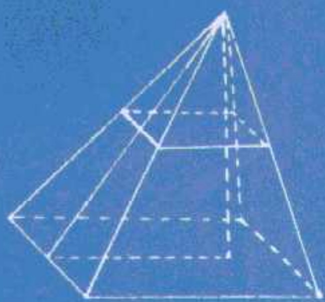
数学思维概论

关成志 主编

关成志 王 前
郑隆炘 孙宏安 杨 力 著



辽宁教育出版社

数学思维概论

关成志　主编

关成志 王　前 郑隆炘 孙宏安 杨　力 著

辽宁教育出版社

1993年·沈阳

辽新登字6号

数学思维概论

关成志　主编

关成志　王　前　郑隆炘　孙宏安　杨　力　著

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行

（沈阳市北一马路108号）　沈阳新华印刷厂印刷

字数：170,000　开本：787×1092 1/32　印张：$8^3/_4$

印数：1—2,500

1993年5月第1版　1993年5月第1次印刷

责任编辑：周广东　版式设计、插图：韩　梅

封面设计：原　野　责任校对：王　玲

ISBN 7-5382-2202-2/G·1600

定价：4.20元

前　言

在现代数学教育改革中，数学思维的培养和训练日益成为人们关注的热点问题。数学思维的品质、能力和方法，决定着一个人的数学思维水平，影响着他的数学知识水平、实际能力和工作效率，进而影响着数学教育的社会效果。在数学教育中要强调培养运用数学知识的能力，在能力培养中要强调数学思维的培育，这已是大多数数学教育工作者的共识。中学阶段是学生数学思维发展的关键时期，这一阶段的数学思维水平对人的一生都有重要的影响。因此，深入研究数学思维的性质、内容和发展规律，探索数学思维训练的途径和方法，对于数学教育改革具有十分重要的意义。

然而，目前对于数学思维的研究，还不够系统、深入。有些著述时常把数学思维研究混同于一般的数学方法论研究，甚至混同于数学解题策略和技巧的研究，这就冲淡了数学思维研究这一主题。数学思维研究当然与数学方法论、数学解题技巧有密切的联系，但它本身是以数学思维过程的特点和规律性为研究对象的，是以数学的教育学、心理学以至数学哲学为理论基础的，是理论与实践相结合的产物。数学思维研究，是从思维科学角度对人们的数学认知活动和解题过程的剖析，是立足共性来分析个性，立足一般规律来分析特殊现象。这方面研究对提高数学教师的教学水平极为必要，对于学生提高学习效果和质量也将起到明显的推动作用。

本书是在数学思维研究方面的初步尝试，书中总结概括

了近年来这方面的许多研究成果，同时又提出作者的许多见解，有些正在讨论中的问题，作者力求给予全面、客观的评述。作为一本“概论”，本书不可能十分完全、细致，但大体上触及到了数学教育改革中亟待解决的主要理论和实践问题。为了便于说明问题，本书引用了一定数量的数学例题，这对于理解数学思维的内容和规律性是必要的。但讨论数学例题的目的决不在提高解题技能本身，而在于通过例题“举一反三、触类旁通”，产生启发和引导的效果。如果做不到这一点，实际上就没有读懂，或者说没有学会使用这本书。这是本书区别于一般的数学参考读物的关键所在。

数学思维研究是一门科学，虽然它以数学教学为对象，但它本身的理论层次和价值并不低。它处于现代数学教育改革的前沿领域。由于这方面研究处于数学、哲学、思维科学、教育学、心理学、教学论等多学科的交叉地带，从事这方面研究又带有相当大的理论难度。本书在揭示和解决若干理论问题方面作了大胆尝试，还提出了不少有待进一步解决的研究课题。作者深感这个领域具有重大的开采价值，其中有不少很有意义的课题有待深入研究。希望本书能起到“抛砖引玉”的效果，使更多的数学教育工作者重视中学数学思维研究，推动数学教育改革向纵深发展，以加速我国教育事业的发展进程。

