x_n=\varphi_n(t)$ 是定义在区间 (a,b) 上的 n 个连续可微函数，若将它们代入方程组 (1.1), 使其在 (a,b) 上成为恒等式，即对 $i=1,2,\cdots,n, t\in(a,b)$, 恒有

$$\frac{d\varphi_i(t)}{dt}\equiv f_i(t,\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)),$$

或简写为

$$\frac{d\boldsymbol{\Phi}(t)}{dt}\equiv \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\Phi}(t)),$$

则称 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$ 为方程组 (1.1) 在区间 (a,b) 上的**解**. 若此解满足初值条件 (1.2), 则称之为 **初值问题** (1.3) **的解**.

方程组 (1.1) 的含有 n 个独立的任意常数的解

$$x_i(t)=\varphi_i(t,c_1,c_2,\cdots,c_n),\quad i=1,2,\cdots,n$$

称为 (1.1) 的 **通解**. 由隐函数方程

$$\Phi_i(t,x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n)=0,\quad i=1,2,\cdots,n. \quad (1.4)$$

所确定的含有 n 个独立的任意常数的函数

$$x_i(t)=\Psi_i(t,c_1,c_2,\cdots,c_n),\quad i=1,2,\cdots,n$$

若是 (1.1) 的通解，则称 (1.4) 为 (1.1) 的 **通积分**.

§1 $\mathbb{R}^n$ 上微分方程的解的存在唯一性，解的延拓

1.1 解的存在唯一性定理

在微分方程理论的发展过程中，人们有很长一段时间总是努力寻求所给方程的通解的分析表达式，这就是通常所说的初等积分法. 后来发现就绝大多数非线性方程来说，这一点是不可能办到

的. 例如, 1941 年, 法国数学家 J.Liouville 首先证明了有一个二次项的非线性方程 (即 Riccati 方程)

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

一般是不可能求得其通解的. 直至 19 世纪后期, H.Poincaré 开始创立了微分方程的定性理论, 即是说, 不指望求出解的分析表达式, 而是从方程自身的特性去确定其解所具有的定性性态. 本书的主题之一也就是介绍其基本的思想方法.

为了展开定性的讨论, 首要的一个问题是: 微分方程的初值问题 (1.3) 的解是否存在? 存在的话是否唯一? 这就是本节要介绍的解的存在唯一性定理. 其条件可强可弱, 结果甚多. 为简明扼要, 现介绍最基本的一个定理.

定理 1.1 *考虑初值问题 (1.3). 假设 $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ 在 $(n+1)$ 维空间闭区域*

$$G: \quad |t-t_0| \le a, \quad \|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\| \le b$$

上连续, 且关于 $\mathbf{x}$ 满足 Lipschitz 条件 (简称李氏条件), 即存在正常数 L, 使得对任意 $(t,\mathbf{x}),(t,\mathbf{y}) \in G$, 恒有

$$\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) - \mathbf{f}(t,\mathbf{y})\| \le L\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|.$$

令

$$M = \max_G \|\mathbf{f}(t,\mathbf{x})\|, \quad h = \min(a, \frac{b}{M}),$$

则初值问题 (1.3) 在区间 $|t-t_0| \le h$ 上存在唯一的解 $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(t)$.

证明 证明较长, 可分为下列五个步骤: 第一步证明初值问题 (1.3) 等价于积分方程:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{f}(s, \mathbf{x}(s))ds \tag{1.5}$$

的求解问题；第二步在区间 $|t-t_0|\le h$ 上构造 (1.5) 的近似解序列 $\{\mathbf{\Phi}_k(t)\}$，其中 $\mathbf{\Phi}_k(t)$ 是 n 维连续向量函数；第三步证明函数序列 $\{\mathbf{\Phi}_k(t)\}$ 在 $|t-t_0|\le h$ 上一致收敛到某函数 $\mathbf{\Phi}(t)$；第四步证明 $\mathbf{\Phi}(t)$ 是 (1.5) 的解，也就证明了初值问题 (1.3) 的解的存在性；最后，第五步证明 (1.3) 的解的唯一性. 下面只考虑 $t\ge t_0$ 的情况，易见 $t\le t_0$ 的情形可以完全类似的证明.

(一) 证明初值问题 (1.3) 与积分方程 (1.5) 的等价性.

设 $\mathbf{x}=\mathbf{\Phi}(t)$ 是初值问题 (1.3) 的解，即

$$\frac{d\mathbf{\Phi}(t)}{dt}\equiv\mathbf{f}(t,\mathbf{\Phi}(t)).$$

把上式两边从 t_0 到 t 积分得

$$\mathbf{\Phi}(t)\equiv\mathbf{x}^0+\int_{t_0}^{t}\mathbf{f}(s,\mathbf{\Phi}(s))ds.$$

这说明 $\mathbf{x}=\mathbf{\Phi}(t)$ 是积分方程 (1.5) 的解.