当代著名数学大师陈省身先生曾经预言，21世纪将是中国数学在世界上发挥重要作用的世纪。我们现在培养的学生都是跨世纪的人才。为了使他们的数学思维水平进一步提高，我们现在就应在数学思维研究方面作出切实的努力。

第一章
数学思维的内容

数学思维的内容，指的是数学思维的主要方面及其相互关系。在中学阶段，学生的数学思维内容逐渐丰富和发展，数学思维各个方面都已初具形态，并衍生出种种复杂的相互作用。从总体上看，数学思维包括数学思维品质、数学思维能力、数学思维方法这三个主要方面，下面分别加以讨论。

第一节 数学思维品质

从心理学角度讲，思维品质是思维产生和发展中所表现出来的个性差异。在中学数学教学活动中，经常可以发现有的学生思维敏捷，思路宽，有独创性；而有的学生思维迟缓，思路狭窄，只习惯于简单模仿，这就是数学思维品质的差异。对于中学数学思维活动中涉及的思维品质种类，学术界有各种不同意见。人们经常提到的数学思维品质有灵活性、敏捷性、批判性、独创性、严谨性、深刻性、广阔性等。如果仔细分辨一下，可以发现其中有些思维品质在性质上是相近或相通的。我们应尽可能找出其中基本的思维品质，而把其它的思维品质归并到基本的思维品质中去。比

如，思维的灵活性和敏捷性很接近，独创性和批判性紧密相联，而数学思维的深刻性主要是指抽象逻辑性与思维的严谨性本质上是统一的。如果适当加以归并，可以着重讨论以下四种基本的思维品质：

1．灵活性——培养敏捷与机智

数学思维的灵活性指的是不过多地受思维定势的影响，善于从旧的模式或通常的制约条件中解脱出来，及时转向，迅速找到解决问题的途径。灵活性表现为速度和技巧两个方面。思维速度快，特别是从错误思路中解脱出来及时转向的速度快，即是敏捷性。著名法国数学家阿达玛曾经说过，优秀的数学家经常犯错误，但能很快发现并纠正，还说他本人就比他的学生犯错误更多。英国剑桥大学心理学教授巴特利特在评论这一说法时提出，测定智力技能的唯一最佳标准可能是检测并摒弃谬误的速度。① 可见思维速度是人的思维品质的一个很重要的指标。当然思维速度的快慢也取决于思维的技巧。巧妙的方法能够化繁为简，化难为易，出奇制胜，当然可以大大加快思维的速度。发现和运用巧妙的方法，体现为数学的机智。敏捷与机智是相辅相成，缺一不可的。

数学思维的灵活性有如下具体特征：

（1）善于观察。

观察是认识事物的最基本途径之一，是发现问题和解决问题的前提。任何一道数学题都包含一定的数学条件和关系。有的条件和关系是隐蔽的，但对于解决问题来讲往往是关键。数学思维灵活的人，大都观察得非常细致、认真。虽然时间很短，但能够发现与解题有关的各种明显的或隐蔽的

---

①贝弗里奇：《科学发现的艺术》，科学出版社1979年版，第63页。

条件，并迅速判断出其中的关键条件。

例1.求和$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$.

这是 n 个分数相加，通分很困难。通过仔细观察，可以发现每一项都是相邻两自然数的积的倒数，而且$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. 这样，原式就等于 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$. 问题很快就解决了。实际上，给出这道题时就规定了它的基本特征，抓住其特征就找到了解题的关键。问题在于该题的基本特征不仔细观察是看不出来的。这就是我们通常所说的“题眼”，思维灵活的人应能迅速而准确地抓住“题眼”。

例2.解方程 $(a-x)^3+(b-x)^3=(a+b-2x)^3$.

这是一个关于 x的三次方程，而三次方程的求解很麻烦。如果仔细观察，发现其基本特征，可以看到至少 $x=a$ 和$x=b$都是原方程的根，而三次方程应有三个根，那么另一个根在哪里呢？注意原方程的右边，若假定其为零，那么 $x=\frac{1}{2}(a+b)$；再将其代入方程左边仍为零。这样第三个根就找到了。原方程尽管表面复杂，但“题眼”却通过观察其最简单情形下的特征而得到。这就是思维灵活性的好处。

（2）善于将问题转化。

很多时候，数学题的隐蔽条件难以直接观察到，必须将原有问题变形，转化成另一问题，才能使隐蔽条件显现出来。问题的转化是一种技巧。转化得好，可以迅速找到解题

思路。而转化不好，很可能搞乱思路，越解越困难。问题转化的方向是化难为易，化繁为简，化未知为已知。这是一个总的方向。具体的转化途径还要联系数学题的基本特征来考虑。

例3. 已知$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$， $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$。

求证：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$。

此题若直接运算证明，将十分繁琐复杂。如采用换元法，令 $u=\frac{x}{a}$， $v=\frac{y}{b}$， $\omega=\frac{z}{c}$，那么问题就转化为：已知 $u+v+\omega=1, \frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{\omega}=0$， 求证$u^2+v^2+\omega^2=1$，这是很好证明的。

$\because \frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{\omega}=0, \therefore \frac{uv+v\omega+u\omega}{uv\omega}=0$,

$\therefore uv+v\omega+u\omega=0$.

$\because (u+v+\omega)^2=1$, $\therefore u^2+v^2+\omega^2+2(uv+v\omega+u\omega)=1$,

$\therefore u^2+v^2+\omega^2=1$.

例4. 求证$\frac{1-2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$.

此题按常规证法也很麻烦。考虑到$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，问题就转化为$\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}=\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$.

问题转化的结果，使结构大为简化，化简后可得

$$\frac{(\sin x-\cos x)^2}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$$

$$=\frac{1-\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}x}.$$

（3）善于从错误思路中摆脱出来。

无论观察还是转化，都很难保证一次成功。误入歧途的事情是常有的。思维灵活的人应及时发现自己的毛病，迅速从错误思路中摆脱出来，及时转向。

例5. 解方程 $2x^2+5|x|-12=0$.

此题的常规解法是移项后两边平方去绝对值符号，或利用讨论$x\geqslant0$和$x<0$两种情况去绝对值符号，化为整式方程而求解。依这两条思路作下去，前者会出现高次方程，后者繁琐，且两者都易产生增根。虽然最终也可以解决问题，但从数学解题技巧角度来看，这两条思路都不可取，应该及时选择更简便可靠的解题思路（此题的特征也隐含了简洁思路存在的可能性）。我们化x^2为$|x|^2$. 原方程就化为

$$2|x|^2+5|x|-12=0. \text{ 解出 } |x|=\frac{3}{2}, \quad x=\pm\frac{3}{2}.$$

这道题的最初思路只是绕远，还不算完全不对。有些时候，按常规解法很可能完全解不出来，这就更需注意了。

例6. 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=a$, $\cos\alpha+\cos\beta=b$.

求 $\cos(\alpha+\beta)$的值。

如果沿这样一条思路走下去，

$$(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=a^2+b^2,$$

$$2+2\cos(\alpha-\beta)=a^2+b^2, \quad \cos(\alpha-\beta)=\frac{a^2+b^2-2}{2},$$

往下就作不下去了，因为离要解决的目标越来越远。此时需要及时回过头来，考虑

$$(\cos\alpha+\cos\beta)^2-(\sin\alpha+\sin\beta)^2=b^2-a^2, \text{ 即}$$

$$2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+2\cos(\alpha+\beta)=b^2-a^2,$$

那么，前面的半路中止的结果也可以利用上了，

$$2\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)+1]=b^2-a^2,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{b^2-a^2}{2\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)}=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}.$$