反之，设 $\mathbf{x}=\mathbf{\Phi}(t)$ 是积分方程 (1.5) 的连续解，即

$$\mathbf{\Phi}(t)\equiv\mathbf{x}^0+\int_{t_0}^{t}\mathbf{f}(s,\mathbf{\Phi}(s))ds.$$

于是 $\mathbf{\Phi}(t)$ 可微，从而

$$\frac{d\mathbf{\Phi}(t)}{dt}=\mathbf{f}(t,\mathbf{\Phi}(t)),\quad 且\quad \mathbf{\Phi}(t_0)=\mathbf{x}^0$$

即 $\mathbf{x}=\mathbf{\Phi}(t)$ 是初值问题 (1.3) 的解.

(二) 用 Picard 逼近法构造 (1.5) 的近似解序列 $\{\mathbf{\Phi}_k(t)\}$. 令

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Phi}_0(t)=\mathbf{x}^0\\
&\mathbf{\Phi}_1(t)=\mathbf{x}^0+\int_{t_0}^{t}\mathbf{f}(s,\mathbf{\Phi}_0(s))ds,\\
&\mathbf{\Phi}_k(t)=\mathbf{x}^0+\int_{t_0}^{t}\mathbf{f}(s,\mathbf{\Phi}_{k-1}(s))ds,\quad k=2,3,\cdots
\end{aligned}$$

下面证明每一 $\mathbf{\Phi}_k(t)$ 在 $t_0 \le t \le t_0 + h$ 上有定义，连续，且 $\|\mathbf{\Phi}_k(t) - \mathbf{x}_0\| \le b$. 由定理假设，显然 $\mathbf{\Phi}_1(t)$ 在 $[t_0, t_0 + h]$ 上有定义且连续. 又

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{\Phi}_1(t) - \mathbf{x}^0\| &= \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{t_0}^{t} f_i(s, \mathbf{\Phi}_0(s)) ds \right| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} |f_i(s, \mathbf{\Phi}_0(s))| ds \\
&= \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{f}(s, \mathbf{\Phi}_0(s))\| ds \\
&\le M(t - t_0) \\
&\le Mh \\
&< b,
\end{aligned}$$

因此 $\mathbf{\Phi}_2(t)$ 在 $[t_0, t_0 + h]$ 上有定义，连续，且

$$\|\mathbf{\Phi}_2(t) - \mathbf{x}_0\| \le \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{f}(s, \mathbf{\Phi}_1(s))\| ds \le M(t - t_0) \le b.$$

一般地，假设如上构造的向量函数序列当 $n = k$ 时，$\mathbf{\Phi}_k(t)$ 在 $[t_0, t_0 + h]$ 上有定义，连续，且

$$\|\mathbf{\Phi}_k(t) - \mathbf{x}^0\| \le b,$$

则 $\mathbf{\Phi}_{k+1}(t)$ 在 $[t_0, t_0 + h]$ 上有定义，连续，且

$$\|\mathbf{\Phi}_{k+1}(t) - \mathbf{x}^0\| \le \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{f}(s, \mathbf{\Phi}_k(s))\| ds \le M(t - t_0) \le b.$$

由数学归纳法知，对一切 n，$\mathbf{\Phi}_n(t)$ 在 $[t_0, t_0 + h]$ 上有定义，连续，且 $\|\mathbf{\Phi}_n(t) - \mathbf{x}^0\| \le b$.

(三) 证明向量函数序列 $\{\mathbf{\Phi}_n(t)\}$ 在 $[t_0, t_0+h]$ 上一致收敛.

考虑级数

$$\mathbf{\Phi}_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty}[\mathbf{\Phi}_k(t) - \mathbf{\Phi}_{k-1}(t)], \quad t \in [t_0, t_0+h]. \tag{1.6}$$

它的部分和为

$$S_n(t) = \mathbf{\Phi}_0(t) + \sum_{k=1}^{n}[\mathbf{\Phi}_k(t) - \mathbf{\Phi}_{k-1}(t)] = \mathbf{\Phi}_n(t).$$

因此, 在区间 $[t_0, t_0+h]$ 上, 向量函数序列 $\{\mathbf{\Phi}_n(t)\}$ 的一致收敛性等价于级数 (1.5) 的一致收敛性.