一般说来，当解题思路离解题目标越来越远时，就应该及时意识到思路不对，需及时转向。但应该注意一种倾向，即虽然解题的总趋势是化繁为简，但在某些环节上还可能出现形式上的反复，就是说展开后形式很复杂，而实际上结构变简单了，并与解题目标发生了实质性的联系。在这个时候，如果套用老经验，以为形式上变得复杂即表明思路不对，那就很可能不敢沿着正确思路走下去，结果功亏一篑，半途而废。

数学思维灵活性的反面是思维的保守性，表现为强烈的思维定势。见到一道题时总喜欢采用解这类题的最先接触到的方法，或最常见的方法去处理，一旦觉得熟悉的方法用不上就不知所措。有时候，明明已有的解题思路陷入困境，难以进展，也不知及时摆脱，反而固守原有思路苦苦思索，甚至失去解题的信心。在数学思维活动中，常规的解法是有一定价值的，思维定势在一定程度上是不可避免的。但如果把常规解法和思维定势僵化，形成固定不变的死规则，就会限制思路，使思维变得呆板、保守、迟缓，完全失去思维的活力。

2. 批判性——学会独立思考

数学思维的批判性指的是对已有的数学表述和论证能提出自己的见解，能独立思考，不盲从，不轻信。对于数学家

来说，能发现前人理论中的错误和不足，加以修正和发展，体现了思维的批判性。对于学生们来说，能发现自己和同学们原有认识的错误和不足，不断加以改正和完善，也体现了数学思维的批判性。批判性和独创性是密切相关的。只有学会独立思考，才能有所创新。心理学研究表明，思维的批判性实质上是人的自我意识系统对思维活动过程的调节和监控。这种思维品质在创造性活动和创造性思维过程中是不可缺少的因素。①

中学数学思维的批判性有如下具体特征：

（1）有能力评价解题思路是否正确。

用批判性的态度分析自己或他人的解题过程，发现其中的不足，不断加以改正和完善，这是数学思维批判性的基本要求，解题后的验算实际上就是数学思维的批判性发挥作用的过程。解题中的错误往往是由于考虑问题不周到，忽略了一些基本条件和规律造成的。重新检查解题过程的时候，必须综合运用所学过的知识，从多种角度进行批判性的审查，特别是要习惯于用挑剔的眼光看待自己的解题过程，使其尽善尽美。

例1. $\sqrt{(\lg 0.1)^2} = \lg 0.1 = -1$.

这个答案是错误的。因为$\lg 0.1 < 0$，而算术根是非负的，所以$\sqrt{(\lg 0.1)^2} = -\lg 0.1 = 1$.

例2. 求方程 $x^2 - 2x\sin\frac{\pi x}{2} + 1 = 0$的实数解。有这样一

①朱智贤、林崇德：《思维发展心理学》，北京师范大学出版社1986年版，第593页。

种解法：$\because x\in R$, $\varDelta=4\sin^2\dfrac{\pi x}{2}-4\geqslant 0$，于是得到$\sin^2\dfrac{\pi x}{2}\geqslant 1$，但显然又有$\sin^2\dfrac{\pi x}{2}\leqslant 1$，$\therefore\ \sin^2\dfrac{\pi x}{2}=1$，即$\sin\dfrac{\pi x}{2}=\pm 1$，$\therefore\ x=2n+1\ (n\in Z)$，这种解法是错误的，因为已知方程并非实系数的一元二次方程，它属于超越方程，所以利用$\varDelta\geqslant 0$是错误的。如能发现这一点，就体现了数学思维的批判性。实际上，正确的解法应该是将原方程化为

$$\left(x-\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2+\cos^2\frac{\pi x}{2}=0.$$

$$\therefore\quad x-\sin\frac{\pi x}{2}=0\quad ①,\quad \cos\frac{\pi x}{2}=0\quad ②.$$

由②解得$x=2n+1\ (n\in Z)$，代入①得

$$2n+1=\sin\frac{\pi n}{2},\quad \therefore n=0\text{或}n=-1,\text{即有}x=\pm 1.$$

（2）对已有的数学表述能提出自己的看法，进行独立思考。

由于种种原因，一些数学参考书和辅导读物的习题中可能有不够完善以至错误的地方。具有数学思维批判性的学生，应能发现书中的毛病，不盲从，不照抄照搬，而是能运用自己学过的知识自觉加以纠正。有了这样一种思维品质，才有可能在以后的数学研究工作中，发现前人理论研究成果中的错误和不足之处，加以纠正和补充。

例3. 已知方程$64x^2-96x+k=0$的两个根是$\sin\theta$和$\cos\theta$，求k值。学生们应用韦达定理算出$k=40$，代入原方程$\varDelta=-16<0$，与方程有两实根矛盾。原因是由韦达定理$\sin\theta+$

$\cos\theta=\frac{3}{2}$，而事实上对一切θ都有$-\sqrt{2}\leqslant\sin\theta+\cos\theta\leqslant\sqrt{2}<\frac{3}{2}$，因而满足题设条件的$k$是永远找不到的。如能及时发现这些问题，就体现了思维的批判性。

（3）能提出不同寻常的解题思路。

比如，德国著名数学家高斯小时候计算"$1+2+\cdots+100$"时，没有像别的同学那样逐项相加，而是想到了"$1+100=101$，$2+99=101$，…，$49+52=101$，$50+51=101$"，恰好有50对，因而$1+2+\cdots+100=101\times50=5050$，这种不寻常的解题思路，在技巧上远远超出他的同龄人，体现了极强的创造性。这种不寻常的解题思路的提出，首先是批判地考查常规解法的弱点的结果。这种思维品质为他后来在数学上取得多方面重大成就奠定了基础。

例4．设a、b、c为两两互异的实数，证明恒等式

$$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

按照寻常的解法，将从左边入手推证到右边，不仅证明繁杂，化简手续也非常困难。具有数学思维批判性的人，应能自觉考虑改变思维的角度，寻找不同寻常的解题思路。实际上，这条思路是存在的。把上式看成关于x的一元二次方程，那么它显然有$x=a$，$x=b$，$x=c$这三个互不相等的实根。而一元二次方程只能有两个根，所以这个式子一定是恒等式。

数学思维批判性的反面是盲从性，表现为对教师和教材

的盲从，不敢越雷池半步。在学习和讨论问题时，不善于独立思考和提出问题，缺乏检查的习惯，总是喜欢附和别人的意见。一般说来，中学教材和中学教师的讲授在准确程度上是很高的。尊重教师的指导意见，认真钻研书本的内容，是中学生学好数学的基本要求。培养数学思维的批判性，并不是提倡自以为是，无端猜疑，而是强调尊重知识，尊重科学，尊重真理。要把教师讲授的内容和书本知识转化为自己完全掌握的东西，必须有一个消化和吸收的过程，这个过程中需要主动分析、判断、选择、整理，发挥主观能动性。这就是进行批判性的思考，就是在为创造性思维奠定基础。

3. **严谨性——要求严格精确**

数学思维的严谨性指的是思考问题符合逻辑、严密、准确，数学运算精确无误。与严谨性相对立的是直观性。从直观上发现数字和图形的性质和相互关系，有助于活跃思路，找到解决问题的正确途径。但直观性常伴随着模糊、任意、不可靠等弱点，必须通过坚持严谨性来加以克服。比如，初等几何的公理系统，最初曾包含着某些直观的、不严谨的成分。在古希腊大数学家欧几里得建立的公理系统中，并没有明确给出顺序公理（即“在……之间”的公理），因而可能导致一些产生错误结论的“证明”，如每个三角形都是等腰的“证明”。① 见图1—1，作$\triangle ABC$中角A的平分线和BC的垂直平分线。