下面证明, 对一切 n, 恒有

$$\|\mathbf{\Phi}_n(t) - \mathbf{\Phi}_{n-1}(t)\| \le \frac{M}{L} \cdot \frac{[L(t-t_0)]^n}{n!}. \tag{1.7}$$

当 $n=1$ 时, 由 (二) 的证明知, (1.7) 式显然成立. 假设当 $n=k$ 时, (1.7) 式成立, 则有

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{\Phi}_{k+1}(t) - \mathbf{\Phi}_k(t)\| &\le \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{f}(s, \mathbf{\Phi}_k(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{\Phi}_{k-1}(s))\| ds \\
&\le L\int_{t_0}^{t} \|\mathbf{\Phi}_k(s) - \mathbf{\Phi}_{k-1}(s)\| ds \\
&\le L\int_{t_0}^{t} \frac{ML^{k-1}}{k!}(s-t_0)^k ds \\
&= \frac{ML^k}{(k+1)!}(t-t_0)^{k+1}.
\end{aligned}$$

由数学归纳法知, 对一切 n, (1.7) 式均成立.

由于正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{L} \cdot \frac{(Lh)^n}{n!}$$

收敛, 由 Weierstrass 判别法知, 向量函数项级数 (1.6) 在 $[t_0, t_0+h]$ 上一致收敛, 记

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{\Phi}_n(t) = \mathbf{\Phi}(t), \quad t \in [t_0, t_0+h],$$

则 $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(t)$ 在 $[t_0, t_0+h]$ 上连续, 且 $\|\mathbf{\Phi}(t) - \mathbf{x}^0\| \le b$.

(四) 证明 $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(t)$ 是积分方程 (1.5) 在 $[t_0, t_0+h]$ 上的解.

由 Lipschitz 条件

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{\Phi}_n(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{\Phi}_{n-1}(t))\| \le L\|\mathbf{\Phi}_n(t) - \mathbf{\Phi}_{n-1}(t)\|$$

及 $\{\mathbf{\Phi}_n(t)\}$ 在 $[t_0, t_0+h]$ 上一致收敛到 $\mathbf{\Phi}(t)$ 知, 向量函数序列

$$\{\mathbf{f}_n(t)\} = \{\mathbf{f}_n(t, \mathbf{\Phi}_n(t))\}$$

在 $[t_0, t_0+h]$ 上一致收敛到 $\mathbf{f}(t, \mathbf{\Phi}(t))$. 因此,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbf{\Phi}_n(t) &= \mathbf{x}^0 + \lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{\Phi}_{n-1}(s))ds \\ &= \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(s, \mathbf{\Phi}_{n-1}(s))ds,\end{aligned}$$

即

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{\Phi}(s))ds.$$

这说明 $\mathbf{\Phi}(t)$ 是积分方程 (1.5), 也就是 (1.3), 在 $[t_0, t_0+h]$ 上的解.

(五) 证明积分方程 (1.5) 的解的唯一性.

设 $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(t)$ 和 $\mathbf{x} = \mathbf{\Psi}(t)$ 是 (1.5) 的两个解, 即有

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{\Phi}(s))ds,$$

$$\mathbf{\Psi}(t) = \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{\Psi}(s))ds.$$

两式相减得

$$\begin{aligned}\|\mathbf{\Phi}(t)-\mathbf{\Psi}(t)\| &\le \int_{t_0}^{t}\|\mathbf{f}(s,\mathbf{\Phi}(s))-\mathbf{f}(s,\mathbf{\Psi}(s))\|ds\\ &\le L\int_{t_0}^{t}\|\mathbf{\Phi}(s)-\mathbf{\Psi}(s)\|ds.\end{aligned}$$

令

$$g(t)=\int_{t_0}^{t}\|\mathbf{\Phi}(s)-\mathbf{\Psi}(s)\|ds,\quad t\in[t_0,t_0+h].$$

显然 $g(t)\ge 0$, $t\in[t_0,t_0+h]$, 且有

$$g'(t)\le Lg(t),$$

于是

$$(\mathrm{e}^{-L(t-t_0)}g(t))'\le 0.$$

从而

$$\mathrm{e}^{-L(t-t_0)}g(t)\le g(t_0)=0,$$

由此推出

$$g(t)\equiv 0,\quad t\in[t_0,t_0+h].$$

即 $\mathbf{\Phi}(t)\equiv\mathbf{\Psi}(t)$, $t\in[t_0,t_0+h]$. 这就证明了积分方程 (1.5), 亦即 (1.3) 的解的唯一性.

综上所述, 初值问题 (1.3) 在 $|t-t_0|\le h$ 上存在唯一解.

证毕

注 1.1 定理 1.1 中的两个条件保证了初值问题 (1.3) 的解的存在唯一性. 若 $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ 只对 $t,\mathbf{x}$ 连续, 但未必满足 Lipschitz 条件, 则初值问题 (1.3) 的解仍然存在, 但未必唯一.

例如初值问题

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{y},\quad y(0)=0$$