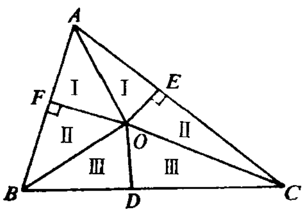


图1—1

① 〔美〕M·克莱因：《古今数学思想》（第四册），上海科学技术出版社1981年版，第75—76页。

如果这两条线平行，则角 A 平分线垂直于BC，因而这三角形是等腰的。如果这两条线相交于O点，那么作垂直于 AB 的线 OF 和垂直于 AC的线OE。显然，标着Ⅰ的两个三角形全等，因而$OF=OE$；标着Ⅱ的两个三角形也全等，因而$OB=OC$。从而标着Ⅲ的两个三角形也全等，所以 $FB=EC$。从标着Ⅰ的两个三角形，我们得到 $AF=AE$。于是 $AB=AC$，从而三角形就是等腰的了。

这个结论当然是错误的。图1—1实际上画得并不准确。点O的位置不应在三角形之内，而应在它的外部。在外接圆上，这是可以证明的。而E、F两点的位置也不是任意的，它们必须分别在三角形中各自边的内部和外部。19世纪以前的数学家们往往只能靠画出正确图形来确定E和 F 的位置，这当然是不够的。严格的几何证明不能依赖于直观图形给出的关系。由于缺少对"在……之间"的关系即顺序关系的深入理解，就难免出现导致错误结论的"证明"。19世纪著名数学家高斯、帕什等人发现了这个问题。在现代的由希尔伯特建立的几何公理系统中，明确给出了顺序公理，完全消除了欧几里得几何公理系统中的逻辑缺陷。这就充分体现了数学思维严谨性的作用。

数学思维的深刻性和严谨性是密切相关的。所谓数学思维的深刻性，是指不停留在事物的表面现象上，能够洞察数学对象的本质以及各种数学对象的内在联系，分清主次，揭示推理的逻辑结构，区分证明或解法是否合理和严谨，在一定程度上克服思维的表面化和绝对化。数学思维的严谨性以深刻性为基础。只有通过现象看本质，清除非本质因素的干扰，才能达到严谨性的要求。反过来，数学思维的严谨性又有助于认识的不断深化。因为人的认识活动不是一次完成

前，由现象到本质是一个不断发展的过程。符合事物的本质和规律的认识，必然是符合逻辑、严格精确的。在数学认识活动中强调严谨性的要求，自觉地不断消除不合逻辑的、不可靠的认识，必将更深入地接触事物的本质，更有效地解决各种数学问题。

在中学数学教学中，有些学生不注意区分相近概念的细微差别，不清楚概念的内涵和外延；审题时只注意明显条件而忽视隐蔽条件，把直观上显而易见的关系当作论证的根据，甚至出现循环论证；答题时不完全，不能给出问题的全部答案。这都是数学思维不严谨的表现。为了培养数学思维的严谨性，至少应提出以下基本要求：

（1）准确理解数学概念。

概念是抽象思维的基础。《中学数学教学大纲》（试行草案）指出“正确理解数学概念是掌握数学基础知识的前提。在教学中，应从实际事物和学生已有知识出发引入新概念。对于容易产生混淆的概念，要引导学生用对比方法认识它们之间的区别和联系。”概念的混淆是对数学思维严谨性的严重破坏。基本概念搞错了，以后的判断和推理全都变得毫无意义。

例1．解不等式

$$\log_{x^2+2}(3x^2-2x-4)>\log_{x^2+2}(x^2-3x+2)$$

有这样一种解法：$\because x^2+2>1$，

$\therefore\quad 3x^2-2x-4>x^2-3x+2$，$\therefore\ 2x^2+x-6>0$，

$$(2x-3)(x+2)>0,\ \therefore\quad x>\frac{3}{2}\text{或}x<-2.$$

这种解法是错误的，因为当$x=2$时，真数$x^2-3x+2=0$，而$x=2$在所求的范围内。按照对数概念的定义，对数的底应该